

Formacion de Estructura a Gran Escala Modelada con Campos Escalares como Materia Oscura

Abril Suárez Ramírez
CINVESTAV

6 de noviembre de 2008



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del
Instituto Politécnico Nacional

DEPARTAMENTO DE FISICA

**Formacion de Estructura a Gran Escala Con
Campos Escalares como Materia Oscura**

Tesis que presenta

Abril Suárez Ramírez

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis: **Dr. Tonatiuh Matos Chassin**

México, Distrito federal
2008.

Noviembre,

*A mis padres Joel Suárez y Hortencia Ramírez,
y mi hermana Liliana, quienes fueron mi inspiración
y motivación durante todo este periodo de crecimiento.*

*A mi novio Albar Escarcega que me ha apoyado en
todos los sentidos; en las buenas y las malas a lo largo
de estos dos años de aprendizaje.*

AGRADECIMIENTOS

- A mi asesor y amigo el Dr. Tonatiuh Matos, pues sin su ayuda gran parte de este sueño no se hubiera realizado mil gracias.
- A Beto y Juan por su ayuda al guiarme por el camino del bien al inicio de la tesis, gracias por aclarar mis dudas e inquietudes.
- A los doctores Itziar Aretxaga y Abdel Perez por su apoyo durante la escritura de la tesis.
- A mis queridos amigos y compañeros del Cinvestav; Pepe, Fercho, Aldrin, Sergio y Taxi porque por ustedes la estadia dentro del Cinvestav fue más amena, gracias por todos los momentos llenos de alegría que me brindaron.
- A Aizar por ser el mejor compañero de cubículo que pude haber tenido.
- A la pequeña familia que tengo en esta ciudad y con la cual he aprendido y me he divertido mucho, gracias German, Diego y Michos por los momentos tan gratos que me dan.
- A toda mi familia (Yuyu, Chiquita, Tita, Nikita) por la compañía incondicional que me brindaron a lo largo de este periodo. Pringa eres parte de la familia, te extraño.
- A mis amigos de La Paz, mil gracias por no abandonar nuestra amistad a pesar de la distancia y los años, gracias Chucho, Zurdo, Paola, Antonio y Carlos por todo su apoyo y sus visitas, siempre estan en mi corazón.
- A CONACYT por el apoyo economico que me brindaron durante mis dos años de maestria, gracias.
- Al CINVESTAV por el apoyo economico que me brindo para poder terminar con satisfaccion esta tesis.

Índice general

Resumen	VII
Abstract	XII
1. Introducción	1
Planteamiento del problema	1
Hipótesis	2
2. La cosmología hasta el siglo XXI	5
Antecedentes observacionales	5
Antecedentes teóricos	6
3. Fundamentación Teórica	9
Tensores	9
3.1.1. Tensor de Einstein	9
3.1.2. Tensor de Energía-Momento	9
3.1.3. Tensor Métrico	10
Ecuaciones de Einstein	10
Conservación del Tensor de Energía-Momento	11
Variables temporales	12
Campo escalar	12
<i>Procedimiento de Linearización</i>	13
Introducción a los Sistemas Dinámicos	13

4. Teoría lineal de perturbaciones	15
Descomponiendo al tensor métrico	15
Perturbaciones a orden cero	16
4.2.1. Tensor de energía-momento y campo escalar	17
4.2.2. Tensor de Einstein	18
4.2.3. Evolución del fondo	18
Teoría de perturbaciones en la norma Newtoniana	19
4.3.1. Perturbaciones a primer orden	19
4.3.2. Ecuaciones de evolución	21
Ecuaciones de evolución en el espacio de Fourier	22
Sistema dinámico de las perturbaciones	23
4.5.1. Sistema adimensional	23
4.5.2. Densidad de contraste	25
5. Análisis y Resultados	27
Resultados Numéricos	27
6. Conclusiones y Perspectivas	39
Conclusiones	39
Perspectivas	40
A. Herramientas Necesarias	41
Valores Numéricos Útiles	41
A.1.1. Constantes Físicas	41
A.1.2. Constantes Astronómicas	41
Relatividad General	41
A.2.1. El Principio de Equivalencia	41
A.2.2. Principio de Copérnico	42
A.2.3. Tensor de Ricci	42
A.2.4. Variables Perturbadas de la Métrica	42

La Cosmologia	43
A.3.1. Escalas	43
A.3.2. Analisis Numérico	43

Resumen

En esta tesis se calculan y se simulan algunos de los diferentes ingredientes necesarios para poder obtener la densidad de materia observada a gran-escala hoy en día de manera cualitativa. El trabajo comienza asumiendo que las semillas del universo son fluctuaciones pequeñas que se encuentran dentro de un fondo homogéneo tipo FLRW, las cuales se estudian por medio de la Teoría Lineal de Perturbaciones, y que debido a estas fluctuaciones, las cuales crecieron por medio de inestabilidad gravitacional es que hoy en día podemos ver estructura del tipo de galaxias, cúmulos de galaxias, etc... Se trabaja entonces con la métrica perturbada más general para perturbaciones escalares, la cual se utiliza para poder obtener tanto las ecuaciones homogéneas como perturbadas de Einstein por medio de la Relatividad General. Para el cálculo de la densidad de energía se utiliza el principio de conservación del tensor de energía-momento, el cual se encuentra ahora perturbado y que acoplado junto con las ecuaciones de Einstein y la ecuación de Klein-Gordon perturbada nos dan nuestro conjunto completo de ecuaciones a resolver. A diferencia de otros modelos, en este trabajo se introduce al campo escalar Φ^2 como el candidato a materia oscura y como uno de los principales ingredientes en la formación de estructura que hoy se observa. Se resuelven entonces las ecuaciones obtenidas como un sistema dinámico para el cual se introducen parámetros adimensionales que describen la cosmología de las diferentes cantidades estudiadas, y donde por medio de estas se puede notar que tanto el potencial gravitacional como el campo escalar son los principales contribuyentes al espectro de la densidad de contraste, la cual nos puede brindar información acerca de la distribución de materia que observamos hasta ahora.

Abstract

In this thesis we calculate and simulate some of the ingredients needed to obtain the matter density profile of the large-scale structure we observe now a days in a cualitative way. This work begins assuming that the seeds of the early universe were small fluctuations that lived inside an homogeneous FLRW background, and which are studied using the Linear Perturbation Theory, these fluctuations then grew because of gravitational inestability, in this way giving birth to what we see today: galaxies, clusters of galaxies, etc... We then work with the most general perturbed metric for scalar perturbations, which we use to obtain the homogeneous and perturbed Einstein's equations together with the help of General Relativity. In calculating the energy density we used the conservation of the energy-momentum tensor, which is now also perturbed, and that together with the Einstein's equations and the perturbed Klein-Gordon equation gave us our complete set of equations to be solved. The key difference of this work compared with other works lays in the fact that we introduce Φ^2 as a scalar field candidate to dark matter, and as one of the main ingredients needed to obtain the large-scale structure we see today. We then solve the obtained set of equations like a dynamical system in which we introduce new dimensionless parameters that describe the cosmology of the diferent studied quantities, this shows us that both; the gravitational potential and the fluctuations on the scalar field are the main ingredients to the spectrum of the density contrast, which can give us some information about the matter distribution we observe these days.

INTRODUCCIÓN

La radiación de cósmica de fondo (CMB) es una de las principales pruebas acerca del modelo homogéneo e isotrópico del Big bang. Las anisotropías en el CMB están relacionadas con pequeñas perturbaciones que se encuentran dentro de un fondo perfectamente suave, y las cuales se cree son las semillas en la formación de galaxias y estructura a gran escala en el Universo. Se asume entonces que en el pasado existían desviaciones pequeñas en tal homogeneidad de nuestro universo. Para esto se propone un modelo cosmológico de campo escalar como materia oscura el cual debe producir tales inhomogeneidades iniciales, para después poder evolucionarlas hacia etapas posteriores.

§1.1 Planteamiento del problema

Ya en estos días se sabe que el universo no es perfectamente homogéneo e isotrópico: existen galaxias y clusters de galaxias; la distribución general a gran escala no está dada al azar, y se ha podido observar que las anisotropías en la temperatura del CMB nos predicen la existencia de desviaciones en la uniformidad de la densidad del, espacio también a gran escala.

Para los modelos cosmológicos que involucran campos escalares, normalmente se supone que el campo escalar no exhibe fluctuaciones en la densidad a escalas (espaciales) de clusters o por debajo. Esto se debe a que en la teoría lineal de perturbaciones, la masa del campo es muy pequeña y por lo tanto no siente fluctuaciones menores o iguales a una décima de Mpc. En sí, el despreciar los efectos de las perturbaciones en la masa en la evolución de la materia oscura a escalas pequeñas es una buena aproximación cuando las perturbaciones en la métrica son pequeñas. En el caso en que se tomaran en cuenta, se debe tener cuidado pues entonces la métrica plana local de FLRW no es más una buena aproximación. Aquí tanto las perturbaciones lineales como no lineales, en principio, pueden modificar la evolución de las perturbaciones en la materia oscura y éstas a su vez, afectar la evolución en la formación de estructura.

Conforme el universo evoluciona, la materia se acumula inicialmente en regiones mucho más densas que otras no importando qué tan pequeña la densidad inicial sea; eventualmente materia

suficiente será atraída hacia esa región para así crear estructura.

Los modelos cosmológicos más aceptados para entender tal mecanismo en la formación de estructura son aquellos que contienen materia y energía oscura, con una ecuación de estado posiblemente negativa como principales constituyentes del universo [21].

Ahora, tanto la energía como la materia oscura se pueden describir por medio de un campo escalar dinámico el cual rueda sobre su potencial $V(\Phi)$. Aunque todavía no se ha llegado a un acuerdo en la forma correcta del potencial escalar $V(\Phi)$ [15]-[22].

Las preguntas fundamentales en este tipo de problemas serían entonces ¿A que nos referimos por no uniformidad? y ¿Cómo podríamos cuantificar la distribución de galaxias ahora observadas? Comenzamos entonces por entender el concepto de uniformidad lo cual nos llevará directamente a la respuesta de la segunda pregunta. Para esto, imaginemos que las galaxias están distribuidas de alguna forma aleatoria en el universo y queremos entender si el mecanismo responsable de esta distribución opera de manera uniforme. Tal proceso debe dar la misma probabilidad de tener una galaxia en cada posición del espacio.

§1.2 Hipótesis

Se tratará de reconstruir el universo observado, asumiendo que en alguna etapa del pasado, existieron desviaciones pequeñas en la homogeneidad del espacio. Se piensa que la estructura cósmica pudo tener sus orígenes debido a que estas desviaciones se amplificaron por la inestabilidad gravitacional de pequeñas fluctuaciones del universo temprano.

En la época de inflación se suponen perturbaciones de forma Gaussiana, tal que, en el modelo estandar (universo dominado por alguna forma de materia oscura con perturbaciones adiabáticas iniciales) son las únicas que se consideran.

Mientras estas inhomogeneidades se mantengan pequeñas, su crecimiento se puede estudiar por medio de la teoría lineal de perturbaciones. Se debe de hacer énfasis en que al suponer la existencia de pequeñas inhomogeneidades en una época inicial, el modelo cosmológico propuesto debe producir y por lo tanto satisfacer tales condiciones iniciales.

La evolución de estas fluctuaciones con magnitud y espectro específico se definen por medio de algunos parámetros fundamentales, como lo son: la densidad cósmica Ω , la constante cosmológica Λ y las contribuciones relativas de la radiación, la materia oscura y visible a la densidad del universo. A escalas pequeñas, la forma del espectro de las fluctuaciones se determina por medio

del análisis de los componentes de la materia y la radiación en el universo, introduciendo escalas de longitud características a la ley del espectro de potencias, lo cual se debe de reflejar en la distribución de galaxias hoy en día. Se definen entonces las fluctuaciones relativas en la densidad de masa como $\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho}$ donde ρ es la densidad de masa del universo.

Se trata de introducir un campo escalar Φ como candidato de materia oscura tanto a escalas cosmológicas como a escalas galácticas, a un universo plano ($\Omega_M + \Omega_\lambda \approx 0$) con 96 % de materia desconocida pero de gran importancia a nivel cosmológico, en donde debemos tomar en cuenta la posibilidad de que las estructuras de las cuales se constituyen las galaxias pueden estar basadas en este tipo de materia, es decir, la materia oscura puede ayudar en la contribución de formación de estructura.

El principal objetivo en introducir un modelo de campo escalar como materia oscura (SFDM: Scalar Field Dark Matter) es asumir que la materia oscura es en sí un campo escalar el cual involucra un potencial auto-interactuante

$$V(\Phi) = \frac{1}{2}m^2\Phi^2,$$

donde la masa del campo escalar Φ se define como $m_\Phi = \ddot{V}_{\Phi=0}$. y la materia oscura se ve afectada por la radiación sólo indirectamente, a través de un potencial gravitacional.

