

Índice general

1. Introducción	4
2. Modelo de branas.	8
2.1. Cosmología de branas.	8
2.2. La gravedad n-dimensional.	9
2.3. Curvatura extrínseca.	11
2.4. Dinámica de las branas.	13
2.5. Energía del vacío	15
2.5.1. La discrepancia entre la teoría de partículas y las observaciones.	16
3. El modelo.	18
3.1. Branas esféricas.	18
3.2. Regímenes sobre las branas y dinámica.	23
3.2.1. Antes de la inflación y de la colisión.	23
3.2.2. Antes y durante el proceso de colisión $\rho, \rho_M \gg \lambda$ y después de la colisión $\rho, \rho_M \ll \lambda$	25
3.2.3. Dinámica de la brana 1.	29
3.2.4. Dinámica de la brana 2.	31

4. Caso general.	34
4.1. Geometría esférica, hiperbólica y plana.	34
4.2. El régimen $\rho, \rho_M \ll \lambda$ para los tres tipos de geometrías	36
4.2.1. Dinámica de la brana 1 (Geometría esférica, hiperbólica y plana).	36
4.2.2. Dinámica de la brana 2 (Geometría esférica, hiperbólica y plana).	38
5. Modelo Alternativo.	41
5.1. Modelo alternativo	41
6. Resultados y Conclusiones	45

Índice de figuras

1-1. Las diferentes componentes de nuestro universo son: bariones, leptones, neutrinos, radiación, energía oscura y materia oscura.	5
2-1. Nuestro universo puede ser uno de los muchos que podrían existir dentro de un cosmos N-dimensional.	10
3-1. Las masas de las branas son M_1 y M_2 respectivamente y existen constantes cosmológicas $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ para cada región entre brana y brana.	19
3-2. Gráfica <i>a vs t</i> . Brana con curvatura $k = 1$	31
4-1. Gráfica <i>a vs t</i> . De abajo para arriba universos con geometrías esférica, plana e hiperbólica	38
4-2. Diferentes historias de expansión, para diferentes valores de Ω_{mat} y Ω_Λ . et al Carroll S. [4]	39
6-1. Gráfica de las densidades críticas. $\Omega_{MO} = 0.23$ (Rojo), $\Omega_B = 0.04$ (Verde), $\Omega_{rad} = 10^{-4}$ (Amarillo), $\Omega_{EO} = 0.73$ (Azul). $N = \ln(a)$	48

Capítulo 1

Introducción

La cosmología del segundo tercio del siglo XX, fue regida principalmente por la métrica de Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW), cuyas predicciones teóricas nos dieron una idea más general del comportamiento del cosmos.

No fue sino hasta la última parte del siglo XX cuando dos equipos pertenecientes al Laboratorio Nacional de Lawrence y el equipo de búsqueda de supernovas High-z quienes sugirieron que el universo no solo se estaba expandiendo, sino que además lo estaba haciendo aceleradamente. El experimento consistió en observar las supernovas del tipo Ia y obtener el comportamiento del parámetro de Hubble¹. De manera sorprendente se obtuvo la conclusión de que el parámetro de Hubble variaba con el tiempo, lo que indica que existe algún tipo de energía desconocida llamada energía oscura, la cual está acelerando nuestro universo.

Como se verá más adelante, la existencia de esta energía oscura es necesaria para conciliar los datos actuales acerca de la geometría del espacio-tiempo y de la suma total de componentes de nuestro universo.

Mediciones actuales del fondo cósmico realizadas con satélites [9], establecen que la geometría del universo es aproximadamente plana. Por lo que según el modelo de FLRW lleva a concluir

¹Es común llamarle constante a H aunque en realidad ésta no lo sea. Puesto que H viene definido como $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{c^2 a(t)}$, donde $a(t)$ es el factor de escala.

que $\Omega \approx 1$. Observaciones posteriores de la radiación de fondo y de la proporción de elementos formados en la gran explosión han limitado la cantidad de materia bariónica y materia oscura que puede existir en el universo. Este número es alrededor del 30 % del constituyente total del mismo, lo que hace pensar que la así llamada energía oscura debería representar el 70 % de lo que compone nuestro universo. Datos más precisos indican que el 73 % lo compone la energía oscura, 23 % la materia oscura y 4 % la materia bariónica (Véase figura 1-1).

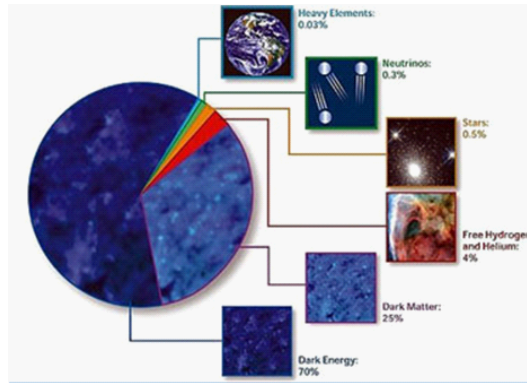


Figura 1-1: Las diferentes componentes de nuestro universo son: bariones, leptones, neutrinos, radiación, energía oscura y materia oscura.

La naturaleza exacta de la energía oscura continúa siendo mera especulación, lo que se sabe, es que interactúa gravitacionalmente pero no con los demás campos, es muy homogénea y tiene una densidad del orden de $10^{-29} \frac{g}{cm^3}$. Se sobrentiende que sería muy complicado obtener datos experimentales para densidades de esos órdenes con la tecnología actual. Sin embargo, se pueden buscar soluciones teóricas al problema de la expansión acelerada. Algunas de las soluciones actuales a los problemas de la energía oscura, son los siguientes:

Constante cosmológica.

La constante cosmológica, es un término agregado a la ecuación de campo de Einstein, y viene simplemente del hecho de que un volumen del espacio contiene un tipo de energía fundamental que produce esta aceleración de la expansión cósmica. Por tanto, la forma de las ecuaciones de campo vienen corregidas como se muestra en la siguiente ecuación:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

el término Λ , es conocido como **energía del vacío** pues su densidad de energía es la misma que la del vacío. En efecto, sabemos que existen fluctuaciones del vacío las cuales parecen corresponder a este tipo de energía. Los datos cosmológicos actuales predicen una densidad del orden de 10^{-120} en unidades de Planck.

Uno de los problemas fundamentales con respecto a este modelo es que muchas teorías cuánticas de campo predicen una constante cosmológica a partir de la energía del vacío cuántico, superior a 120 órdenes de magnitud; lo cual no corresponde con los datos obtenidos por los cosmólogos. De la misma manera, surge un problema con teorías supersimétricas, las cuales necesitan una constante cosmológica que sea igual a cero. Actualmente, la comunidad científica actúa de tal manera que se realiza un ajuste fino a las teorías hasta que se cuente con una teoría más fundamental que de respuestas sin necesidad de un ajuste fino [20].

Otro problema que se suscita al introducir la constante cosmológica es que en el modelo estándar aparecen soluciones con discontinuidades, las cuales contienen una baja densidad de materia. Estas discontinuidades afectan el signo de la energía del vacío, cambiando la actual presión negativa a presión atractiva. Esto se reflejaría como un problema en el modelo estándar al momento de introducir una constante cosmológica.

Quintaesencia.

En el campo de la física, la quintaesencia es una forma hipotética de energía oscura y es una propuesta alterna a la constante cosmológica. Quintaesencia es un campo escalar cuya ecuación de estado viene de la forma: $p_q = w\rho_q$, donde w tiene un valor menor a $-\frac{1}{3}$, además de que tiene la característica de ser un campo dinámico, y que su ecuación de estado varía en el espacio y en el tiempo. Muchos modelos de quintaesencia tienen un comportamiento tal que resuelven el problema de la constante cosmológica. En estos modelos, el campo de quintaesencia tiene una densidad que es bastante cercana a la densidad de radiación, lo cual lleva a pensar que quintaesencia tiene un comportamiento muy parecido a la energía oscura en sus inicios.

Algunos de los casos especiales de quintaesencia es la energía fantasma, en la cual $w < -1$, y k-esencia, la cual no tiene una forma estándar de la energía cinética.

Actualmente no existe evidencia alguna de quintaesencia; sin embargo no se descarta aún ya que se piensa que la mejor manera de encontrar prueba de la quintaesencia, radica en variaciones en el principio de equivalencia o en variaciones de las constantes fundamentales en el espacio o en el tiempo, las cuales se encuentran en las ecuaciones de campo de Einstein.

Modelos Alternativos.

Los modelos de quintaesencia y constante cosmológica, son los más utilizados para la explicación de la energía oscura, sin embargo existen algunos otros modelos alternativos como teoría de cuerdas, cosmología de branas y el principio holográfico. Cada uno de ellos está siendo probado exhaustivamente de manera que modele la forma precisa en la que nuestro universo se comporta.

En esta tesis, nos enfocaremos al modelo de **branas** y se buscará dar una posible explicación al problema de la constante cosmológica y a la expansión acelerada del universo. El nombre de Brana, viene de la parte final de la palabra membrana. La membrana o brana no es más que una estructura n-dimensional con una topología dada. La idea de que nuestro universo sea una brana [16] y que pueda interactuar con otras branas todo sucediendo en un universo n-dimensional llamado también espacio de fondo o "bulto", nos da la posibilidad de generar toda clase de ideas para tratar el problema de la expansión acelerada del universo.

Aunque las diferentes teorías que se han mencionado a lo largo de esta tesis son tan importantes como el modelo branas, la tesis se enfocará en esta última, debido a que ésta nos puede reproducir la solución de FLRW y ampliar el concepto del comportamiento del universo y resolver problemas como el de la constante cosmológica [16].

Capítulo 2

Modelo de branas.

2.1. Cosmología de branas.

El primer concepto de dimensiones extras surgió en el año 1921 en que los físicos Kaluza y Klein propusieron una quinta dimensión con el fin de hacer una teoría unificada de los campos gravitacionales y electromagnéticos. Las ecuaciones resultantes propuestas por Kaluza-Klein pueden ser separadas en un conjunto de ecuaciones, las cuales una de ellas contiene las ecuaciones de Einstein y otro conjunto equivalente contiene las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético y en la parte final un campo escalar.

Pese a que esta nueva teoría era impresionante, la idea propuesta por Kaluza y Klein fue dejada de lado debido a que la mecánica cuántica daba una idea más precisa de la forma fundamental del campo electromagnético [13]. No fue sino hasta la última década del siglo XX cuando volvió a surgir la idea de dimensiones extras con el advenimiento de la teoría de cuerdas. Esta necesidad de dimensiones extras, era necesaria para poder tener un marco matemático sólido y así formar una teoría capaz de unificar las fuerzas fundamentales de la naturaleza.

La teoría de cuerdas propone dimensiones extras enrolladas dentro de formas topológicas diversas (espacios de Calabi- Yau) [9] y cuya longitud posiblemente debería ser del orden de la longitud de Planck¹. La idea fundamental de las branas fue pensar, si las dimensiones extras

¹La longitud de Planck viene como: $L_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,616 \times 10^{-33} \text{ cm}$.

podrían adquirir un mayor tamaño (del tamaño del Universo por ejemplo) y no ser tan pequeñas como la Teoría de Cuerdas lo afirma².

Uno de los artículos fundamentales que dieron apertura a un nuevo punto de vista acerca de las branas fueron los escritos por los físicos L. Randall y R. Sundrum [16]. En dichos artículos se propone una solución al problema de la jerarquía; teniendo en cuenta que el universo puede ser afectado por las interacciones gravitacionales de una brana distanciada de la nuestra, mediante una quinta dimensión.

Como se mencionó anteriormente, las branas son un modelo que busca dar explicación al comportamiento de nuestro universo y trata de asociarle propiedades físicas a la brana, de tal manera que las haga corresponder con las actuales observaciones.

Puesto que en esta tesis se realizará un modelo cosmológico con branas, es necesario tomar en cuenta que si únicamente se pone una brana, es posible que no se recupere la gravedad 4-dimensional; para recuperar la gravedad en cuatro dimensiones, es necesario introducir una brana extra y una constante cosmológica negativa dentro del bulto por lo que [10], según L. Randall y L. Sundrum, [16] la quinta dimensión será un espacio de Anti de Sitter compacto con branas planas. Aquí se supondría que una de las branas sería nuestro universo y la otra una brana que no se ha detectado.

2.2. La gravedad n-dimensional.

La idea de esta sección es mostrar la generalización de la gravedad 4-dimensional de Einstein a una gravedad n-dimensional necesaria para trabajar con la Teoría de Branas.

Según Einstein, la gravedad no es más que una propiedad geométrica del espacio-tiempo cuya expresión matemática para una topología N-dimensional vendría dada de la forma: $M_4 \times T^N$ donde M^4 es una variedad 4-diferenciable y T^N una variedad n-diferencial y cuya signatura puede ser escrita de la forma $(-, +, +, +, \dots)$. En efecto, la acción de una gravedad de dimensiones extras puede ser escrita como:

²Al momento en que se está escribiendo la presente tesis, no existe evidencia alguna de dimensiones extras.

$$S_{Grav} = -\frac{1}{16\pi G_N} \int d^{4+N}x \sqrt{g_{4+N}} R_{4+N}, \quad (2.1)$$

donde G_N es un acoplamiento gravitacional³ en (4+N)D.

Si se integra sobre el vector y^a para una métrica escrita de la siguiente forma:

$$G_{ab} = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \delta_{ab} dy^a dy^b, \quad (2.2)$$

se tiene que:

$$S_{Grav} = -\frac{V_N}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{g_4} R_4, \quad (2.3)$$

donde V_N es el volumen de las dimensiones extras (μ, ν corren de 1 a 4 y a,b corren de 1 hasta N).

En efecto se puede definir a la constante gravitacional de Newton de la forma $G_{Newton} = \frac{G_N}{V_N}$ donde por supuesto se observa que si $V_N \rightarrow \infty$, $G_{Newton} \rightarrow 0$.

Si se analizan los resultados anteriores se puede llegar a pensar, que la constante de gravitación de Newton observada en nuestro espacio-tiempo 4-dimensional tiene un valor pequeño a causa de que el volumen del espacio de fondo es muy grande (Véase figura 2-1).

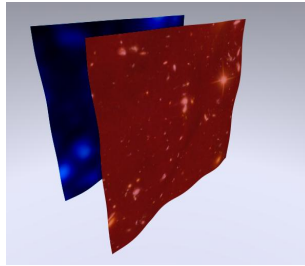


Figura 2-1: Nuestro universo puede ser uno de los muchos que podrían existir dentro de un cosmos N-dimensional.

³Normalmente G_N no corresponde con la constante gravitacional de Newton conocida.

Para el fin de esta tesis, es necesario introducir la forma en que se escribe la masa de Planck en términos de cantidades fundamentales para un espacio (4+N)D:

$$M_N c^2 = \left[\frac{\hbar^{1+N} c^{5+N}}{8\pi G_N} \right]^{\frac{1}{2+N}} \quad \text{ó} \quad M_P^2 = M_N^{2+N} V_N, \quad (2.4)$$

de la ecuación (2.4) se construye una masa de Planck para espacios de cuatro dimensiones de la forma:

$$M_P c^2 = \left[\frac{\hbar c^5}{8\pi G_{Newton}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.5)$$

Es importante mencionar que el modelo mostrado anteriormente se le conoce como modelo de Arkani, Hammal, Dvali (AHD).

Según datos actuales [11], si tomamos $M_N \gtrsim 1TeV$; es decir, tomamos un volumen tan grande de tal manera que la escala fundamental sea comparable con escalas electrodébiles, lo siguiente puede suceder:

- 1) $M_N = 1TeV$, se puede tener dimensiones con $N \geq 3$.
- 2) $N = 1$, no está permitido debido a observaciones del sistema solar. [11]
- 3) $N = 3$, está un orden de magnitud por arriba de la cota experimental de gravedad a corta distancia.
- 4) $R \leq 44\mu m$ cualquier número de dimensiones es posible [11].