Entonces, para poder tratar las anisotropías se necesita conocer cómo evolucionan las perturbaciones que actúan sobre la materia oscura. Esto nos podría dar la densidad de energía necesaria para poder obtener la cantidad de materia en las galaxias, requerida para predecir las curvas de rotación de materia barionica en las estrellas, y la distribución correcta de la materia oscura dentro de ellas.

Las fluctuaciones en la densidad se convierten a un espectro de potencias, el cual se puede comparar con la distribución actual de las galaxias dependiendo de la composición de materia oscura (DM). Se investigan entonces los efectos que pudieran tener las perturbaciones sobre el campo escalar en el espectro y evolución temporal en la formación de estructura.

Se desarrollan tanto la teoría como las simulaciones para obtener tales espectros basándonos en los hechos anteriormente mencionados, y refiriéndonos al modelo no perturbado (sin fluctuaciones) como el *fondo* de donde se evolucionarán las pequeñas perturbaciones.

Otro aspecto importante a notar es que en general no se está obligado a escoger una norma en particular para desarrollar la teoría de perturbaciones: pueden existir varias aproximaciones covariantes [4]. Si se decide escoger un sistema coordenado, estamos escogiendo lo que se conoce

como *norma*. Al inicio de la tesis se procederá con gran generalidad, especificando la norma sólo si es necesario.

La tesis tiene su motivación debido a que en las observaciones más recientes que se tienen de estructura a gran escala, se ha notado que es muy probable que ya existieran estructuras como galaxias o clusters de galaxias en épocas antes de recombinación, mucho antes de lo que se cree hoy en día y de lo que predice el modelo estándar.

Aquí se darán algunas de las herramientas necesarias para poder estudiar dicha formación temprana de estructura, la cual proponemos puede llevarse a cabo por la contribución de las fluctuaciones de la materia oscura.

En el capítulo dos se dan los antecedentes observacionales y teóricos que han realizado diferentes científicos en el tema. En el capítulo tres se dan las herramientas matemáticas necesarias para el desarrollo de la teoría, la cual se realiza en el capítulo posterior. El capítulo cinco muestra los resultados numéricos obtenidos, así como el análisis físico de estos. Finalmente se dan las conclusiones y perspectivas a la tesis en el capítulo seis de esta misma.

LA COSMOLOGÍA HASTA EL SIGLO XXI

La cosmología es el estudio de la dinámica y el origen del universo como un todo, o por lo menos de la región observable. Hace menos de 100 años, se creía que el universo era estático y además se desconocía la existencia de galaxias. Una revolución observacional se inició con Leavitt, Hubble y otros que de hecho demostraron que el universo está en expansión y contiene millones de galaxias distantes. Friedmann, Lemaitre y otros teóricos demostraron cómo la expansión se puede explicar por medio de un modelo homogéneo e isotrópico que obedece las ecuaciones de campo de la relatividad general. La expansión pinta al Big bang como el origen del universo, y Gamow junto con sus colaboradores mostraron que como consecuencia, existe radiación térmica de fondo y la nucleosíntesis de elementos ligeros que tomaron lugar en el universo temprano.

§2.1 Antecedentes observacionales

La cosmología se ha formado en las últimas décadas como una ciencia física basada en observaciones, y ha ido creciendo conforme crece la información observacional de alta precisión. Algunos antecedentes importantes serían:

- El Explorador Cósmico de Fondo (COBE), que detectó anisotropías de gran escala en la temperatura del CMB [27], y sus sucesores, especialmente en el WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), que midió las anisotropías a ángulos pequeños y detectó los picos acústicos con mayor precisión a lo que se había hecho con MAXIMA; que con anterioridad también logró la medición de dichos picos [14];
- El estudio 2dF (2-degree Field) de corrimiento al rojo en las galaxias, que midió el espectro de potencias basándose en más de 2000 galaxias dentro de un campo específicamente seleccionado [9], y su sucesor, el SDSS (Sloan Digital Sky Survey) [30];
- El Proyecto Cosmológico de Supernova (SCP) que analizó la curvatura de la luz para diferentes supernovas (evolución de su brillo) y que midió la magnitud de los datos del corrimiento al rojo de más de 40 supernovas (SNe). Por otro lado se tiene al High-Z SN

Search (High Redshift Supernova Search) que trata de dar una explicación al porque de la expansión del Universo por medio del estudio de diferentes supernovas [25].

Así pues, los esfuerzos teóricos para interpretar los datos observacionales y hacer predicciones a futuro han involucrado de manera importante la relatividad, la astrofísica, la física de partículas y la computación.

§2.2 Antecedentes teóricos

Mediciones de la relación luminosidad-corrimiento al rojo en observaciones de supernovas Ia, el espectro de potencias de estructura a gran escala, y las anisotropías del CMB [28], nos han revelado un ingrediente misterioso con al parecer una presión negativa, la tan llamada *energía oscura*, la cual contribuye al 73 % del conjunto masa-energía de hoy y es la causante de la expansión acelerada del universo.

Los candidatos más sencillos para esta entidad desconocida incluyen una constante cosmológica [8] y un campo escalar donde el modelo de campo escalar ha creado gran expectación como solución a la naturaleza del problema [24]-[31]. De hecho, el comportamiento de perturbaciones lineales sobre un campo escalar y sus efectos en la formación de estructura a gran escala ya ha sido investigado con anterioridad por un gran número de autores [13]-[17]. Tal investigación tiene como uno de sus objetivos el entender la física responsable de la forma dada al espectro de potencias de las perturbaciones a la densidad, $P(k)$. En tal trabajo se puede notar que la física básica es una bella aplicación de lo que es la Relatividad General (GR).

Comenzamos haciendo mención a lo que se conoce como el *principio cosmológico*, primeramente mencionado por Albert Einstein y el cual nos pinta al universo como homogéneo e isotrópico. Observacionalmente, esta teoría se soporta por medio del conteo de galaxias como función de la magnitud [2]-[3], conteo de galaxias en celdas distribuidas a través de todo el universo (análisis de corrimiento al rojo) y especialmente, la isotropía del CMB (aparte de las dipolares, las anisotropías sólo aparecen a $\approx 10^{-5}$). Es entonces debido a estas observaciones que podemos basarnos en el principio cosmológico, el cual nos permite tratar con la no uniformidad, es decir, estructura a gran escala, como perturbaciones pequeñas sobre un modelo uniforme que podría tratarse como FLRW.

Con anterioridad Bardeen utilizó lo que es la teoría de perturbaciones para analizar efectos con no-Gaussianidad [5]. En esta teoría la métrica y los campos de materia se expanden en series de potencias alrededor de algún parámetro pequeño.

El modelo de campo escalar como materia oscura (SFDM) para la formación de estructura también ya ha sido estudiado anteriormente. Una de las primeras sugerencias a que el campo escalar

podría contribuir a la formación de estructura del Universo fue vista por Press [23] y Madsen [16], donde el primero sugirió que el halo podría ser un condensado de Bose-Einstein (BEC).

Después, Peebles y Vilenkin [22] propusieron que un campo escalar dado por inflación podría ser descrito por medio de un fluido perfecto y tener consecuencias observacionales importantes en la formación de estructura.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Antes de atacar el problema de obtener el perfil para la densidad de contraste, utilizando $\frac{1}{2}m^2\Phi^2$ como materia oscura, en este capítulo se dan de manera muy general, sin ningún detalle las herramientas necesarias para el desarrollo de la teoría en capítulos posteriores. Se hace énfasis en las interpretaciones físicas de las diferentes herramientas utilizadas, como por ejemplo: el tensor de Einstein y el tensor de energía-momento. Finalmente se da un breve resumen de lo que es la teoría para los sistemas dinámicos.

§3.1 Tensores

En física, un tensor caracteriza las propiedades de un sistema físico, lo cual se ilustra de mejor manera con los ejemplos dados en las siguientes subsecciones. Un tensor puede ser definido en un solo punto o en una colección de puntos aislados del espacio (o espacio-tiempo), también puede ser definido sobre un continuo de puntos.

3.1.1. Tensor de Einstein

En física y geometría diferencial, el tensor de Einstein G es un tensor de rango 2. En notación libre de índices éste se define como

$$G = R - \frac{1}{2}gR,$$

donde R es el tensor de Ricci, g es el tensor métrico y R es la curvatura escalar. Tomando en cuenta las componentes, la ecuación anterior toma la siguiente forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R.$$

3.1.2. Tensor de Energía-Momento

El tensor de energía-momento es una cantidad tensorial que en física describe la densidad y el flujo de energía y momento en el espacio-tiempo. Es la fuente del campo gravitacional en la relatividad general, así como la masa es la fuente de tal campo en la gravitación newtoniana. Tiene

aplicaciones importantes, especialmente en las ecuaciones de campo de Einstein.

Nota: Tomemos en cuenta que a lo largo de este trabajo asumiremos el uso de convención de sumatoria de Einstein. Al hablar de coordenadas, x^0 representará la coordenada temporal, mientras que x^i, x^j y x^k representarán las coordenadas espaciales.

El tensor de energía-momento se define como $T_{\mu\nu}$ de orden dos que da el flujo de la μ -ésima componente del vector de momento a lo largo de la superficie con coordenada x^ν constante.

En relatividad general, la forma simétrica que satisface

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu},$$

actúa como la fuente de curvatura al espacio tiempo, y es la densidad de corriente asociada con las transformaciones de norma.

3.1.3. Tensor Métrico

En matemáticas, el tensor métrico es un tensor de orden 2 que se utiliza para definir conceptos métricos como distancia, ángulos y volumen en un espacio localmente Euclidiano. Una vez que la coordenada local x^i se ha elegido, el tensor métrico aparece como una matriz. La notación g_{ij} se utiliza por convención para denotar las componentes de este tensor.

§3.2 Ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de Einstein son un conjunto de diez ecuaciones en la teoría de Einstein de la Relatividad General en donde la fuerza fundamental de gravitación se describe como un espacio-tiempo curvo causado por la materia y la energía. Estas ecuaciones fueron publicadas por primera vez en 1915 [11].

El conjunto completo de ecuaciones de Einstein (EE) forman una ecuación tensorial que relacionan la curvatura del espacio-tiempo (expresado en el tensor de Einstein) con la energía y el momento dentro del espacio-tiempo (como se expresa en el tensor de energía-momento).

Las EE se utilizan para determinar la curvatura del espacio-tiempo que resulta de la presencia de masa y energía. Es decir, determinan el tensor métrico del espacio-tiempo para un arreglo dado del tensor de energía-momento en el espacio-tiempo. De la relación entre el tensor métrico y el tensor de Einstein, las ecuaciones de Einstein se vuelven un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas.

Uno puede escribir las EE de manera compacta por medio del tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

donde se hizo a c igual a la unidad (c es la velocidad de la luz en el vacío) y G es la constante de Newton. Aquí el lado izquierdo representa la curvatura del espacio-tiempo como se determina por la métrica y la expresión en la derecha representa el contenido de masa/energía en el espacio-tiempo.

§3.3 Conservación del Tensor de Energía-Momento

Con campos, estamos interesados en densidades tales como la carga, probabilidad, energía y densidad de momento. El tratamiento de la distribución de energía y momento dentro de los campos se tratan de manera análoga a los casos de carga y probabilidad, donde la conservación de estas últimas se describe por medio de la ecuación de continuidad.

Como ya se mencionó anteriormente las densidades que caracterizan el contenido de energía y momento en el campo están resumidas dentro del tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. Las diferentes cantidades corresponden a los flujos y densidades de la energía y el momento. Como ya se vio, en el caso relativista, los índices pueden de forma separada tener los siguientes valores $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ tal que el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ consiste de 16 componentes.

En analogía a la ecuación de continuidad, la conservación de la energía y el momento se describe por el siguiente conjunto de 4 ecuaciones:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \tag{3.1}$$

Las ecuaciones que corresponden a $\mu = 0$ contienen los términos T^{0j} y T^{00} que describen la conservación de la energía. Las tres ecuaciones que corresponden a $\mu = 1, 2, 3$ contienen los términos T^{ij} y T^{i0} y describen la conservación de cada una de las componentes del momento.

Las derivadas parciales son de hecho derivadas covariantes. Es decir, que la ecuación de continuidad ya no implica que la energía y el momento expresados por el tensor se conserven completamente. En el límite clásico, esto tiene una interpretación sencilla: la energía está siendo intercambiada con energía potencial gravitacional, que no está incluida en el tensor, y el momento está siendo transferido a través del campo a otros cuerpos.

En el caso relativista se requiere que el tensor de energía-momento (para cumplir las ecuaciones de Einstein) $T^{\mu\nu}$ sea simétrica tanto en μ como en ν , y como consecuencia el número de componentes independientes se reduce de 16 a 10.