Para el objetivo de esta tesis se puede hacer uso de la conjetura cuatro y suponer que se pueden encontrar branas de cualquier tipo de dimensiones con una separación entre brana y brana del orden de $R \leq 44\mu m$.

2.3. Curvatura extrínseca.

Para poder trabajar con Teoría de Branas, es necesario conocer las propiedades y el significado de la curvatura extrínseca. Es por ello que en esta sección se hará uso del formalismo ADM,

el cual establece el significado de curvatura extrínseca sobre un espacio inmerso; así como, su estructura matemática [14].

El formalismo ADM consiste en ver el problema, como una estructura de Cauchy; es decir, analizar la dinámica como la evolución de una hipersuperficie donde estén definidos los campos⁴. Este formalismo fué desarrollado por R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner, fué completada alrededor de los años 60 y se conoce como formulación ADM de la Relatividad General.

En efecto considérese un espacio-tiempo dado por una variedad N-dimensional \mathbf{M} con una métrica definida en ella $g_{\mu\nu}$ de signatura $(-, +, +, +, \dots)$. Se denotan las coordenadas de esta variedad por x^λ . Se define el encajamiento de una hipersupecie (N-1)- dimensional \mathbf{m} de la siguiente manera:

$$x^\mu = X^\mu(\xi^a), \quad (2.6)$$

donde $\mu = 0\dots N$, $a = 0\dots(N - 1)$. De donde se puede ver que

$$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b}, \quad (2.7)$$

y se define $\mathbf{u}_a \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^a}$ como el a-ésimo vector de la base coordenada natural sobre \mathbf{m} . Los N-1 vectores \mathbf{u}_a forman una base para el espacio tangente a la variedad \mathbf{m} en el punto p denotado por $T_P m$. Este espacio a su vez es un subespacio del espacio tangente a \mathbf{M} , $T_P M$. Para completar la base construimos el complemento ortogonal al $T_P m$ definido por la métrica $g_{\mu\nu}$. Este subespacio será generado por el vector a los \mathbf{u}_a , que se denotará por \mathbf{n} . Este vector de componentes η^μ en la base ∂_μ satisface.

$$g_{\mu\nu} X_a^\mu \eta^\nu = 0, \quad (2.8)$$

siendo $X_a^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a}$, se pide además que esté normalizado

⁴La hipersuperficie puede ser generalizada a cualquier número de dimensiones.

$$g_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu = -1, \quad (2.9)$$

estas condiciones determinan totalmente el vector \mathbf{n} . Con lo anterior se puede ver la expresión para la curvatura extrínseca de la hipersuperficie como:

$$K_{ab} \equiv -\mathbf{u}_b \cdot \nabla_a \mathbf{n}, \quad (2.10)$$

es decir, la componente (ab) de la curvatura extrínseca es igual a la proyección en la dirección b de la derivada covariante del vector normal en la dirección a (salvo signo). La noción de curvatura extrínseca no tiene sentido para una variedad en sí misma, solo toma significado cuando dicha variedad se encuentra encajada en una dimensión mayor, ya que de la misma definición, la curvatura K_{ab} depende de la geometría de la variedad grande a través de la derivada covariante del espacio-tiempo y del vector normal a la hipersuperficie.

Una interpretación geométrica de la curvatura extrínseca es que da la medida, de que tanto se "curva" la hipersuperficie respecto a la variedad \mathbf{M} ; en otra palabras, dice que tanto los vectores normales para dos puntos cercanos en \mathbf{m} se alejan de ser paralelos.

2.4. Dinámica de las branas.

En este punto, se analiza la dinámica de las branas mediante la integral de acción y se escribirá la forma matemática de la misma [7].

Generalizando la acción de Einstein-Hilbert a una estructura matemática en n -dimensiones se tendrá:

$$S = \int_M d^N Y \sqrt{-g^{(N)}} \left(\frac{1}{2k} R^{(N)} + \mathcal{L}_m \right) + \int_b d^4 x \sqrt{-g^{(4)}} \left(\frac{1}{2k'} R^{(4)} + L_m \right), \quad (2.11)$$

donde $k = M_{(N)}^{2-N}$, $k' = M_{(4)}^{-2}$.

Cabe mencionar, que el segundo término de la suma en la ecuación (2.11) corresponde al modelo conocido como DGP.

La integración 4-Dimensional es sobre la brana $y^A = y^A(x)$ y la métrica inducida sobre la brana puede ser expresada como:

$$g_{\mu\nu} = \int d^N y g_{AB}^{(5)} \partial_\mu y^A(x) \partial_\nu y^B(x) \delta^N(y^A - y^A(x)), \quad (2.12)$$

si se toma el mínimo a la acción mostrada en la ecuación (2.11) y hacemos uso de (2.12) se tendrá:

$$R_{AB}^{(5)} - \frac{1}{2} g_{AB}^{(5)} R = k(T'_{AB} + T_{AB}), \quad (2.13)$$

con T'_{AB} es sobre el bulto y T_{AB} de la forma:

$$T_{AB} = \frac{1}{\sqrt{-g^{(N)}}} \int d^4 x \sqrt{-g^{(4)}} \left(\frac{1}{k'} \left(R_{\mu\nu}^{(4)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(4)} R \right) - T_{\mu\nu} \right) \partial_\mu y^A \partial_\nu y^B \delta^N(y^A - y^A(x)), \quad (2.14)$$

donde es posible definir lo siguiente:

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(4)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(4)} R - k' T_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

en efecto, de la última ecuación se puede escribir la ecuación de movimiento; únicamente variando la acción con respecto a la función inmersa $y^A(x)$ de la forma:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = T_{nn}, \quad (2.16)$$

la ecuación (2.15) será utilizada en el capítulo tres durante la resolución del problema que trataremos en esta tesis y la ecuación (2.16) será generalizada para obtener una dinámica completa de las branas.

2.5. Energía del vacío

En esta sección se analizará más a fondo el problema que existe con la constante cosmológica a lo que respecta al punto de vista de la física de partículas y las observaciones [4]. Desde el punto de vista de la física de partículas, la constante cosmológica no es más que una medición de la densidad de energía del vacío (el estado de mínima energía).

Para obtener el valor de la densidad de energía del vacío, considere un campo escalar simple ϕ , con una energía potencial $V(\phi)$. En efecto la acción puede ser escrita como:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (2.17)$$

y el correspondiente tensor energía-momento es:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} (g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi) g_{\mu\nu} - V(\phi) g_{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

En este enfoque, la configuración con la mínima densidad de energía, sera aquella en la que no exista contribución de la energía cinética o el gradiente de energía, lo que implica que $\partial_\mu \phi = 0$, con lo que $T_{\mu\nu} = -V(\phi_0) g_{\mu\nu}$, donde ϕ_0 es el valor de ϕ el cual minimiza $V(\phi)$. No existe razón por la cual $V(\phi)$ debería anularse. Luego el tensor energía momento puede entonces escribirse como:

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac} g_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

donde ρ_{vac} en este ejemplo está dado por $V(\phi)$. En efecto, se puede escribir la ecuación para la energía del vacío como el de un fluido perfecto, de la forma:

$$p_{vac} = -\rho_{vac}. \quad (2.20)$$

El efecto que tiene el tensor energía-momento de la ecuación (2.19) es equivalente al de la constante cosmológica como se puede observar colocando el término $\Lambda g_{\mu\nu}$ del lado derecho de las ecuaciones de Einstein:

$$\rho_{vac} = \rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (2.21)$$

esta equivalencia es el origen de identificar la constante cosmológica con la energía del vacío.

Es importante mencionar, que no es necesario introducir campos escalares para obtener una energía del vacío distinta de cero. La acción de la relatividad general en presencia de una constante cosmológica será:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda_0), \quad (2.22)$$

si se extrema la acción, se obtendrá la ecuación de Einstein con constante cosmológica. Esto implica que la constante cosmológica puede ser obtenida de una densidad lagrangiana con un término constante y es la forma más general de la relatividad general modelada con una constante cosmológica.

2.5.1. La discrepancia entre la teoría de partículas y las observaciones.

En el caso de la energía del vacío, si se hace uso de la teoría cuántica ordinaria a niveles de la escala de Planck tendríamos $M_{pl} = (8\pi G)^{-1/2} \sim 10^{19} GeV$ con lo que esperamos una contribución del orden de:

$$\rho_{\Lambda}^{pl} \sim (10^{19} GeV)^4 \sim 2 \times 10^{110} erg/cm^3, \quad (2.23)$$

cabe mencionar que la teoría cuántica de campos puede fallar a estos niveles, es por esto que es necesario de una teoría cuántica de la gravitación para así poder obtener valores reales de la energía del vacío a escalas de Planck.

Por otra parte, los datos observacionales de la energía del vacío son del orden de:

$$\left| \rho_{\Lambda}^{obs} \right| \leq (10^{-12} GeV)^4 \sim 2 \times 10^{-10} erg/cm^3, \quad (2.24)$$

la diferencia entre (2.23) y (2.24) es el origen de la famosa discrepancia de los 120 órdenes de magnitud entre el valor teórico y el observacional de la constante cosmológica.

Capítulo 3

El modelo.

3.1. Branas esféricas.

En este capítulo se tratará matemáticamente el modelo propuesto por Matos y Cordero para el tratamiento de la constante cosmológica y de la expansión del universo por medio de Teoría de Branas. La idea de la teoría se muestra a continuación:

Imaginemos dos branas concéntricas, una más pequeña que la otra; cada una de ellas es 4-dimensional y la distancia que las separa obliga a aumentar una dimensión extra, lo que implicará que el modelo es 5-dimensional. Ahora bien, cada región será nombrada con números romanos como se muestra en la figura 3 y a cada brana se le asociará una masa. M_1 será la masa de la brana mas pequeña y M_2 será la masa de la brana más grande. Entre región y región se les asociará una constante cosmológica propia; es decir $\Lambda_1 = I$, $\Lambda_2 = II$ y $\Lambda_3 = III$. (Véase la figura 3-1)

La métrica propuesta para el espacio 5-dimensional que ocuparemos viene como¹ [7]:

$$ds_{(5)}^2 = -A(a)_{\pm} dt^2 + \frac{1}{A(a)_{\pm}} da^2 + a^2 [d\chi^2 + \text{sen}^2 \chi (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2)], \quad (3.1)$$

¹El estudio puede ser generalizada a cualquiera de las tres topologías tomando la métrica de la siguiente manera:

$$ds_{(5)}^2 = -A(a)_{\pm} dt^2 + \frac{1}{A(a)_{\pm}} da^2 + a^2 [d\chi^2 + f_k(\chi)^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2)]$$

($k = 0, \pm 1$) donde $f_0(\chi) = \chi$, $f_1(\chi) = \text{sen} \chi$, $f_{-1}(\chi) = \text{senh} \chi$.

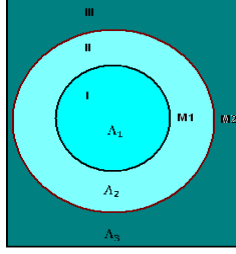


Figura 3-1: Las masas de las branas son M_1 y M_2 respectivamente y existen constantes cosmológicas $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ para cada región entre brana y brana.

la cual es conocida como el análogo 5-dimensional de la métrica de Schwarzschild-Anti-de Sitter. En efecto, de (3.1) se puede encontrar $A(a)_\pm$ resolviendo la ecuación de campo $\overset{5}{R}_{\mu\nu} = \overset{5}{\Delta} \overset{5}{g}_{\mu\nu}$. La idea es tomar $\overset{5}{\Delta} = -4l^2$ según lo propuesto por Ida [12] y luego a partir de condiciones iniciales se obtendrá la ecuación mostrada en [7]. En efecto, es claro que, $g_{\mu\nu}$ viene dada por la siguiente matriz.

$$\overset{5}{g}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -A(a)_\pm & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A(a)_\pm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \text{sen}^2 \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 \text{sen}^2 \chi \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

que al resolver con la ecuación de campo, da dos ecuaciones diferenciales cuya solución en general es de la forma:

$$A(a)_\pm = 1 + \frac{\alpha}{a^2} - l^2 a^2, \quad (3.3)$$

donde $\alpha = -\frac{2M^\pm}{M_{(5)}^3}$ y $l^2 = \frac{\Lambda^\pm}{6}$. El \pm corresponde al exterior e interior de la brana respectivamente².

Se considera la locación de la 3-brana en la forma $t = t(\tau)$, $a = a(\tau)$ parametrizada por el tiempo τ sobre la brana. Luego la métrica inducida sobre la 3-brana es:

²Aquí $M_{(5)}$ corresponde la masa de Planck en 5-D.

$$ds_{(4)}^2 = -d\tau^2 + a(\tau)^2[d\chi^2 + \text{sen}^2\chi(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)], \quad (3.4)$$

en efecto, el vector tangente a la brana viene escrito de la forma:

$$u = \dot{t} \frac{\partial}{\partial t} + \dot{a} \frac{\partial}{\partial a}, \quad (3.5)$$

y el vector normal a la brana será:

$$n = -\dot{a} dt + t da, \quad (3.6)$$

la inmersión de la tres brana está caracterizada por la métrica inducida y la curvatura extrínseca

$${}^4_{g_{\mu\nu}} = {}^5_{g_{\mu\nu}} - n_\mu n_\nu, \quad (3.7)$$

$$K_{\mu\nu} = -{}^4_{g_\mu}{}^\lambda \nabla_\lambda n_\nu, \quad (3.8)$$

con las ecuaciones anteriores, se escribirán los valores diferentes de cero para la curvatura extrínseca y teniendo en cuenta que $\frac{1}{A(a)_\pm} \dot{a}^2 = -1 + A(a)_\pm t^{\dot{2}}$ tenemos:

$$K_{tt}^\pm = -\frac{(\ddot{a} + \frac{1}{2} \frac{\partial A(a)_\pm}{\partial a})}{(\dot{a}^2 + A(a)_\pm)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.9)$$

$$K_\chi^{\pm\chi} = K_\theta^{\pm\theta} = K_\varphi^{\pm\varphi} = \frac{(\dot{a}^2 + A(a)_\pm)^{\frac{1}{2}}}{a}, \quad (3.10)$$

por otra parte, se muestran las ecuaciones dinámicas de las branas; cada una representa las diferentes propiedades que pueden tener. Si se busca la dinámica de la brana, es necesario hacer

uso de la ecuación (3.11), la ecuación (3.12) se refiere a una forma generalizada de las ecuación de Newton y la ecuación (3.13) muestra la ecuación de conservación para la brana:

$$[K]g_{\mu\nu}^5 - [K_{\mu\nu}] = k\tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (3.11)$$

$$\tilde{T}^{\mu\nu} \langle K_{\mu\nu} \rangle = [T_{nn}], \quad (3.12)$$

$$\nabla_\nu(T_\mu^\nu) = -[T_{\mu n}], \quad (3.13)$$

aquí $T_{nn} = (T_{bulto})_{AB}n^A n^B$, $T_{\mu n} = (T_{bulto})_{AB}u_\mu^A n^B$, y $\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ igual que en la ecuación (2.15), lo cual considera la curvatura y la energía sobre la brana. De la ecuación (3.13) se obtiene la ecuación que se refiere a la conservación de la energía momento sobre la brana.

$$\frac{d}{dt}(\rho a_i^3) + P_i \frac{d}{dt}(a_i^3) = 0, i = 1, 2. \quad (3.14)$$

donde los subíndices 1 y 2 indican a que brana pertenecen. Por otra parte, si se considera $T_\mu^\nu = \text{diag}(-\rho, P, P; P)$ y haciendo uso de la ecuación (3.11) se obtienen las siguientes dos ecuaciones:

$$(\dot{a}^2 + A(a)_-)^{\frac{1}{2}} - (\dot{a}^2 + A(a)_+)^{\frac{1}{2}} = \frac{ak}{3}\rho, \quad (3.15)$$

$$2\dot{t}a(A(a)_+ - A(a)_-) + \left[\frac{\ddot{a} + \frac{1}{2}\frac{\partial A(a)_+}{\partial a}}{A(a)_+} - \frac{\ddot{a} + \frac{1}{2}\frac{\partial A(a)_-}{\partial a}}{A(a)_-} \right] \frac{a^2}{\dot{t}} = kP, \quad (3.16)$$

pero para el fin de este trabajo solo se hará uso de la ecuación (3.15).