En resumen tenemos (ignorando el término c):

$$T^{00} = \text{densidad de energía,}$$

$$T^{i0} = T^{0i} = \text{tres componentes de la densidad del momento (o flujo de energía),}$$

$$T^{ij} = T^{ji} = \text{seis componentes del flujo de momento.}$$

§3.4 Variables temporales

Si el Universo es plano, como se asume en esta tesis, entonces la distancia entre dos puntos x_1 y x_2 será igual a $[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}$. Una distancia importante, es la distancia que la luz pudo haber viajado desde $t=0$ (lo que llamamos tiempo cosmológico). En un tiempo dt , la luz pudo haber viajado una distancia $dx = dt/a$, tal que la distancia total que pudo haber viajado es:

$$\eta \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}.$$

La importancia de esta distancia esta en que no hay información que se pudiera propagar más lejos que η desde el inicio, es decir, regiones separadas por una distancia mayor a η no estuvieron en contacto causal. También se piensa en η , la cual crece de forma monotonamente, como en una variable temporal llamada *tiempo conforme*.

A lo largo de la tesis se trabajará utilizando a los tiempos conforme η y cosmológico t como variables temporales. El tiempo conforme y el tiempo cosmológico están relacionados por medio de: $\frac{d}{d\eta} = a \frac{d}{dt}$, en nuestro caso

$$\cdot \equiv \frac{d}{dt} \text{ Derivada con respecto a la coordenada } t.$$

§3.5 Campo escalar

En física teórica una teoría de campo escalar se refiere a una teoría clásica o cuántica de campo escalar. Tal campo se distingue por su invarianza bajo transformaciones de Lorentz, de ahí el nombre *escalar* en contraste a un campo vectorial o tensorial.

Un ejemplo de campo escalar sería la densidad de un fluido como función de la posición (hablando tensorialmente). Un segundo ejemplo de un campo escalar sería el valor del potencial gravitacional como función de la posición. Notemos que ambos son números simples (funciones) que varían continuamente de punto a punto, así definiendo un campo escalar.

En la naturaleza no se han observado aún campos escalares fundamentales, aunque los bosones de Higgs continúan estudiándose [26]. A pesar de esto, los campos escalares aparecen en la descripción de muchos fenómenos físicos donde se aplican las teorías de campo efectivas.

Un campo escalar se puede utilizar como fuente de energía cuando su densidad lagrangiana está dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\Phi^{;\mu}\Phi_{;\mu} - V(\Phi),$$

donde $\Phi^{;\mu} = g^{\mu\nu}\Phi_{,\nu}$ y el campo se encuentra mínimamente acoplado a la gravedad.

El tensor de energía-momento se define como

$$T_{\nu}^{\mu} = -2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} + \delta_{\nu}^{\mu}\mathcal{L},$$

y por lo tanto para el campo escalar Φ tenemos

$$T_{\nu}^{\mu} = \Phi_{,\mu}\Phi_{,\nu} - \left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\Phi_{,\alpha}\Phi_{,\beta} + g_{\mu\nu}V(\Phi)\right]. \quad (3.2)$$

Donde Φ es el campo escalar y V es el potencial del campo escalar, además $\Phi_{,\mu} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^{\mu}}$.

Como se vio anteriormente la componente 00 del tensor de energía-momento da la densidad de energía y la componente ij la presión, en este caso sin perturbaciones.

§3.6 Procedimiento de Linearización

Las ecuaciones de evolución para las cantidades a primer orden se obtienen del sistema general de ecuaciones de evolución, por medio del procedimiento de linearización:

- Se desprecian todos los productos de cantidades a primer orden tanto como el producto de sus derivadas espaciales en las ecuaciones de evolución no lineales.
- Las ecuaciones resultantes forman un sistema de EDP (Ecuaciones Diferenciales Parciales) de cantidades a primer orden, cuyos coeficientes dependen de las cantidades a orden cero. El proceso de linearización involucra reemplazar la cantidad a orden cero por su valor de fondo.

§3.7 Introducción a los Sistemas Dinámicos

Un *sistema dinámico* es un sistema complejo que presenta un cambio o evolución de su estado en un tiempo, el comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones; de esta forma se pueden elaborar modelos que buscan

representar la estructura del mismo sistema.

Al definir los límites, se hace en primer lugar, una selección de aquellas componentes que contribuyan a generar las etapas de comportamiento, y luego se determina el espacio donde se llevará a cabo el estudio.

En cuanto a la elaboración de los modelos, los elementos y sus relaciones, se debe de tener en cuenta:

- Un sistema está formado por un conjunto de elementos en interacción.
- El comportamiento del sistema se puede mostrar a través de *diagramas*.

Un ejemplo de un sistema dinámico se puede ver en la distribución de galaxias a lo largo de la evolución del universo, de tal forma que en cierta época la distribución de galaxias es X_k , en la época siguiente será X_{k+1} . De manera que podemos etiquetar la distribución de galaxias que habrá durante diferentes épocas, así: época inicial X_0 , primera época X_1, \dots , época k X_k .

Si el tiempo es medido de forma continua, el sistema dinámico *continuo* resultante es expresado como una ecuación diferencial ordinaria, que podría ser de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in X, \quad (3.3)$$

donde $f : X \implies X$ y se asume que el estado físico del sistema al instante de tiempo t se describe por un elemento x de un espacio fase X, que puede ser finito o infinito en sus dimensiones.

La idea principal es encontrar los puntos críticos de la ecuación (3.3) que están dados por $f(x_c) = 0$. Entonces se linearizan las ecuaciones diferenciales en cada punto crítico, es decir, se expande alrededor de estos puntos $\tilde{x} = \tilde{x}_c + \delta\tilde{x}$, lo que da

$$\delta\tilde{x}' = \mathcal{M}\delta\tilde{x}.$$

Por lo tanto las soluciones generales para la evolución de la perturbación lineal se pueden escribir como

$$\delta\tilde{x}' = \delta\tilde{x}_0 e^{\mathcal{N}\delta t},$$

donde \mathcal{N} es la matriz compuesta por los eigenvalores m_i asociados a \mathcal{M} .

TEORÍA LÍNEAL DE PERTURBACIONES

En este capítulo se dan las principales características de los cálculos hechos. El alto grado de isotropía en el CMB, junto con el principio de Copérnico, nos dan una gran base para creer que la estructura a gran escala del universo observable se describe de manera correcta por medio del modelo de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW), que es exactamente isotrópico y espacialmente homogéneo. Claro, el universo real no es exactamente isotrópico ni homogéneo, pues existe estructura compleja asociada con la distribución observable de galaxias, es decir, la expansión puede no ser exactamente isotrópica, y pueden existir ondas gravitacionales primordiales. Hoy en día se cree que las desviaciones exactas al modelo de FLRW son lo suficientemente pequeñas que se pueden describir considerando la teoría lineal de perturbaciones. El modelo de perturbación a la métrica de FLRW fue introducido por Lifshitz (1946). En esta teoría uno distingue entre el espacio-tiempo de fondo, modelo estándar de FLRW, y un espacio-tiempo perturbado, el cual representa al universo físico. Se presentan entonces las ecuaciones fundamentales que se necesitan para el análisis de las perturbaciones al campo escalar en un espacio-tiempo de FLRW, donde haremos $c \equiv 1$. Después de introducir al tensor métrico perturbado en un fondo de FLRW se consideran principalmente perturbaciones escalares. Se dan entonces las ecuaciones de conservación de la energía y el momento y las ecuaciones de campo de Einstein para una métrica perturbada de FLRW.

§4.1 Descomponiendo al tensor métrico

Se consideran perturbaciones a primer orden sobre un fondo FLRW, tal que el tensor métrico se puede separar como

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu},$$

donde la métrica de fondo $g_{\mu\nu}^{(0)}$ está dada por

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix}$$

donde δ_{ij} es la métrica en el espacio 3-dimensional con curvatura constante. Es decir, se considera que el *fondo* es el espacio-tiempo no perturbado, que se describe por la métrica de FLRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right].$$

El tensor métrico tiene 10 componentes independientes en 4 dimensiones. Para perturbaciones lineales resulta cómodo separar las perturbaciones a la métrica en partes diferentes llamadas escalares, vectoriales o tensoriales dependiendo de sus propiedades [5, 29]. La razón para separar las perturbaciones a la métrica es porque ellas mismas se desacoplan en las ecuaciones lineales de perturbación y por lo tanto es más fácil distinguirlas.

Las perturbaciones *escalares* siempre pueden ser construidas de una cantidad escalar, o sus derivadas, y cualquier cantidad de fondo tal como lo es la métrica δ_{ij} . Se puede construir cualquier métrica escalar perturbada a primer orden en términos de cuatro escalares ϕ (lapse function), ψ (potencial gravitacional), B_i donde

$$\begin{aligned} \delta g_{00} &= -a^2 2\phi, \\ \delta g_{0i} &= \delta g_{i0} = a^2 B_i, \\ \delta g_{ij} &= -2a^2(\psi \delta_{ij} - E_{ij}). \end{aligned}$$

Se puede escribir entonces la métrica perturbada a primer orden como

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -2\phi & B_i \\ B_j & -2\psi \delta_{ij} + 2E_{ij} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto se tiene el elemento de línea perturbado:

$$ds^2 = a^2(\eta) - ((1 + 2\phi)d\eta^2 + 2B_i d\eta dx^i + [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{ij}]dx^i dx^j).$$

§4.2 Perturbaciones a orden cero

Por definición la perturbación de cualquier cantidad es la diferencia entre su valor en algún evento en el espacio-tiempo real, y su valor en el correspondiente, a través de la métrica, evento en el fondo.

El tensor de energía-momento para un campo escalar mínimamente acoplado al campo gravitacional está dado por (3.2).

Separamos las cantidades tensoriales en un valor de fondo y la perturbación de acuerdo a

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \delta\mathbf{T}, \tag{4.1}$$

donde el valor de fondo es una cantidad dependiente del tiempo solamente $\mathbf{T}_0 \equiv \mathbf{T}_0(\eta)$, mientras que las perturbaciones dependen tanto del tiempo como de las coordenadas del espacio $x^\mu = [\eta, x^i]$, es decir, $\delta\mathbf{T} \equiv \delta\mathbf{T}(x^i)$.

El tensor métrico a primer orden, incluyendo perturbaciones escalares es

$$\begin{aligned} g_{00} &= -a^2(1 + 2\phi), \\ g_{0i} &= a^2 B_{,i}, \\ g_{ij} &= a^2[(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}], \end{aligned}$$

donde $a = a(\eta)$ es el factor de escala, η es el tiempo conforme, ψ es la perturbación a la curvatura, E esta asociada con una perturbación a la expansión.

La convension de signos es (+++). La forma contravariante del tensor métrico, incluyendo la parte perturbada, se da en el ápendice. Al considerar perturbaciones a la métrica, estamos tratando la teoría de campo escalar en un espacio-tiempo plano homogéneo e isotrópico.

4.2.1. Tensor de energía-momento y campo escalar

Separamos el campo escalar Φ en una parte de fondo y la perturbación a primer orden de acuerdo a (4.1),

$$\Phi(x^\mu) = \Phi_0(\eta) + \delta\Phi(x^\mu),$$

el potencial $V \equiv V(\Phi)$ se separa análogamente

$$V(\Phi) = V_0 + \delta V,$$

donde

$$\delta V = V_{,\Phi} \delta\Phi,$$

y $V_{,\Phi} \equiv \frac{\partial V}{\partial \Phi}$.

El tensor de energía-momento para el campo escalar con potencial $V(\Phi)$ se separa igual en una parte de fondo, y una perturbación a primer orden,

$$T_\nu^\mu \equiv T_{(0)\nu}^\mu + \delta T_\nu^\mu,$$

y para las componentes a orden cero tenemos de (3.2),

$$T_0^0 = -\dot{\rho} = -\left(\frac{1}{2}\dot{\Phi}_0^2 + V_0\right), \quad T_j^i = p = \left(\frac{1}{2}\dot{\Phi}_0^2 - V_0\right) \delta_j^i.$$

4.2.2. Tensor de Einstein

Expandimos el tensor de Einstein en serie de potencias de acuerdo a (4.1) hasta primer orden

$$G_{\nu}^{\mu} = G_{(0)\nu}^{\mu} + \delta G_{\nu}^{\mu}.$$

Donde las componentes del tensor de Einstein a orden cero son

$$G_0^0 = -3\frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad G_j^i = -\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a}\right).$$

Ahora, utilizamos que $G_j^i = 8\pi GT_j^i$, entonces las ecuaciones de movimiento para un fondo homogéneo con factor de escala $a(t)$ y factor de Hubble $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ son

$$8\pi G\rho = 3H^2, \tag{4.2}$$

$$4\pi G(\rho + 3p) = -3\dot{H}. \tag{4.3}$$

A las ecuaciones (4.2) y (4.3) normalmente se les refieren como *ecuaciones de Friedmann*.