Ahora bien, gracias a la ecuación (3.3) se describirá como se comporta el interior y el exterior de cada una de las branas. Se iniciará con la más pequeña: En el interior (Región I) no se siente

el efecto de la masa y tenemos un Λ_1 de tal manera que la ecuación (3.3) vendrá dada de la forma:

$$A(a)_- = 1 - \frac{\Lambda_1}{6} a_1^2, \quad (3.17)$$

en la región II se siente únicamente el efecto de la masa M_1 y contenemos un Λ_2 , es por esto que se describe la ecuación (3.3) como:

$$A(a)_+ = 1 - \frac{2M_1}{M_{(5)}^3 a_1^2} - \frac{\Lambda_2}{6} a_1^2, \quad (3.18)$$

si se sustituye (3.17) y (3.18) en la ecuación (3.15) se tiene:

$$\frac{\dot{a}_1^2}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} = \frac{k^2 \rho_1^2}{36} + \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{12} + \frac{M_1}{M_{(5)}^3 a_1^4} + \frac{(\Lambda_2 - \Lambda_1)^2}{16k^2 \rho_1^2} + \frac{9M_1^2}{M_{(5)}^6 k^2 \rho_1^2 a_1^8} + \frac{3M_1(\Lambda_2 - \Lambda_1)}{2M_{(5)}^3 a_1^4 k^2 \rho_1^2}, \quad (3.19)$$

este resultado va de acuerdo con el encontrado por Ida [12] salvo por el segundo y cuarto término que son propios del sistema, el término cuarto y sexto se anulan si existe la simetría \mathbb{Z}_2^3 . Por otra parte, en el interior de la brana más grande se siente M_1 y Λ_2 es por esto que la ecuación (3.3) se describe como:

$$A(a)_- = 1 - \frac{2M_1}{M_{(5)}^3 a_2^2} - \frac{\Lambda_2 a_2^2}{6}, \quad (3.20)$$

y el exterior de la brana más grande siente la suma de la masa pequeña así como la de su propia masa, es decir: $M = M_1 + M_2$ y Λ_3 . Por lo que la ecuación (3.3) toma la forma:

$$A(a)_+ = 1 - \frac{2(M_1 + M_2)}{M_{(5)}^3 a_2^2} - \frac{\Lambda_3 a_2^2}{6}, \quad (3.21)$$

³La simetría \mathbb{Z}_2 es el grupo formado por los elementos -1 y 1

si se sustituye (3.20) y (3.21) en (3.15) se tiene la ecuación asociada a la brana 2 cuya forma matemática viene como:

$$\frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{1}{a_2} = \frac{k^2 \rho_2^2}{36} + \frac{\Lambda_3 + \Lambda_2}{12} + \frac{2M_1 + M_2}{M_{(5)}^3 a_2^4} + \frac{(\Lambda_3 - \Lambda_2)^2}{16k^2 \rho_2^2} + \frac{9M_2^2}{M_{(5)}^6 k^2 \rho_2^2 a_2^8} + \frac{3(\Lambda_3 - \Lambda_2)M_2}{2M_{(5)}^3 a_2^4 k^2 \rho_2^2}. \quad (3.22)$$

de igual manera que para la brana 1, este resultado está de acuerdo con el propuesto por Ida [12] salvo por los términos segundo y tercero de la ecuación (3.22) que son propios del análisis de esta tesis, es importante mencionar que los términos cuarto y sexto se anulan si existe simetría \mathbb{Z}_2 .

3.2. Regímenes sobre las branas y dinámica.

En esta parte de la tesis, las ecuaciones (3.19) y (3.22) serán sometidas a dos regímenes y un inicio evolutivo de las branas.

La idea fundamental es que en el inicio las dos branas del modelo nacerán quizá como un proceso de creación cuántica; teniendo la brana 2 un mayor tamaño que la brana 1. En este modelo se propone como hipótesis que la brana 1 contiene partículas de espín cero, la brana 2 contiene partículas de espín uno y las partículas de espín 1/2 se crearán durante la colisión de ambas branas. Estos regímenes indican distintas etapas de la evolución de las branas y serán mostradas a continuación:

3.2.1. Antes de la inflación y de la colisión.

Al inicio se propondrá que $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$, sobre las regiones I, II, III y se establecerá que las densidades y las presiones tengan la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \rho_M + \lambda, \quad \rho_2 = \rho + \lambda, \\
P_1 &= p_M - \lambda, \quad P_2 = p - \lambda,
\end{aligned}
\tag{3.23}$$

donde ρ indica la densidad de energía de los campos vectoriales que existen en la naturaleza y ρ_M los campos escalares que cumplen la ecuación $\rho_M = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V$ y la ecuación de Klein-Gordon $\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + V_{,r} = 0$. Aquí λ se conoce como burbuja de vacío (Antes de la colisión se propone que $\lambda = 0$). En efecto, las ecuaciones (3.19) y (3.22) quedarán como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{a}_1^2}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} &= \frac{k^2 \rho_M^2}{36} + \frac{M_1}{M_{(5)}^3 a_1^4} + \frac{9M_1^2}{M_{(5)}^6 k^2 \rho_M^2 a_1^8}, \\
\frac{\dot{a}_2^2}{a_2^2} + \frac{1}{a_2^2} &= \frac{k^2 \rho^2}{36} + \frac{2M_1 + M_2}{M_{(5)}^3 a_2^4} + \frac{9M_2^2}{M_{(5)}^6 k^2 \rho^2 a_2^8}
\end{aligned}
\tag{3.24}$$

si se aplica la condición de que $-M_2 = M_1$ para no violar la conservación de la energía y se impone una masa para ambas branas de la forma: $M_1 = -M$, $M_2 = M$ y se supone que $k^2 = 36 \frac{\varkappa}{3} \frac{1}{2\lambda}$ donde $\varkappa = \frac{8\pi}{m_{pl}^2}$ se tendrá:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{a}_1^2}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} &= \frac{\varkappa}{3} \left[\frac{\rho_M^2}{2\lambda} - \frac{M}{M_{(5)}^3 a_1^4} \right], \\
\frac{\dot{a}_2^2}{a_2^2} + \frac{1}{a_2^2} &= \frac{\varkappa}{3} \left[\frac{\rho^2}{2\lambda} - \frac{M}{M_{(5)}^3 a_2^4} \right],
\end{aligned}
\tag{3.25}$$

en esta etapa el universo era extremadamente caliente⁴ y los efectos cuánticos de la gravedad eran de gran importancia para el análisis físico del universo en estas condiciones. Debido a que

⁴El universo era tan joven como del orden de los tiempos de Planck donde los efectos de la gravedad-cuántica se hacen presente. Las temperaturas eran del orden de $9,5 \times 10^{31}$ K

actualmente no existe alguna teoría que abarque dichos regímenes, las ecuaciones (3.25) para ambas branas **no** proporcionan una idea correcta del comportamiento de nuestro universo en esos momentos.

Pese a nuestras carencias de un tratamiento físico que resuelva estos problemas del universo en etapas muy tempranas se analizarán las ecuaciones (3.25) en busca de posible física que pueda existir en dichas ecuaciones.