Así pues, podemos notar que cuando se trata con el fondo de FLRW, las únicas cantidades a orden cero son la densidad de energía ρ , la presión p y la expansión volumétrica $3H$.

4.2.3. Evolución del fondo

La evolución del fondo está gobernada por la ecuación de Friedmann, dada por la componente 0-0 de las ecuaciones de Einstein

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho$$

Los campos escalares están gobernados por la ecuación de Klein-Gordon, que se obtiene de la ecuación de conservación (3.1).

Para la parte homogénea del campo, sólo las derivadas temporales de Φ son relevantes tal que los índices μ y ν en el primer término y α, β en el segundo, en el tensor de energía-momento para el campo escalar, sean iguales a cero. Para determinar la evolución de Φ_0 , recurriremos a esta ecuación.

Si la componente dominante del universo es Φ , entonces la densidad de energía en el lado derecho está dada por $\dot{\Phi}_0^2/2 + V_0$. Diferenciando la ecuación tenemos

$$2\frac{\dot{a}}{a} \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \right] = \frac{8\pi G}{3} \left[(\dot{\Phi}_0) (\ddot{\Phi}_0) + V_{,\Phi} \dot{\Phi}_0 \right]. \tag{4.4}$$

El primer término de la izquierda en el paréntesis se puede reemplazar por

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) = -4\pi G(\rho/3 + p)$$

análogamente el segundo término a la izquierda es $8\pi G\rho/3$,

$$\frac{\dot{a}}{a}8\pi G[-(\rho/3) - p - 2\rho/3] = -8\pi GH\dot{\Phi}_0^2$$

igualando con el lado derecho de (4.4) nos lleva a la ecuación de evolución para un campo escalar homogéneo en un universo en expansión,

$$\ddot{\Phi}_0 + 3H\dot{\Phi}_0 + V_{,\Phi} = 0.$$

§4.3 Teoría de perturbaciones en la norma Newtoniana

Recordemos que la métrica perturbada tiene 10 componentes independientes dentro de un espacio de cuatro dimensiones, pero solo tenemos seis ecuaciones de Einstein independientes. Debemos fijar entonces, los cuatro grados de libertad restantes por medio de una elección de coordenadas. Recordemos que la invariancia de la física, a transformaciones de coordenadas generales se conoce en Relatividad General como invariancia de norma. Por esto, a una elección de coordenadas se le llama norma.

En esta sección se discutirá la teoría por medio de la norma Newtoniana, debido a que es una de las más convenientes para el estudio de perturbaciones escalares, pues no existen singularidades en las coordenadas.

Como siempre consideramos un fondo espacialmente plano con perturbaciones escalares en la métrica. Recordemos que la velocidad de la luz c se ha puesto igual a la unidad.

4.3.1. Perturbaciones a primer orden

Tenemos las ecuaciones básicas para tratar al espacio no perturbado de FLRW, el cual se encuentra ocupado con un campo escalar mínimamente acoplado.

Se pueden estimar las dimensiones del fondo y las variables perturbadas, en el sistema de unidades utilizado donde $c \equiv 1$. Como $8\pi G = [M^{-1}T^2]$, donde M y T indican dimensiones de masa (energía) y tiempo (longitud) respectivamente, tenemos:

$$[\rho] = [p] = [\delta\rho] = [\delta p] = [MT^4], \quad [\dot{\Phi}_0\delta\Phi] = [MT^3], \quad [\phi] = [\psi] = 0, \quad [\Phi] = [\delta\Phi] = [M^{1/2}T^{-1}], \\ [V] = [MT^4].$$

Tensor de energía-momento

A primer orden tenemos

$$\delta T_0^0 = -\delta\dot{\rho} = -(\dot{\Phi}_0\delta\dot{\Phi} - \dot{\Phi}_0^2\phi) - V_{,\Phi}\delta\Phi,$$

$$\delta T_i^0 = -\frac{1}{a}(\dot{\Phi}_0\delta\Phi_{,i}),$$

$$\delta T_j^i = \delta p = (\dot{\Phi}_0\delta\dot{\Phi} - \dot{\Phi}_0^2\phi - V_{,\Phi}\delta\Phi)\delta_j^i.$$

Para un campo escalar δT_i^0 también se puede escribir como $\delta T_i^0 = (\rho+p)\delta v_i$ con $\delta v_i = \dot{\Phi}^{-1}\delta\Phi_{,i}$.

Tensor de Einstein

Para el tensor de Einstein a primer orden tenemos

$$\delta G_0^0 = 6\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}\phi + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\psi}\right) - \frac{2}{a^2}\nabla^2\psi + \frac{2}{a}H[\nabla^2 B - \nabla^2(a\dot{E})],$$

$$\delta G_i^0 = -\frac{2}{a}\left(\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a}\phi\right)_{,i},$$

$$\begin{aligned} \delta G_j^i = & \left[4\left[\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\phi + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\psi}\right] + 2\left(\ddot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\phi\right) \right] \delta_j^i + \frac{1}{a^2}\nabla^2[\phi - \psi - 2aH[(a\dot{E}) - B] \\ & - a[(a\dot{E}) - B]] \delta_j^i - \frac{1}{a^2}[\phi - \psi - 2aH[(a\dot{E}) - B] - a[(a\dot{E}) - B]]_{|j}^i, \end{aligned}$$

donde $|_i \equiv \nabla_i$ es la derivada covariante respecto a δ_{ij} .

Ecuación perturbada de Klein-Gordon

Utilizando el tensor de energía-momento dado con anterioridad y la ecuación de conservación de energía (3.1) se obtiene la ecuación de Klein-Gordon o ecuación del campo escalar a primer orden

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = T_{\nu,\mu}^\mu + \Gamma_{\alpha\mu}^\mu T_\nu^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha T_\alpha^\mu = 0,$$

donde los importantes coeficientes de conexión (símbolos de Christoffel) están dados por

$$\Gamma_{\beta\mu}^\gamma = \frac{g^{\alpha\gamma}}{2}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}).$$

Entonces haciendo la sustitución de la métrica perturbada y el tensor de energía-momento perturbado a primer orden en las ecuaciones anteriores obtenemos la ecuación de campo a primer orden

$$\delta\ddot{\Phi} + 3H\delta\dot{\Phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\delta\Phi + V_{,\Phi\Phi}\delta\Phi + 2V_{,\Phi}\phi - \dot{\Phi}_0\dot{\phi} - 3\dot{\Phi}_0\dot{\psi} - \frac{\dot{\Phi}_0}{a}\nabla^2[(a\dot{E}) - B] = 0.$$

4.3.2. Ecuaciones de evolución

La norma Newtoniana se define anulando al shift, $B = 0$, y anulando al potencial anisotrópico, $E = 0$, Mukhanov, Feldman y Brandenberger, ya utilizaron esta norma en trabajos anteriores. [19].

Hay que notar que la norma Newtoniana (también llamada norma longitudinal) es una norma con restricciones, pues la norma se aplica sólo a los modos escalares de las perturbaciones en la métrica; los grados de libertad vectoriales y tensoriales se eliminan desde un inicio. Aquí sólo se toman en cuenta las perturbaciones escalares.

La ventaja de trabajar con esta norma es que el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ es diagonal, y esto permite que los cálculos se simplifiquen. Otra ventaja es que ϕ juega también el papel del potencial gravitacional y por lo tanto podemos tener una interpretación física más sencilla. Es decir, los dos potenciales escalares ϕ y ψ en esta norma son idénticos.

El segundo escalar ψ se requiere cuando el tensor de energía-momento T_{ν}^{μ} contiene a la traza. Como se ve en las ecuaciones de Einstein, esta componente da el término para la ecuación de restricción ($\psi - \phi$). Cuando esta componente se anula ϕ y ψ son idénticos.

Ahora tomando en cuenta que $\delta G_j^i = 8\pi G \delta T_j^i$, en la norma Newtoniana las ecuaciones de Einstein perturbadas a primer orden dan:

$$\begin{aligned}
 -4\pi G \delta \rho &= 3H(\dot{\psi} + H\phi) - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \psi, \\
 4\pi G (\dot{\Phi}_0 \delta \Phi_{,i}) &= (\dot{\psi} + H\phi)_{,i}, \\
 4\pi G \delta p &= \ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + H\dot{\phi} + (2\dot{H} + 3H^2)\phi + \frac{1}{2a^2} \nabla^2 (\phi - \psi) - \frac{1}{2a^2} (\phi - \psi)_{|j}^i, \\
 \psi - \phi &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Donde la ecuación (4.5) generalmente contiene términos de tensión anisotrópica en el lado derecho, en el caso de un campo escalar estas desaparecen, y la perturbación a la curvatura y la función de lapso coinciden,

$$\psi = \phi.$$

Estas ecuaciones nos describen la evolución de las perturbaciones en la métrica. Y debido a las consideraciones anteriores los cálculos se simplifican considerablemente.

Para la ecuación perturbada de Klein-Gordon en la norma Newtoniana se tiene:

$$\delta \ddot{\Phi} + 3H \delta \dot{\Phi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \delta \Phi + V_{,\Phi\Phi} \delta \Phi + 2V_{,\Phi} \phi - \dot{\Phi}_0 \dot{\phi} - 3\dot{\Phi}_0 \dot{\psi} = 0.$$

§4.4 Ecuaciones de evolución en el espacio de Fourier

Para resolver las ecuaciones de evolución se ha vuelto común el trabajar en el espacio de Fourier en lugar del espacio real. La belleza de esta expansión siendo que cada modo de Fourier se propaga de manera independiente.

A primer orden el cambio hacia las componentes de Fourier se hace casi implícitamente. Una perturbación $\delta\Phi$ se relaciona a su componente de Fourier $\delta\Phi_{\mathbf{k}}$ de la siguiente manera

$$\delta\Phi(t, x^i) = \int d^3k \delta\Phi(t, k^i) \exp(ik_i x^i) = \int d^3k \delta\Phi_{\mathbf{k}} \exp(ik_i x^i),$$

donde k^i es el número de onda. De manera análoga el número de onda se define como $k = 2\pi/\lambda$ donde λ se refiere a la escala de longitud de las perturbaciones.

El procedimiento a primer orden para transformar las ecuaciones es de hecho muy sencillo: el único cambio en las ecuaciones es reemplazar $\delta\Phi$ por $\delta\Phi(k^i)$ y el laplaciano por

$$\nabla^2 \longrightarrow -k^2$$

donde $k^2 \equiv k^i k_i$. Además del Laplaciano también tenemos al operador gradiente, que en el espacio de Fourier se traduce en

$$\partial_i \longrightarrow -ik_i.$$

Se tienen entonces todas las herramientas necesarias para reescribir las ecuaciones de evolución a primer orden en términos de sus componentes de Fourier.

Las ecuaciones para el campo escalar perturbado en el espacio de Fourier son entonces:

$$-4\pi G \dot{\Phi}_0 \delta\dot{\Phi}_{\mathbf{k}} = 4\pi G (3H \dot{\Phi}_0 \delta\Phi_{\mathbf{k}} + V_{,\Phi} \delta\Phi_{\mathbf{k}} - \dot{\Phi}_0^2 \phi) + \frac{k^2}{a^2} \psi \quad (4.6)$$

$$\dot{\psi} = 4\pi G \dot{\Phi}_0 \delta\Phi_{\mathbf{k}} - H\phi \quad (4.7)$$

$$H\dot{\phi} = 4\pi G (\dot{\Phi}_0 \delta\dot{\Phi}_{\mathbf{k}} - \dot{\Phi}_0^2 \phi - V_{,\Phi} \delta\Phi_{\mathbf{k}}) - \ddot{\psi} - 3H\dot{\psi} - (2\dot{H} + 3H^2)\phi + \frac{k^2}{2a^2}(\phi - \psi) + \frac{1}{2a^2}(\phi - \psi)_{|j}^i \quad (4.8)$$

Con la ecuación generalizada de Klein-Gordon como:

$$\delta\ddot{\Phi}_{\mathbf{k}} + 3H\delta\dot{\Phi}_{\mathbf{k}} + \left(\frac{k^2}{a^2} + V_{,\Phi\Phi}\right)\delta\Phi_{\mathbf{k}} = -2V_{,\Phi}\phi + \dot{\Phi}_0\dot{\phi} + 3\dot{\Phi}_0\dot{\psi} \quad (4.9)$$

Estas ecuaciones son las que nos describen la evolución de las perturbaciones, (4.6) se refiere a el ingrediente en la densidad de energía, (4.7) a la evolución del potencial gravitacional y finalmente

(4.9) se refiere a las perturbaciones en nuestro campo escalar.

En todas las ecuaciones anteriores de esta sección, las cantidades perturbadas corresponden a la amplitud de la perturbación que se encuentra en el k-ésimo modo (de ahí el subíndice k).

§4.5 Sistema dinámico de las perturbaciones

El objetivo principal de esta sección es estudiar las propiedades cualitativas de nuestro modelo cosmológico utilizando la teoría y técnicas de los sistemas dinámicos. Como se vio anteriormente se asume que la evolución del universo está gobernada por la teoría General de Relatividad de Einstein.

4.5.1. Sistema adimensional

Comenzamos dividiendo la ecuación (4.6) entre H y (4.7-4.9) entre H^2 , así tenemos:

$$\begin{aligned}
 -4\pi G \frac{\dot{\Phi}_0}{H} \frac{\delta\dot{\Phi}_{\mathbf{k}}}{H} &= 4\pi G \left[3H \frac{\dot{\Phi}_0}{H} \frac{\delta\dot{\Phi}_{\mathbf{k}}}{H} + \frac{V_{,\Phi}}{H^2} \delta\dot{\Phi}_{\mathbf{k}} - \left(\frac{\dot{\Phi}_0}{H} \right)^2 \phi \right] + \frac{k^2}{a^2 H^2} \psi \\
 \frac{\dot{\psi}}{H} &= 4\pi G \frac{\dot{\Phi}_0}{H} \delta\dot{\Phi}_{\mathbf{k}} - \phi \\
 \frac{\dot{\phi}}{H} &= 4\pi G \left[\frac{\dot{\Phi}_0}{H} \frac{\delta\dot{\Phi}_{\mathbf{k}}}{H} - \left(\frac{\dot{\Phi}_0}{H} \right)^2 \phi - \frac{V_{,\Phi}}{H^2} \delta\dot{\Phi}_{\mathbf{k}} \right] - \frac{\ddot{\psi}}{H^2} - 3 \frac{\dot{\psi}}{H} - \left(3 + 2 \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \phi + \frac{k^2}{2a^2 H^2} (\phi - \psi) + \frac{1}{2a^2 H^2} (\phi - \psi)_{;j}^i \\
 \frac{\delta\ddot{\Phi}_{\mathbf{k}}}{H^2} + 3 \frac{\delta\dot{\Phi}_{\mathbf{k}}}{H} + \left(\frac{k^2}{a^2} + V_{,\Phi\Phi} \right) \frac{\delta\dot{\Phi}_{\mathbf{k}}}{H^2} &= -2 \frac{V_{,\Phi}}{H^2} \phi + \frac{\dot{\Phi}_0}{H} \frac{\dot{\phi}}{H} + 3 \frac{\dot{\Phi}_0}{H} \frac{\dot{\psi}}{H}
 \end{aligned}$$

Para simplificar nuestro sistema de ecuaciones introducimos las siguientes variables adimensionales;

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{H}}{H^2} &= -\frac{3}{2}\pi, \\
 \frac{\dot{\Phi}_0}{H} &= \frac{\sqrt{6}}{\kappa} x, \\
 \frac{V_{,\Phi}}{H^2} &= -\frac{\sqrt{6}}{\kappa} U, \\
 x_1 &= \psi, \\
 \frac{\dot{\psi}}{H} = x_2 &\implies \frac{\ddot{\psi}}{H^2} = \frac{\dot{x}_2}{H} - \frac{3}{2}\pi x_2, \\
 \kappa \delta\dot{\Phi}_{\mathbf{k}} &= \sqrt{6} z_1,
 \end{aligned}$$

$$\kappa \frac{\delta\Phi_{\mathbf{k}}}{H} = \sqrt{6}z_2 \implies \frac{\delta\Phi_{\mathbf{k}}}{H^2} = \frac{\sqrt{6}}{\kappa} \frac{z_2}{H} - \frac{\sqrt{6}}{\kappa} \frac{3}{2} \pi z_2,$$

$$l_1 = \phi,$$

$$\frac{\dot{\phi}}{H} = l_2,$$

$$s = \frac{c}{H},$$

$$\frac{V_0}{H^2} = 3 \frac{u^2}{\kappa^2} \quad (4.10)$$

donde $\kappa^2 = 4\pi G$ y $\pi = 2x^2 + \gamma z^2$. En este conjunto de nuestras variables debemos notar que la variable s introducida es la que se encarga de evolucionar como el tamaño del horizonte, nos describe la expansión del universo. También notemos que nuestras ecuaciones involucran la expresión k/H (H/k) que va como H^{-1} . Mientras la gravedad sea atractiva tal que $\ddot{a} \leq 0$, sera una funcion decreciente del tiempo. En este caso cada escala se dice *entrar al horizonte* en la epoca $H/k \approx 1$. Antes de entrar al horizonte, cuando $H/k \geq 1$ se dice *fuera del horizonte*, y después dentro del horizonte. El factor H/k es importante en teoría de perturbaciones pues nos diferencia la física que opera en las eras antes y después de entrar al horizonte.

Utilizando las definiciones dadas en (4.10), las ecuaciones de evolución se tranforman hacia un sistema autónomo a uno con respecto a n , con $n = \ln a$, es decir, $\frac{d}{dt} = H \frac{d}{dn}$, donde la 'denota la derivada con respecto al e-folding n .

$$z'_1 = x l_1 - (3x - U) \frac{z_1}{x} - \frac{k^2}{6a^2} \frac{x_1}{x} s^2,$$

$$x'_1 = 6x z_1 - l_1,$$

$$x'_2 = 3x_2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + 6(xz_2 + Uz_1) - 3(2x^2 + 1 - \pi)l_1 - l_2 + \frac{k^2}{2a^2} s^2 (l_1 - x_1) + \frac{1}{2a^2} s^2 (l_1 - x_1)_j^i,$$

$$z'_2 = 3z_2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + 2Ul_1 + x(l_2 + 3x_2) - \left(\frac{k^2}{a^2} + m^2 \right) s^2 z_1$$

Ahora tomando en cuenta la relación $x_1 = l_1$, que se cumple para el campo escalar tenemos

$$z'_1 = x l_1 - (3x - U) \frac{z_1}{x} - \frac{k^2}{6a^2} \frac{l_1}{x} s^2,$$

$$l'_1 = 6x z_1 - l_1 \quad (4.11)$$

$$x'_2 = 3x_2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + 6(xz_2 + Uz_1) - 3(2x^2 + 1 - \pi)l_1 - x_2,$$

$$z'_2 = 3z_2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + 2Ul_1 + 4x_2 x - \left(\frac{k^2}{a^2} + m^2 \right) s^2 z_1$$

4.5.2. Densidad de contraste

La densidad de contraste es un parámetro utilizado en cosmología al hablar de formación de estructura para indicar si existe acumulación local en la densidad de materia.

Se cree que después de inflación aunque el universo era casi uniforme, algunas regiones eran más densas que otras con densidades de contraste muy grandes. Conforme éste se expandió las masas gravitacionalmente conectadas aumentaron hasta que comenzaron a colapsarse, lo que permitió la formación de galaxias, clusters, superclusters, etc...

Es común definir a la densidad de contraste como $\delta = \frac{\delta\rho}{\rho}$, donde:

$$\frac{\rho}{H^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\Phi}_0}{H} \right)^2 + \frac{V_0}{H^2} \quad (4.12)$$

$$\frac{\delta\rho}{H^2} = \frac{\dot{\Phi}_0}{H} \frac{\delta\dot{\Phi}_0}{H} - \left(\frac{\dot{\Phi}_0}{H} \right)^2 \phi + \frac{V_{,\Phi}}{H^2} \delta\Phi \quad (4.13)$$

Tomando en cuenta nuestras variables adimensionales tenemos una expresión para la densidad de contraste

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{2[x(z_2 - xl_1) - Uz_1]}{x^2 + u^2} \quad (4.14)$$

De las ecuaciones anteriores podemos notar que (4.11) es la ecuación dinámica para la perturbación ψ que se encuentra en la métrica y la perturbación en el campo escalar resulta ser el término acarreado.

También se puede ver que debido a esto las variables desconocidas son ψ , $\delta\Phi$ y ρ . Una vez conocidas ψ y $\delta\Phi$, ρ se puede determinar si conocemos las soluciones a las ecuaciones dinámicas de las dos anteriores.

En lo que sigue se integra al sistema, y se investiga si el sistema puede reproducir al Universo observado.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo se analizarán tanto la física como la dinámica de los resultados dados por el sistema. Recordemos que se considera un campo escalar Φ^2 como candidato de materia oscura. La idea principal es que existe un campo escalar fundamental, conforme el Universo se expande, el campo escalar se enfría con el resto de las partículas hasta que se desacopla del resto de la materia. Después de esto, sólo la expansión del Universo será la encargada de enfriar al campo escalar. Después de inflación, fluctuaciones primordiales harán que el campo escalar se colapse y forme halos de galaxias y clusters de galaxias. El enfriamiento del campo escalar continuará hasta que las fluctuaciones se desacoplan de la expansión del Universo.

§5.1 Resultados Numéricos

Primeramente se resolvieron las ecuaciones de evolución de los parámetros del fondo numéricamente, utilizando el método Adams-Bashforth-Moulton (ABM) a cuarto orden [12]-[7]. Se tomaron como condiciones iniciales los mejores parámetros obtenidos durante 5 años de WMAP: $\Omega_{\Lambda}^{(0)} = 0.721$, $\Omega_{DM}^{(0)} = 0.233$, $\Omega_b^{(0)} = 0.0454$, $\Omega_r^{(0)} = 0.0004$, $\Omega_{\nu}^{(0)} = 0.0002$, donde el superíndice 0 se refiere al valor actual de los parámetros de densidad. La Fig.5.1 muestra la evolución numérica de los parámetros de densidad de nuestro modelo. En esta figura podemos notar que al inicio la radiación domina la evolución del Universo. Después viene la época donde la radiación tiene un valor de igualdad con la materia oscura, llamada *época de igualdad*, después la materia oscura comienza a dominar la evolución. La época de recombinación en el modelo de SFDM es en $z \sim 1000$. Finalmente, la constante cosmológica domina la dinámica del Universo.

La figura 5.2 muestra la evolución de los parámetros que involucran únicamente al campo escalar. Se puede apreciar que la materia oscura domina. Una característica importante son las evoluciones tanto de x , que corresponde a la energía cinética, como la de u , que corresponde a la energía potencial, donde podemos notar, como se esperaba, la evolución de ambas se complementan perfectamente para ajustarse así a la evolución del campo escalar cuando se tiene $x^2 + u^2$.

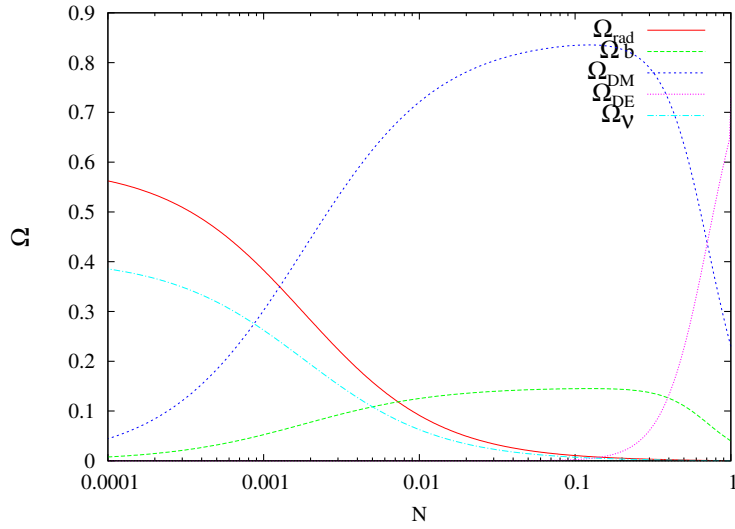


Figura 5.1: Densidades. Se asume que el Universo contiene un campo escalar real Φ como materia oscura, radiación, neutrinos ν , bariones b y constante cosmológica λ como energía oscura.

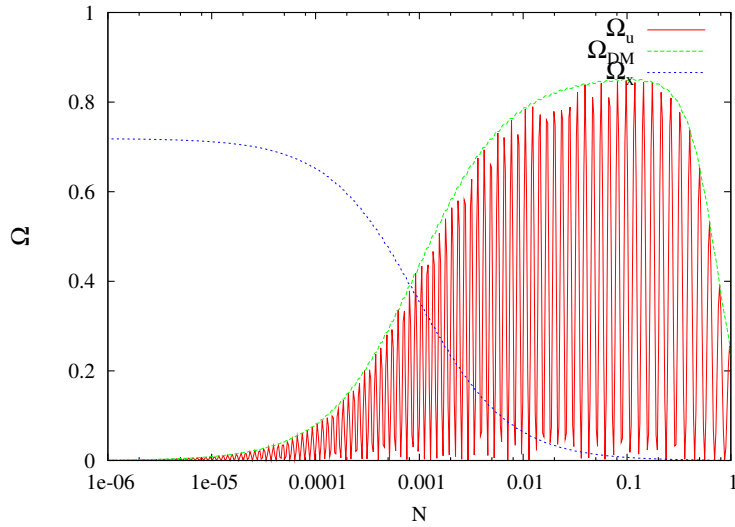


Figura 5.2: Evolución de la energía cinética x y la energía potencial u correspondientes al campo escalar.