Si se observan las ecuaciones (3.25) notamos la existencia de campos escalares y vectoriales propios de cada brana los cuales son extremadamente grandes debido al factor de $\lambda = 0$ y opacan el segundo término después de la igualdad. Este término es interpretado como la radiación que existe sobre la brana.

Por otra parte es importante notar que en las ecuaciones no existe la constante cosmológica que medimos actualmente en nuestro universo (es importante recordar que Λ y λ viven en el espacio 5-dimensional), ni la burbuja de vacío λ pues suponemos que esta es cero en los inicios evolutivos de las branas.

3.2.2. Antes y durante el proceso de colisión $\rho, \rho_M \gg \lambda$ y después de la colisión $\rho, \rho_M \ll \lambda$.

Antes de realizar ambos regímenes se necesita obtener las ecuaciones de ambas branas con condiciones especiales sobre $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$. En efecto, propondremos que $\Lambda_2, \Lambda_3 \neq 0$.

Brana 1

Para la brana 1 se considera que $\Lambda_1 = 0$ y $\frac{1}{6}\Lambda_2 = -\frac{2\kappa}{3}\lambda$, con $\kappa = \frac{8\pi}{m_{pl}^2}$ y $k^2 = 36\frac{\kappa}{3}\frac{1}{2\lambda}$. En efecto sustituyendo en (3.19) obtenemos:

$$\frac{\dot{a}_1^2}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} = \frac{\kappa}{3} \left[\frac{\rho_1^2}{2\lambda} - \lambda + \frac{\lambda^3}{2\rho_1^2} + \frac{M_1}{M_{(5)}^3 a_1^4} \frac{3}{\kappa} \left[1 - \frac{\lambda^2}{\rho_1^2} \right] + \left(\frac{3}{\kappa} \right)^2 \frac{M_1^2}{2M_{(5)}^6 \rho_1^2} \frac{\lambda}{a_1^8} \right]. \quad (3.26)$$

Brana 2

Para la brana 2 se considera que $\frac{1}{6}\Lambda_3 = \frac{2\kappa}{3}\Lambda$ y $\frac{1}{6}\Lambda_2 = -\frac{2\kappa}{3}\lambda$, con $\kappa = \frac{8\pi}{m_{pl}^2}$, $k^2 = 36\frac{\kappa}{3}\frac{1}{2\lambda}$ y $-M_2 = M_1$. En efecto sustituyendo en (3.22) obtenemos:

$$\frac{\dot{a}_2^2}{a_2^2} + \frac{1}{a_2^2} = \frac{\kappa}{3} \left[\frac{\rho_2^2}{2\lambda} + (\Lambda - \lambda) + \frac{\lambda(\Lambda + \lambda)^2}{2\rho_2^2} + \frac{M_2}{M_{(5)}^3 a_2^4} \frac{3}{\kappa} \left[-1 + \frac{\lambda(\lambda + \Lambda)}{\rho_2^2} \right] + \left(\frac{3}{\kappa} \right)^2 \frac{M_2^2}{2M_{(5)}^6 \rho_2^2} \frac{\lambda}{a_2^8} \right], \quad (3.27)$$

con ayuda de estas dos ecuaciones se encontrarán los siguientes dos regímenes:

Antes y durante el proceso de colisión $\rho, \rho_M \gg \lambda$

Después de la etapa en que el universo era dominado por efectos cuánticos de la gravedad, suponemos que las densidades que contienen los campos dominan sobre la burbuja de vacío. Aunque el universo todavía era muy caliente suponemos que ha superado la etapa de los tiempos de Planck y se dispone a evolucionar regido por las ecuaciones que se mostrarán más adelante.

En efecto, las ecuaciones de Friedman que gobiernan las branas en el régimen $\rho, \rho_M \gg \lambda$ son obtenidas considerando que $\rho_1^2 = 2\lambda\rho_M(1 + \frac{\rho_M}{2\lambda}) + \lambda^2$ y $\rho_2^2 = 2\lambda\rho(1 + \frac{\rho}{2\lambda}) + \lambda^2$ gracias a las ecuaciones (3.23) mostradas anteriormente.

Luego podemos observar de las ecuaciones (3.26) y (3.27) que:

$$\frac{\dot{a}_1^2}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} = \frac{\kappa}{3} \left[\frac{\rho_M^2}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2} + \frac{3M}{\kappa M_{(5)}^3 a_1^4} \right], \quad (3.28)$$

$$\frac{\dot{a}_2^2}{a_2^2} + \frac{1}{a_2^2} = \frac{\kappa}{3} \left[\frac{\rho^2}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2} - \frac{3M}{\kappa M_{(5)}^3 a_2^4} \right], \quad (3.29)$$

con $M_1 \equiv -M$, $M_2 \equiv M$.

Si $\rho_M = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V$ es un campo escalar, implica que la brana uno tendrá una época de

inflación que hará que ésta se acerque velozmente a la brana dos⁵. Por su parte la brana dos, no se acelerará inflacionariamente debido a que no contiene un campo escalar, lo que nos lleva a pensar que la brana 1 colisionará con la brana dos en un momento del tiempo. El contenido de ambas branas es radiación y una burbuja de vacío que está disminuida a la mitad, así como que cada brana contiene sus propias partículas.

No olvidemos que durante la colisión se supone que se formarán todas las partículas que tienen espín 1/2 y con ello dará origen a todas las partículas que conocemos en la actualidad. Es importante hacer notar que la existencia de la constante cosmológica Λ no se ha hecho presente y solamente contiene en las ecuaciones (3.28) y (3.29) la burbuja de vacío λ . En el siguiente punto se nota que la colisión permitirá la existencia de una constante cosmológica Λ la cual es una importante clave para la actual aceleración de nuestro universo.

Es importante pensar que tipo de colisión sucede durante el encuentro entre ambas branas para conocer su dinámica, así como las diferentes partículas que se pueden crear durante la colisión. Es por esto que se realizará un análisis de la colisión de las branas suponiendo que estas se comportan como partículas. Esta suposición es fuerte y se propone debido a nuestra ignorancia con lo que respecta a los momentos en que colisionan las branas.

En efecto, de la mecánica clásica se sabe que existen los siguientes tipos de colisiones:

· **Colisiones inelásticas entre branas.**

En las colisiones inelásticas las dos branas se fundirían en una después de la colisión y las ecuaciones de conservación del momento y de la energía relativistas se ven como:

$$M_F \dot{a} \gamma + Q = M_1 \dot{a}_{1i} \gamma_{1i} + M_2 \dot{a}_{2i} \gamma_{2i}, \quad (3.30)$$

$$M_F c^2 \gamma + P = M_1 c^2 \gamma_{1i} + M_2 c^2 \gamma_{2i}, \quad (3.31)$$

⁵Cuando nos referimos a la época inflacionaria se quiere decir que la brana 1 aumentará 120 órdenes de magnitud en tamaño en un tiempo de 1×10^{-30} seg debido al campo escalar que contiene.

donde \dot{a} es la velocidad respectiva a la nueva brana creada debido a la colisión, M_F es la masa de la nueva brana creada debido a la colisión inelástica, Q es la energía perdida o ganada durante la colisión, P es el momento perdido o ganado durante la colisión y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{\dot{a}}{c})^2}}$. Se puede observar que en las ecuaciones (3.30) y (3.31) parte de la energía y momento se convierte en la nueva brana y lo restante puede convertirse en ondas gravitacionales.

· **Colisiones elásticas entre branas.**

Para el caso donde la colisión entre las branas es totalmente elástica; es decir donde las branas no se unen para formar otra, sino que cada una tiene sus propias velocidades finales, tenemos que las ecuaciones de conservación de energía y momento relativista son:

$$M_1 c^2 \gamma_{1i} + M_2 c^2 \gamma_{2i} = M_1 c^2 \gamma_{1f} + M_2 c^2 \gamma_{2f}, \quad (3.32)$$

$$M_1 \dot{a}_{1i} \gamma_{1i} + M_2 \dot{a}_{2i} \gamma_{2i} = M_1 \dot{a}_{1f} \gamma_{1f} + M_2 \dot{a}_{2f} \gamma_{2f}. \quad (3.33)$$

Se supone que el tipo de colisión entre las branas dependerá de sus condiciones iniciales y sus respectivas densidades de energía. Sin embargo para esta tesis se desea tener un tipo de colisión distinta a la perfectamente inelástica para así seguir teniendo dos branas al final de la colisión. Este requerimiento tendrá justificación más adelante.