Teniendo en cuenta los resultados numéricos anteriores para la evolución de las densidades dentro del Universo de fondo, se puede conocer ahora sí la evolución tanto del campo gravitacional ψ que perturba a la métrica, como las perturbaciones al campo escalar que aparecen en la ecuación de Klein-Gordon (recordemos que éstas dependen de los diferentes valores de fondo Φ_0, V_0 , etc..).

Para hacer esta analisis, recurrimos de nuevo a nuestro sistema de ecuaciones perturbadas que todavia contienen a las unidades para poder hacer nuestras comparaciones con las observaciones de manera más directa. De aqui que a las ecuaciones con unidades las denotaremos por "r".

De las ecuaciones (4.12) y (4.13), y de nuestras variables adimensionales podemos notar que $\rho = \dot{\rho}/\rho_{ocrit}$ y $\delta\rho = \delta\dot{\rho}/\rho_{ocrit}$, donde como sabemos

$$\rho_{ocrit} = 3H_0^2/\kappa = 2,74 \times 10^{11} \frac{M_\odot}{Mpc^3} = 3c^2/\kappa^2 s_0^2,$$

y la distancia de Hubble es: $c/H_0 = s_0 = 2997,925h^{-1}Mpc$. De aqui que $\rho_{crit}/\rho_{ocrit} = s_0^2/s^2 \implies \rho_{crit} = s_0^2 \rho_{ocrit}/s^2$.

Tomando los resultados anteriores en cuenta, podemos obtener una forma analitica para la masa aproximada que puede tener nuestro cluster. Podemos hacer una relación sencilla entre la masa y el tamaño de nuestra fluctuación por medio de $M = \delta\rho V = \delta\rho_{ocrit} V$, donde M significa masa y V el volumen.

Por otro lado sabemos que $V = \frac{4}{3}\pi\lambda^3 = \frac{32}{2}\pi^4 \frac{1}{k^3}$. De aqui que:

$$M = \frac{32}{2}\pi^4 \frac{1}{k^3} * 2[x(z_2 - xl_1) - Uz_1] * \rho_{ocrit}. \quad (5.1)$$

Esta formula analítica para la masa la agregamos dentro de el codigo y nos representa la masa para el tamaño de fluctuacion que estamos analizando, en este caso $k = 1,0hMpc^{-1}$ y se encuentra dada en unidades de M_\odot .

Como condiciones iniciales al potencial gravitacional ψ se toma en cuenta que en la época de materia dominante ($z \sim 1000$) las ecuaciones linearizadas de Einstein se pueden resolver analíticamente para obtener una solución de la forma $\psi \propto t^{8/3}$ lo que implica que $\dot{\psi}$ toma un valor aproximado de cero durante esta época para todos los valores de k, es decir, $\dot{\psi} = 0$. Donde de hecho el resultado numérico concuerda con nuestras suposiciones.

Para las condiciones sobre las perturbaciones del campo escalar la idea razonable fue suponer que durante la época de materia dominante, estas perturbaciones fueran pequeñas comparadas a otras cantidades perturbadas como ψ , de hecho en el código la mejor estimación fue $\psi = 1,0 \times 10^{-4}$.

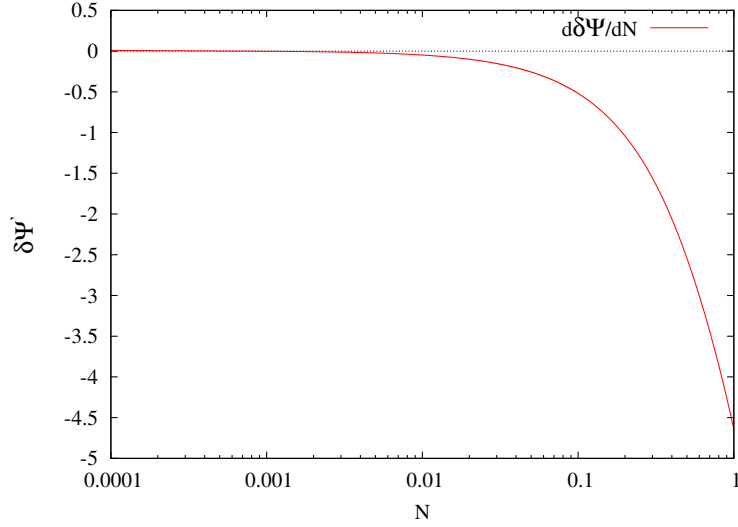


Figura 5.3: Evolución de ψ' desde épocas tempranas hasta $a=1$.

Esto implicaría que inicialmente se puede tratar al campo escalar como homogéneo. De aquí que las condiciones iniciales propuestas fueron $\delta\Phi$ y $\delta\dot{\Phi} = 0$.

En la fig.5.4 se ve como la evolución a la derivada del campo escalar concuerda con la imposición de nuestras condiciones iniciales. Al inicio la derivada es cero como se esperaba, hasta que se llega a la época de recombinación y esta empieza a oscilar de manera rápida teniendo valores tanto positivos como negativos.

Ahora, si queremos estudiar el espectro de potencias a grandes escalas, se debe recordar que esto es válido cuando $0,015hMpc^{-1} < k < 1hMpc^{-1}$. En nuestro sistema como primera aproximación se utilizó $k \approx 1,0hMpc^{-1}$.

Finalmente como se menciona en [18] si se espera que este tipo de campo escalar forme un BEC, se tiene entonces un límite superior para la masa m_Φ del campo escalar, $m_\Phi < 10^{-17}eV$. En nuestro caso se hizo la estimación de una masa de aproximadamente $3 \times 10^{-23}eV$.

Tomando en cuenta todas las consideraciones anteriores para las condiciones iniciales, se integra completamente el sistema dinámico para obtener las evoluciones cosmológicas de ψ y $\delta\Phi$, las cuales se muestran en las figuras 5.5 y 5.6 respectivamente.

Pudimos notar en fig.5.5 que el potencial gravitacional ya tiene un crecimiento para $z \approx 1 \times 10^{-4}$, esto significa que las fluctuaciones sobre tal potencial se relacionan directamente a las fluctuaciones en la masa. Conforme las perturbaciones aumentan, el potencial gravitacional aumenta,

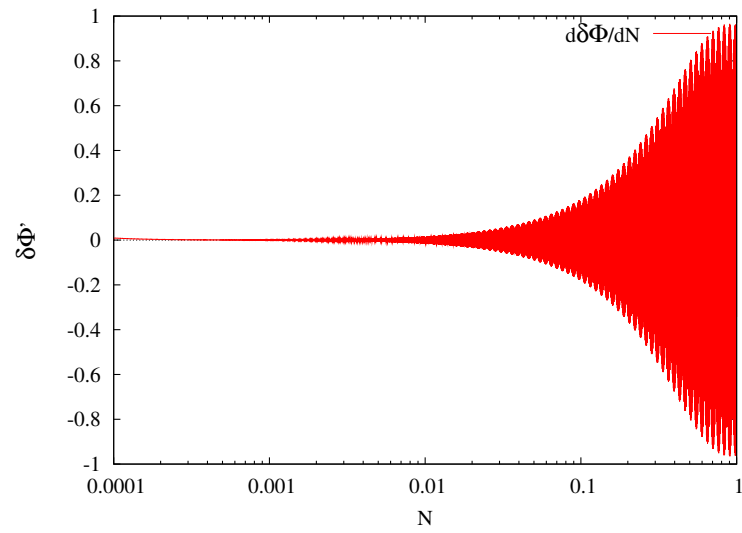


Figura 5.4: Evolucion de la perturbacion $\delta\Phi'$.

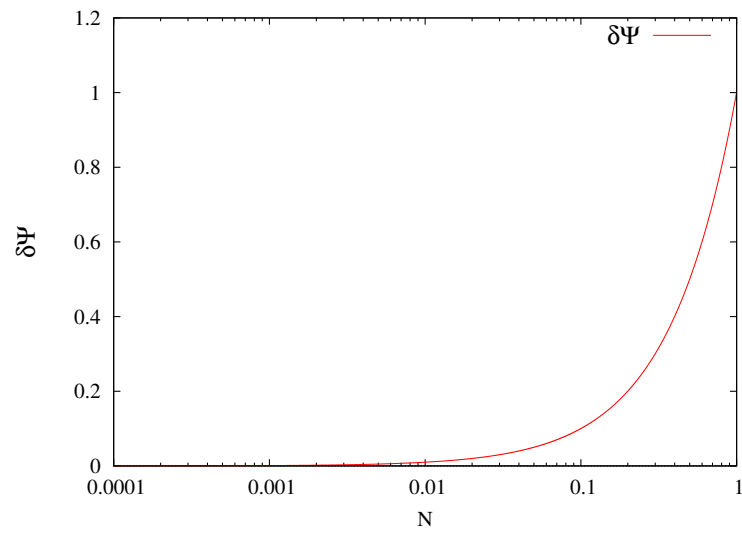


Figura 5.5: Evolución del potencial gravitacional.

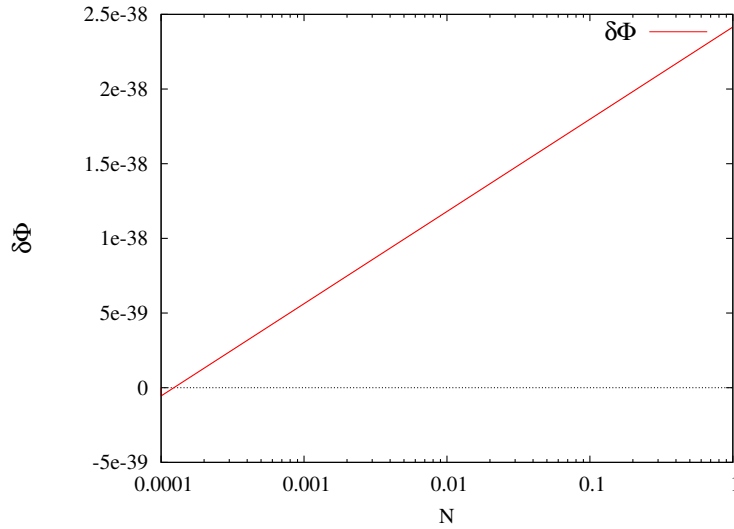


Figura 5.6: Evolución de las perturbaciones sobre el campo escalar.

facilitando así el colapso gravitacional de las diferentes estructuras a grandes escalas.

Para las perturbaciones sobre el campo escalar se puede notar que inicialmente las perturbaciones a $\delta\Phi$ son casi cero. Una vez comienza a dominar, las perturbaciones crecen a escalas pequeñas no mayores a 3×10^{-38} implicando entonces como se mencionó en capítulos anteriores que las perturbaciones al campo escalar Φ se pueden despreciar a primer orden por ser tan pequeñas sin afectar de gran manera la evolución de otras cantidades.

Todas las ecuaciones de las secciones anteriores (tomando en cuenta también las ecuaciones de las perturbaciones) son ecuaciones diferenciales de segundo orden (como se puede apreciar en la sección 4.6.1) que tienen dos soluciones linealmente independientes. Obteniendo una solución general al imponer las condiciones iniciales.

Ahora sí, ya contamos con todos los ingredientes necesarios para poder analizar una de las cantidades principales que se tratan al hablar de formación de estructura. Se analiza con detalle lo que es la densidad de contraste, expresión dada por la ecuación (4.14). Como ya se mencionó esta cantidad es dependiente tanto de el potencial gravitacional ψ como de las perturbaciones sobre el campo escalar $\delta\Phi$, relacionadas con las variables adimensionales x_1 y z_1 respectivamente. En el denominador se puede apreciar la densidad total de materia oscura $x^2 + u^2$ ya vista con anterioridad en la figura (5.2). Los valores de las cantidades del fondo ya se conocen de análisis anteriores, por lo tanto todos los parámetros involucrados en (4.14) ya son todos conocidos.

Recordemos que nuestras ecuaciones de evolución se encuentran en el espacio de Fourier y que

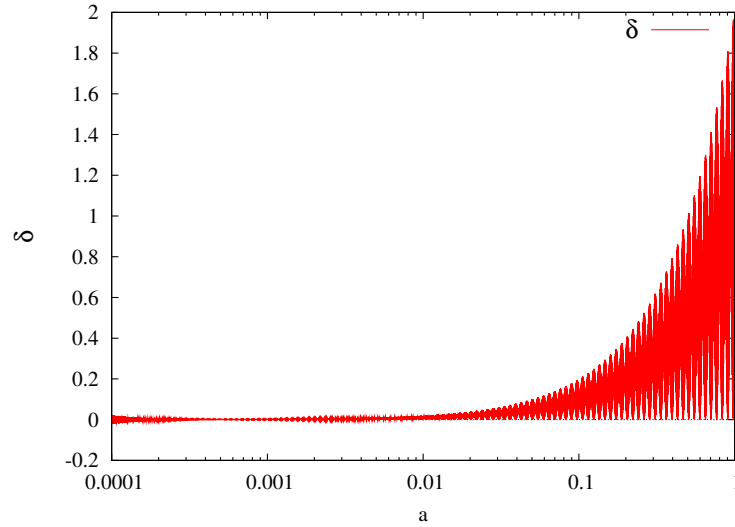


Figura 5.7: Evolución de la densidad de contraste δ para $k = 1,0hMpc^{-1} \implies \lambda = 6h^{-1}Mpc$.

como resultado se pudo obtener un conjunto de ecuaciones separadas para cada modo de Fourier k . Se puede entonces determinar la evolución de cada modo por separado, en este caso se comenzó con $k = 1,0hMpc^{-1}$.

Se toman estos límites en los modos, ya se han mostrado resultados en experimentos; con señales positivas en tales escalas. Estas observaciones muestran que los clusters de galaxias nos dan la primera y mejor evidencia de que existen grandes cantidades de materia oscura en el universo, lo cual fue estudiado en sus inicios por el astrónomo Fritz Zwicky por los años 1929-1969.

En sí los perfiles de densidad, en general nos proporcionan información sobre la distribución de masa, la cual se puede relacionar de manera directa hacia la teoría en la formación de estructura, lo cual es nuestro siguiente objetivo principal.

Nota: Para facilitar la comparación de resultados con otros trabajos, tomamos $h^{-1}Mpc$ como la unidad de distancia. Estas unidades se toman tal que $c = 1$ y $h = 1$. También se normaliza el factor de escala tal que $a = 1$ al día de hoy, esto implica que se relaciona con z (corrimiento al rojo) sólo por $a = (1+z)^{-1}$, con esto se logra que las escalas comovibles y físicas coincidan al día de hoy.

En la figura 5.7 se puede ver que con las condiciones iniciales anteriormente impuestas en nuestro código ocurre un crecimiento rápido dentro de la escala característica para la densidad de contraste. Recientemente las observaciones nos han llevado a pensar que a épocas muy tempranas hacia el origen del universo, ya existían estructuras a gran escala bien formadas, correspondiendo a $z \leq 10$ [10].

Es claro que en fig.5.7 a $z \lesssim 10$ ya existían perturbaciones bien definidas en la densidad de energía, lo cual puede contribuir a la formación temprana de estructura. Entoces si los clusters se pudieron formar tan temprano como estas z , esto implica que el modelo de Φ^2 como materia oscura pudiera dar una explicación para las masas tan características que se observan. De 5.1 podemos notar que para el espectro de potencias M evolucionando en diferentes modos de Fourier, esta tendrá una forma que irá decayendo como $1/k^3$.

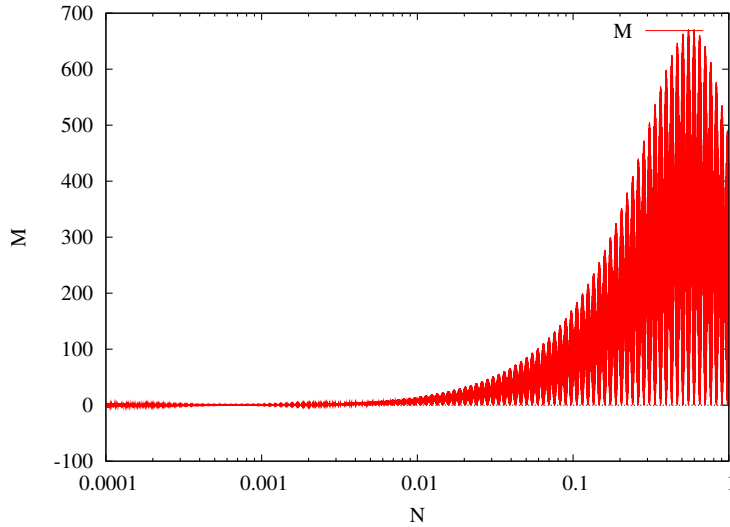


Figura 5.8: Masa obtenida para una perturbación $\lambda = 6h^{-1}Mpc$.

De la fig.5.8 podemos ver que la evolución de la masa de nuestro objeto va en aumento conforme evoluciona a , teniendo un valor máximo de $M = 6,5 \times 10^{13} M_{\odot}$ en $z \approx 2$. Comparando nuestros resultados con los trabajos observacionales que se están llevando a cabo hoy en día (Itziar), para este caso, podemos notar que para $z \leq 10$ tenemos masas con una magnitud de $1 \times 10^{13} M_{\odot}$.

Se obtuvo la densidad de contraste para diferentes números de onda k , en la figura (5.8) se muestra otro de los resultados. De la comparación en la evolución de $k = 1,0hMpc^{-1}$ y $k = 0,9hMpc^{-1}$ se ve que en la teoría lineal, todos los modos de Fourier crecen de la misma manera, lo cual se aplica cuando se tiene un modelo con $\Omega = 1$, lo cual es nuestro caso y era de esperarse.

Uno de los resultados curiosos, el cual no se esperaba, es la fuerte dependencia de δ con el potencial gravitacional ψ (ver fig. 5.10). En ocasiones en las que el potencial gravitacional disminuye su condición inicial, la densidad de contraste parece desarrollar perturbaciones al inicio del espectro, las cuales disminuyen al evolucionar, y reaparecen de nuevo dando lugar al espectro final.

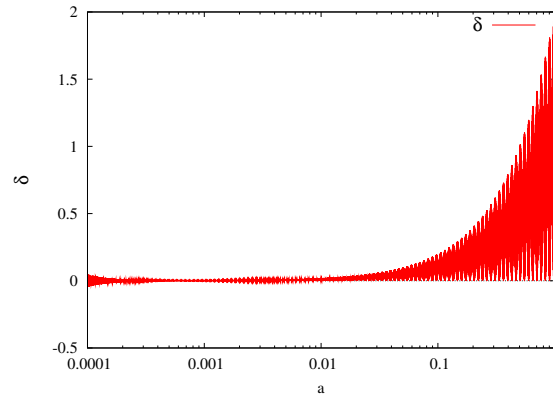


Figura 5.9: Evolución de la densidad de contraste δ para $k = 0,9hMpc^{-1} \implies \lambda = 7h^{-1}Mpc$.

Todavía no sabemos a qué se deben estas fluctuaciones al inicio de nuestro espectro, o qué significan. Una primera razón podría ser la inestabilidad que el código presenta al inicio, como se muestra en el apéndice. Lo curioso a notar, es que se están realizando trabajos analogos a este, de forma independiente, por medio de otro sistema dinámico, y al parecer tales fluctuaciones aparecen cada vez que se introduce al campo escalar como modelo.

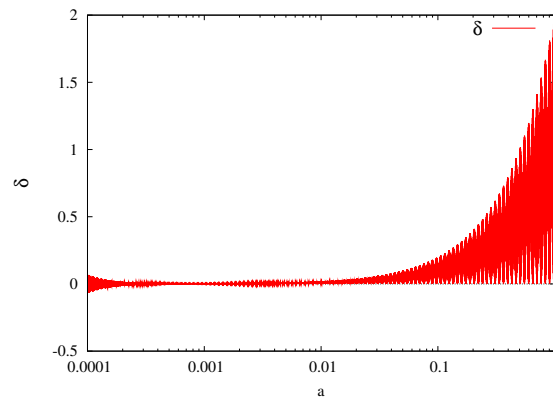


Figura 5.10: Perturbaciones iniciales que aparecen al cambiar las condiciones iniciales sobre el potencial gravitacional.

Otro resultado a notar es el decaimiento que ocurre en la masa después de que esta llega a su valor máximo. De nuevo, no conocemos el porqué de este resultado y sería muy interesante investigar si pueden o no tener consecuencias observacionales a futuro, y si se podría justificar de alguna manera con bases teóricas más sólidas, o es simplemente error de código.

La densidad de contraste δ evoluciona linealmente, excepto en las regiones raras donde ≥ 1 y colapso gravitacional ocurre. Entonces ocurre el colapso de nuestro objeto masivo bajo la influ-

encia de la fuerza gravitacional. Esto se debe a que todas las demas fuerzas fallan en proveer la suficiente presion para poder contra-restar a la gravedad y mantener al objeto en equilibrio. Para analizar estas regiones es necesario introducir ordenes superiores en la teoria de perturbaciones (ordenes no lineales).

En este modelo de SFDM vemos que primero existe la virialización alrededor de $z = 3,8 \times 10^4$, ($a = 2,6 \times 10^{-5}$); es decir antes de recombinación, en seguida del analisis a detalle en nuestra densidad de contraste nos damos cuenta que estas comienzan a tener perturbaciones iniciales significativas alrededor de $z = 10000$, por lo tanto despues de que nuestro objeto se encuentra virializado se comienza a formar estructura que no necesariamente se debe atribuir a colisiones (si este fuese el caso, se trataria ya con perturbaciones no lineales), en el caso de la simulación numérica se aprecia que el ingrediente más influyente en este caso es el potencial gravitacional ψ .

El modelo que se encarga de entender el crecimiento en las perturbaciones aquí encontradas es conocido como modelo de *Colapso Esférico*. Este concidera que la formación de estructura gravitacional en el Universo, se puede describir por medio de la evolución de una región esférica sobredensa, la cual se desacopla de la expansión general del fondo, encuentra un máximo y eventualmente colapsa y se estabiliza.

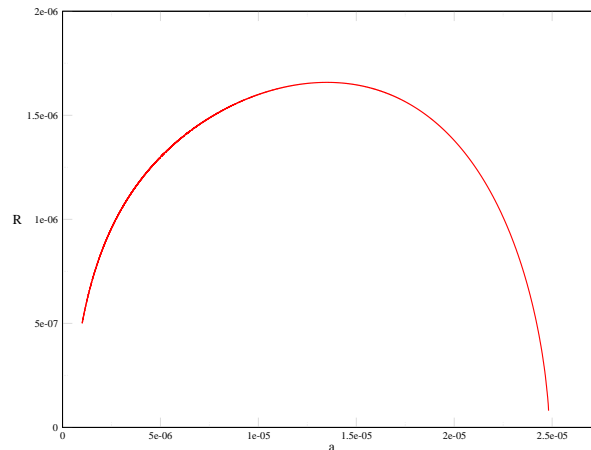


Figura 5.11: Modelo de Colapso esférico.

La figura 5.12 muestra la evolución del radio de una región en el Universo que tiene una sobredensidad con respecto a la densidad del background. Se puede observar que al inicio esta región evoluciona junto con la expansión general del Universo, sin embargo debido a su sobredensidad en algún momento se separa de la evolución del Universo de fondo (como ya se había mencionado), alcanzando un máximo al cual se le conoce como *turn-around*, después de este punto la región empieza a colapsarse y posteriormente se virializará. Se puede observar que el objeto se colapsa

hasta un punto, sin embargo esto no sucede en la realidad, sino que se forma una estructura estable con un radio finito.

Al analizar el valor de delta para la epoca en la que el *turn around* ocurre, vemos que esta tiene una amplitud de alrededor de $\delta = 0,2$ (ver fig. 5.11), el cual es un valor lineal. Este valor es muy pequeño comparado con el valor que arroja CDM, que es de $\delta_{CDM} = 1,68$, este valor pequeño para la delta también sugiere que la formación de estructura ocurre mucho más temprano que en el modelo estandar. Esto significa que las sobredensidades colapsan mucho más rápido. Esta es una predicción de SFDM y BEC. El resultado puede resultar controversial, pero parece que ya existen evidencias de lo anteriormente mencionado.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

§6.1 Conclusiones

Se han investigado las diferentes perturbaciones que actúan sobre nuestro campo escalar Φ^2 y las cuales parecen tener consecuencias importantes en la formación de estructura que se da en nuestro Universo. Se nota que la evolución de nuestros espectros dependen en lo que asumimos para las diferentes componentes de materia en el Universo.