Después de la colisión $\rho, \rho_M \ll \lambda$

Después del proceso de colisión distinto al totalmente inelástico, ya se crearon los campos y las partículas que actualmente conocemos en la naturaleza; el universo se empezó a enfriar y las densidades cumplen el régimen $\rho, \rho_M \ll \lambda$. Si se hace uso de las ecuaciones (3.26) y (3.27) y se toma $\rho_1^2 = 2\lambda\rho_M(1 + \frac{\rho_M}{2\lambda}) + \lambda^2$ y $\rho_2^2 = 2\lambda\rho(1 + \frac{\rho}{2\lambda}) + \lambda^2$ al igual que en el régimen anterior se tendrá el siguiente par de ecuaciones el cual dirá lo que sucede después de la colisión:

$$\frac{\dot{a}_1}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} = \frac{\varkappa}{3} \left[\rho_M + \left(\frac{3}{\varkappa} \right)^2 \frac{M^2}{M_{(5)}^6 a_1^8} \frac{1}{2\lambda} \right], \quad (3.34)$$

$$\frac{\dot{a}_2}{a_2^2} + \frac{1}{a_2^2} = \frac{\varkappa}{3} \left[\rho + \Lambda + \left(\frac{3}{\varkappa} \right)^2 \frac{M^2}{M_{(5)}^6 a_2^8} \frac{1}{2\lambda} \right], \quad (3.35)$$

el resultado que se obtiene al analizar estas dos últimas ecuaciones es impresionante, tiene la forma de la solución de FLRW sin y con constante cosmológica, salvo por el término octavo que existe en ambas ecuaciones. La idea para el análisis de estas dos últimas dos ecuaciones es como sigue:

3.2.3. Dinámica de la brana 1.

Durante la colisión entre ambas branas (se supone que la brana dos ya contendrá las partículas de espín cero y las de espín 1/2 así como las que ya contenía antes de la colisión, que son las partículas de espín uno), la brana 1 transferirá parte de su momento y se expandirá mucho más lento que la brana 2 debido a que el campo escalar tomará la forma de radiación y luego de materia: $\rho_M \rightarrow \frac{1}{a_1^4} \rightarrow \frac{1}{a_1^3}$ y además no contiene constante cosmológica que la haga expandir aceleradamente; el segundo término después de la igualdad en la ecuación (3.34) decaerá rápidamente $\left(\frac{3}{\varkappa} \right)^2 \frac{M^2}{M_{(5)}^6 a_1^8} \frac{1}{2\lambda} \rightarrow 0$ puesto que λ es muy grande. Lo que nos da una ecuación para la brana 1 de la forma:

$$\frac{\dot{a}_1}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} = \frac{\varkappa}{3} \rho_M, \quad (3.36)$$

por otra parte, si se sustituye la ecuación (3.23) en la ecuación (3.14) se tiene:

$$\frac{d}{dt}(\rho_M a_1^3) + p_M \frac{d}{dt}(a_1^3) = 0, \quad (3.37)$$

que es la bien conocida ecuación de conservación de la energía.

Lo siguiente es modelar la dinámica de la brana 1 haciendo uso de las ecuaciones (3.36) y (3.37).

Para obtener la dinámica, es conveniente definir las siguientes ecuaciones [22]:

$$\frac{1}{a_{01}^2} = (2q_0 - 1)H_0^2, \quad \frac{\rho_M}{\rho_{0M}} = 2q_0H_0^2, \quad (3.38)$$

donde q_0 es el parámetro de desaceleración y H_0 es la constante de Hubble. Por otra parte, la ecuación (3.37) puede ser integrada facilmente, de tal manera que para el caso de materia se tiene:

$$\frac{\rho_M}{\rho_{0M}} = \left(\frac{a_1}{a_{01}} \right)^{-3} \quad (3.39)$$

haciendo uso de (3.36), (3.38) y (3.39), resulta la integral:

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{R/R_0} \left[1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x} \right]^{1/2} dx, \quad (3.40)$$

donde la solución a la ecuación (3.40) para $q_0 > \frac{1}{2}$ viene de la forma:

$$1 - \cos \theta = \left(\frac{2q_0 - 1}{q_0} \right) \frac{a_1(t)}{a_{01}}, \quad (3.41)$$

$$H_0 t = q_0(2q_0 - 1)^{-3/2} [\theta - \text{sen}\theta], \quad (3.42)$$

que claramente se observa que son las ecuaciones paramétricas de un cycloide, tal y como lo muestra la figura (3-2)

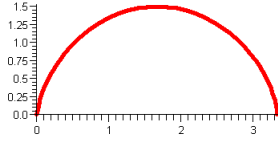


Figura 3-2: Gráfica a vs t . Brana con curvatura $k' = 1$

En efecto, esto quiere decir que la brana 1 después de la colisión evolucionará, llegará a un máximo y decaerá nuevamente a una singularidad.

Cabe mencionar que ρ_M y la densidad crítica ρ_{cM} deben cumplir que $\rho_{0M} > \rho_{cM}$ pues para este capítulo se estableció una simetría esférica.

3.2.4. Dinámica de la brana 2.

Por otra parte se hace la suposición de que nuestro universo se encuentra en la brana 2, lo que implica que la ecuación (3.35) tiene que predecir la dinámica de nuestro universo actual. Si se observa la ecuación (3.35) tenemos un universo dominado con una densidad que tiene la forma clásica de materia $\rho \rightarrow \frac{1}{a_2^3}$ y una constante cosmológica Λ que predice la actual aceleración del universo y un tercer término que decaerá a cero debido a que λ es muy grande $\left(\frac{3}{\varkappa}\right)^2 \frac{M^2}{M_{(5)}^6 a_2^8} \frac{1}{2\lambda} \rightarrow 0$.

En efecto, la ecuación (3.35) da un universo esféricamente simétrico con una constante cosmológica que hace que éste se expanda aceleradamente. Por tanto de (3.35) se tiene:

$$\frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{1}{a_2^2} = \frac{\varkappa}{3}(\rho + \Lambda), \quad (3.43)$$

en efecto tenemos un universo que se expande aceleradamente debido a la presencia de Λ y cuya dinámica pareciera ser igual a la de nuestro universo, excepto por la simetría esférica que contiene la ecuación (3.43)⁶.

⁶Recordemos que según datos actuales, nuestro universo es aproximadamente plano.

Por otra parte, si se sustituye (3.23) en (3.14) se tiene una ecuación de conservación que vendrá de la forma:

$$\frac{d}{dt}(\rho a_2^3) + p \frac{d}{dt}(a_2^3) = 0. \quad (3.44)$$

El análisis de la ecuación (3.43) será realizado de diferente forma a la que se procedió para lo de la brana 1.