Aquí supusimos un universo plano, al inicio homogéneo compuesto solo por un campo escalar con potencial $\frac{1}{2}m^2\Phi^2$ como materia oscura y sobre el cual actúa de manera indirecta el potencial gravitacional ψ , para el análisis de las perturbaciones a primer orden.

Se pudo ver que una de las principales fuentes en el colapso de materia es el potencial gravitacional ψ pues este evoluciona de manera rápida y cuyas amplitudes en las fluctuaciones son de las más grandes. Esto también se ve a través de las condiciones iniciales, la evolución de las perturbaciones en el campo escalar y en la densidad de contraste varían su valor dependiendo del valor que uno de al inicio para el potencial gravitacional, y de hecho es el único parámetro sobre el cual se ve dependen fuertemente.

Al tomar en cuenta las perturbaciones sobre ψ y Φ^2 se calculó la densidad de contraste δ , para la cual se obtuvieron perturbaciones iniciales alrededor de $a = 1 \times 10^{-4}$, es decir, antes de recombinación. Por lo tanto, si ya existían perturbaciones para esa época uno espera tener estructuras masivas a gran-escala bien formada para épocas al día de hoy, alrededor de $z < 10$.

Si se encontrara por medio de observaciones (Itziar) que ya existían estructuras grandes y bien formadas para estas z , podríamos tener indicios de que nuestro modelo cosmológico de un campo escalar Φ^2 como materia oscura puede ser el correcto, pues predeciría tales hechos.

Una nota importante a tomar en cuenta es que *debemos* recordar que todo los calculos hecho en esta tesis se encuentran a primer orden, y por lo tanto nuestra teoría lineal debe ser válida dentro del regimen lineal, los resultados obtenidos fuera de este régimen deben de ser tomados con mucha cautela y corroborados por cálculos a ordenes superiores y observaciones, es decir, puede ser que tales resultados no sean al 100 % confiables.

Por lo tanto, si la observaciones nos revelaran que no existe estructura de tales dimensiones como las mencionadas aqui, es decir, no existe formación de estructura para antes de recombinación, entonces nuestro modelo cosmologico seria desechado debido a inconsistencias con tales observaciones.

En este trabajo se ha visto que los límites cosmológicos dependen del modelo con el que se este trabajando y por lo tanto se basan en lo que uno asume como modelo teórico, aun si se esta en acuerdo con datos observacionales actuales, se necesitan muchos más ingredientes para poder explicar los misterios e inconsistencias tales como la materia oscura.

§6.2 Perspectivas

- Se pretende seguir con el analisis de la formación de estructura a gran-escala a ordenes superirores y agregando una constante cosmologica a las ecuaciones dinámicas
- En los resultados aqui obtenidos para las diferentes perturbaciones pudimos notar que algunas tienen amplitudes muy pequeñas, las cuales podrian ser estudiadas más a fondo por medio de teoria cuántica, para ver si se puede extraer más informacion que pudiera ser trascendente.
- También se pretende estudiar la transición de fase que ocurre al momento de la condensación del objeto masivo para formar estructura de manera relativista. Para esto se necesitaran estudiar más a fondo temas como hidrodinámica, fenomenos de transporte, termodinámica, etc...

HERRAMIENTAS NECESARIAS

§A.1 Valores Numéricos Útiles

A.1.1. Constantes Físicas

Velocidad de la luz en el vacío $c \equiv 2,99792458 \times 10^{10} \text{cm seg}^{-1}$

Constante de Planck $h = 6,626069 \times 10^{-27} \text{erg-seg}$

Constante de Planck reducida $\hbar = h/2\pi = 1,05457168 \times 10^{-27} \text{erg seg} = 6,582119115 \times 10^{-22} \text{MeV seg}$

Constante gravitacional $G = 6,6742 \times 10^{-8} \text{dyn cm}^2 \text{g}^{-2}$

A.1.2. Constantes Astronómicas

Masa solar $M_{\odot} = 1,9891 \times 10^{33} \text{g}$

Para una constante de Hubble $H_0 = h \times 100 \text{km seg}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$:

Tiempo de Hubble $H_0^{-1} = 3,0857 h^{-1} \times 10^{17} \text{seg} = 9,778 h^{-1} \times 10^9 \text{años}$

Distancia de Hubble $c/H_0 = 2997,92458 h^{-1} \text{Mpc}$

Densidad crítica $\rho_{crit} = 1,878 h^2 \times 10^{-29} \text{g cm}^{-3}$

§A.2 Relatividad General

El propósito de este apéndice es proveer nociones esenciales para el lector no familiarizado con relatividad general y teoría lineal de perturbaciones.

A.2.1. El Principio de Equivalencia

La Relatividad General se basa en lo que es conocido como el *Principio de Equivalencia de Gravitación e Inercia*, o el *Principio de Equivalencia* para mas corto. El Principio de Equivalencia es una generalización de la observación, de que debido a la igualdad entre masa gravitacional y

masa inercial, de observadores cayendo libremente, y los cuales no sienten los efectos de la gravitación. De acuerdo al Principio de Equivalencia, en cualquier punto del espacio-tiempo en un campo gravitacional arbitrario existe sistema coordenado *localmente inercial* en donde los efectos de la gravitación esten ausentes en una region suficientemente pequeña del espacio-tiempo en las vecindades de este punto. Este principio nos permite escribir las ecuaciones que gobiernan a cualquier sistema físico dentro de un campo gravitacional, si conocemos las ecuaciones que lo gobiernan en la ausencia de gravitación: solo es necesario escribir las ecuaciones de manera que estas sean covariantes, es decir, que su forma sea independiente de las coordenadas del espacio-tiempo. Tales ecuaciones serán ciertas en presencia de un campo gravitacional, pues la covariancia garantiza que sean ciertas en cualquier sistema de referencia, por lo tanto el Principio de Equivalencia nos dice que *existe* un conjunto coordenado en donde estas ecuaciones se cumplen- el conjunto coordenado que es localmente inercial en la locación del espacio-tiempo del sistema en cuestión.

A.2.2. Principio de Copérnico

En cosmología, el Principio de Copérnico menciona que *la tierra no se encuentra en una posición espacialmente privilegiada*. El principio se puede generalizar a decir que los humanos no somos observadores privilegiados en el Universo.

A.2.3. Tensor de Ricci

El tensor de Ricci es un tensor simétrico de orden 2, que solo depende del tensor métrico:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\gamma\rho}^{\rho} \Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}^{\rho} \Gamma_{\mu\rho}^{\gamma}$$

donde el escalar de Ricci se define como $R \equiv R_{\mu}^{\mu}$ y las Γ son los coeficientes de conexión o símbolos de Christoffel.

A.2.4. Variables Perturbadas de la Métrica

Aquí damos el tensor métrico linealmente perturbado alrededor de un fondo de FLRW, el cual se introdujo desde el capítulo 2.

El tensor métrico contravariante tiene la forma:

$$\begin{aligned} g^{00} &= -a^{-2}(1 - 2\phi), \\ g^{0i} &= a^{-2}B,^i, \\ g^{ij} &= a^{-2}[(1 + 2\psi)\delta^{ij} - 2E,^{ij}]. \end{aligned}$$

§A.3 La Cosmología

A.3.1. Escalas

El Universo a escalas cosmológicas-temporales (Giga). Recordemos que $1Gy=1000\ 000\ 000y$ =billones de años.

- Edad de las galaxias elípticas locales $\approx 10Gy$
- Edad del universo desde el Big Bang $\implies t_0 = 14Gy$ al día de hoy .
- Origen del CMB $\implies 400,000y = 0,0004Gy$.
- Big Bang $t=0$.

A.3.2. Analisis Numérico

Nuestro sistema dinámico es capaz de calcular el porcentaje de error sobre el cual trabaja el código, este se presenta en la siguiente gráfica:

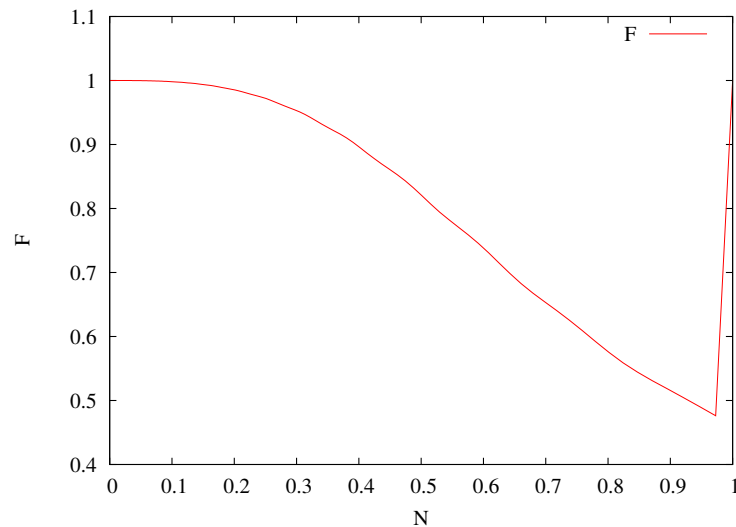


Figura A.1: Porcentaje de error en el código.

En la figura B.1 se puede notar que al inicio de la corrida el código contiene hasta un 47% de error numérico aproximadamente, este error va disminuyendo conforme el código evoluciona hasta llegar al valor de 1 el cual implica que este se estabiliza por completo, es decir, el error numérico disminuye.

Bibliografía

- [1] Bertschinger, *Cosmology and Large-Scale Structure* , Elsevier: Amsterdam, 1996.
- [2] Peebles P. J. E, *Physical Cosmology*, Princeton University Press, 1970.
- [3] Peebles P. J. E, *The Large-Scale Structure of the Universe* , Princeton University Press, 1980.
- [4] Scott Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press, 2003.
- [5] J. M. Bardeen, Phys. Rev. D, 20, 1882 (1980).
- [6] James G. Bartlett, The standard cosmological model and CMB anisotropies, astro-ph/9903260 (1999).
- [7] Bhaskara Murthy V. S., Math. Ed., 18, 77-80 (1984).
- [8] Carroll S. M., Press W. H. and Turner E. L., Ann. Rev. Astron. Astrophys., 30, 499 (1992).
- [9] M. Colless, astro-ph/9804079.
- [10] S. Dye et al., The SCUBA Half Degree Extragalactic Survey (SHADES)-VII. Optical/IR photometry and stellar masses of submillimeter galaxies, Mon. Not. R. Astron. Soc., 000, 1-23 (2008).
- [11] Einstein A., "Zur allgemeinen Relativitätstheorie ", Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 44, 778 (1915).
- [12] Simeon Ola et al., New Predictor Corrector Formulas for Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, International Journal of Computer Mathematics, vol.26, pp.247 (1989).
- [13] Ferreira P. and Joyce M., Cosmology with a primordial scaling field, Phys. Rev. D, 58, 023503 (1998).
- [14] G. Hinshaw et al., Five-Year WMAP observations, Astrophysical Journal Supplement Series.
- [15] Lee J. W., Koh I. G., 1996, Phys. Rev. D53, 2236.

- [16] Madsen J., Phys. Rev. Lett., 69, 571 (1992).
- [17] Tonatiuh Matos and L. Arturo Ureña-Lopez, Further analysis of a cosmological model with quintessence and scalar dark matter, Class. Phys. Rev. D, 63, 063506 (2001).
- [18] Matos T., Vázquez J. A. y Magaña J., Φ^2 as Dark Matter, arXiv:08.06.0683v1 (2008).
- [19] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman and R. H. Brandenberger, Phys. Rep., 215, 203 (1992).
- [20] N. J. Nunes and D. F. Mota, Structure Formation in Inhomogeneous Dark Energy Models, Mon. Not. R. Astron. Society, 000 (mayo 2006)
- [21] J. P. Ostriker and P. J. Steinhardt, Nature(London), 377, 600 (1995).
- [22] Peebles P. J. E. and Vilenkin A., Phys. Rev. D, 60, 103506 (1999).
- [23] Press W. H., Ryden B. S. and Spergel D. N., Phys. Rev. Lett., 64, 1084 (1990).
- [24] V. Sahni and L. Wang, Phys. Rev. D, 62, 103517 (2000).
- [25] Schmidt et al., The High-Z Supernova Search:Measuring cosmic deceleration and global curvature of the Universe using Type Ia Supernova e, ApJ, 507,46 (1998).
- [26] Shou-hua Zhu, Spontaneous electro-weak symmetry breaking and cold dark matter, hep-ph/0601224 (2006).
- [27] G. F. Smoot et al., Structure in the COBE first year maps, Astrophysical Journal Letters (1992).
- [28] Spergel D. N., et al., ApJ Suppl, 148, 175 (2003).
- [29] J. Stewart, Class. Quantum Grav., 7, 1169 (1990).
- [30] M. Tegmark et al. (SDSS), Phys. Rev. D 69, 103501 (2004).
- [31] C. Wetterich, Astron. Astrophys., 301, 321 (1995).