Es claro que la ecuación (3.43) se puede escribir de la forma:

$$\dot{a}_2^2 = \frac{\varkappa \rho}{3} a_2^2 + \frac{\varkappa \Lambda}{3} a_2^2 - 1. \quad (3.45)$$

Por otra parte se define en la época presente del universo las siguientes constantes:

$$\Omega_{mat} = \frac{\varkappa \rho_0}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\varkappa \Lambda}{3H_0^2}, \quad \Omega_E = -\frac{1}{a_{02}^2 H_0^2}, \quad (3.46)$$

donde a partir de la ecuación (3.45) fijándola en una época presente y haciendo uso de la ecuación (3.46), es posible definir la ecuación:

$$1 = \Omega_{mat} + \Omega_\Lambda + \Omega_E. \quad (3.47)$$

Si se divide (3.45) por las constantes $a_0^2 H_0^2$ y se recuerda que la densidad en el caso de materia tiene la forma $\rho = \rho_0 \frac{a_0^3}{a_2^3}$ tenemos:

$$\frac{1}{H_0^2} \frac{\dot{a}_2^2}{a_2^2} = \frac{\varkappa \rho_0}{3H_0} \frac{a_0}{a_2} + \frac{\varkappa \Lambda}{3H_0^2} \frac{a_2^2}{a_0^2} - \frac{1}{a_0^2 H_0^2}, \quad (3.48)$$

haciendo uso de la ecuación (3.46) y definiendo $x = \frac{a_2}{a_0}$ tenemos:

$$\frac{1}{H_0^2} \dot{x}^2 = \Omega_{mat} \frac{1}{x} + \Omega_\Lambda x + \Omega_E, \quad (3.49)$$

en efecto, haciendo uso de la ecuación (3.47) e integrando se tiene:

$$H_0^2(t - t_0) = \int_0^{a_2/a_{02}} \left[1 + \Omega_{mat} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + \Omega_\Lambda (x^2 - 1) \right]^{-1/2} dx, \quad (3.50)$$

puesto que se trabaja con un universo cerrado, se pide que: $\Omega_{Tot} > 1$, donde $\Omega_{Tot} = \Omega_{mat} + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_E$. Es importante notar que la ecuación (3.50) **es complicada de resolver ya que debe realizarse numéricamente** [4].

Cabe mencionar que la ecuación (3.50) se reduce a la ecuación (3.40) si $\Omega_\Lambda = 0$ y teniendo en cuenta que $\Omega_{mat} = 2q_0$.

Capítulo 4

Caso general.

4.1. Geometría esférica, hiperbólica y plana.

Este capítulo, se dedicará a generalizar las ecuaciones obtenidas durante el capítulo III a las tres geometrías (Esférica, Hiperbólica y Plana), se analizará su dinámica, sus ecuaciones de conservación así como el posible efecto que puede tener el universo bajo la influencia de una constante cosmológica.

Si se generaliza el elemento de línea 5-dimensional (2.17) para los tres tipos de geometrías se tiene:

$$ds_{(5)}^2 = -A(a)_{\pm} dt^2 + \frac{1}{A(a)_{\pm}} da^2 + a^2 [d\chi^2 + f_k(\chi)^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2)], \quad (k' = 0, \pm 1). \quad (4.1)$$

Donde $f_0(\chi) = \chi$, $f_1(\chi) = \text{sen} \chi$ y $f_{-1}(\chi) = \text{senh} \chi$. Al realizar el mismo tratamiento que en el capítulo II, se encuentra el valor general para $A(a)_{\pm}$:

$$A(a)_{\pm} = k' + \frac{\alpha}{a^2} - l^2 a^2, \quad (4.2)$$

donde $\alpha = -\frac{2\mathbf{M}^\pm}{M_{(5)}^3}$ y $l^2 = \frac{\Lambda^\pm}{6}$.

En efecto, las ecuaciones obtenidos en el capítulo II para los diferentes regímenes pero ahora para las tres diferentes geometrías se tiene:

- En el inicio de las branas.

$$\begin{aligned}\frac{\dot{a}_1^2}{a_1^2} + \frac{k'}{a_1^2} &= \frac{\varkappa}{3} \left[\frac{\rho_M^2}{2\lambda} - \frac{M}{M_{(5)}^3 a_1^4} \right], \\ \frac{\dot{a}_2^2}{a_2^2} + \frac{k'}{a_2^2} &= \frac{\varkappa}{3} \left[\frac{\rho^2}{2\lambda} - \frac{M}{M_{(5)}^3 a_2^4} \right].\end{aligned}\tag{4.3}$$

- Antes y durante el proceso de colisión: $\rho, \rho_M \gg \lambda$

$$\frac{\dot{a}_1^2}{a_1^2} + \frac{k'}{a_1^2} = \frac{\varkappa}{3} \left[\frac{\rho_M^2}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2} + \frac{3M}{\varkappa M_{(5)}^3 a_1^4} \right],\tag{4.4}$$

$$\frac{\dot{a}_2^2}{a_2^2} + \frac{k'}{a_2^2} = \frac{\varkappa}{3} \left[\frac{\rho^2}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2} - \frac{3M}{\varkappa M_{(5)}^3 a_2^4} \right].\tag{4.5}$$

- Después de la colisión: $\rho, \rho_M \ll \lambda$

$$\frac{\dot{a}_1^2}{a_1^2} + \frac{k'}{a_1^2} = \frac{\varkappa}{3} \left[\rho_M + \left(\frac{3}{\varkappa} \right)^2 \frac{M^2}{M_{(5)}^6 a_1^8} \frac{1}{2\lambda} \right],\tag{4.6}$$

$$\frac{\dot{a}_2^2}{a_2^2} + \frac{k'}{a_2^2} = \frac{\varkappa}{3} \left[\rho + \Lambda + \left(\frac{3}{\varkappa} \right)^2 \frac{M^2}{M_{(5)}^6 a_2^8} \frac{1}{2\lambda} \right].\tag{4.7}$$

y las ecuaciones de conservación para ambas branas serán:

$$\frac{d}{dt}(\rho_M a_1^3) + p_M \frac{d}{dt}(a_1^3) = 0,\tag{4.8}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho a_2^3) + p \frac{d}{dt}(a_2^3) = 0, \quad (4.9)$$

tal y como en el capítulo anterior (exceptuando que ahora es en general) las branas 1 y 2 nacerán y evolucionarán de tal manera que la brana 1 colisione con la brana 2, (recordemos que la brana 1 contendrá partículas de espín 1 y la brana 2 contendrá partículas de espín 0 al momento de la colisión se generarán las partículas de espín 1/2) y le transfiera todo su momento a la brana 2. Después de la colisión las branas 1 y 2 estarán dominadas por las ecuaciones (4.6) y (4.7) las cuales nos darán información acerca de la dinámica de nuestro universo.

4.2. El régimen $\rho, \rho_M \ll \lambda$ para los tres tipos de geometrías

El régimen $\rho, \rho_M \ll \lambda$ establece la dinámica de las branas después de los momentos de la colisión. Es muy importante que en este régimen la brana 2 (nuestro universo) se comporte de manera similar a las observaciones actuales mientras que la brana 1 no está sujeta a ninguna restricción puesto que no existe evidencia alguna de su existencia y por ende no cuenta con ninguna observación.

4.2.1. Dinámica de la brana 1 (Geometría esférica, hiperbólica y plana).

La brana 1 está regida por la ecuación de Friedman (4.6) y la ecuación de conservación (4.8).

Si nuevamente se supone que el término $\frac{M^2}{M_{(5)}^6 a_1^8} \frac{1}{2\lambda} \rightarrow 0$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$ se tiene que la ecuación (4.6) resulta de la forma:

$$\frac{\dot{a}_1}{a_1^2} + \frac{k'}{a_1^2} = \frac{\varkappa}{3} \rho_M \quad (k = 0, \pm 1), \quad (4.10)$$

en efecto, se vuelve a hacer uso de las ecuaciones (3.38) y la ecuación de conservación para el caso de materia (4.8) se tiene la siguiente integral:

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{a_1/a_{01}} \left[1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x} \right]^{-1/2} dx, \quad (4.11)$$

donde ahora existirán los siguientes tres casos:

a) $q_0 > \frac{1}{2}$ ($k' = +1$, $\rho_{0M} > \rho_{cM}$) cuya solución a (4.11) son las bien conocidas ecuaciones paramétricas del cycloide:

$$1 - \cos \theta = \left(\frac{2q_0 - 1}{q_0} \right) \frac{a_1(t)}{a_{01}}, \quad (4.12)$$

$$H_0 t = q_0(2q_0 - 1)^{-3/2} [\theta - \text{sen}\theta], \quad (4.13)$$

b) $q_0 = \frac{1}{2}$ ($k' = 0$, $\rho_{0M} = \rho_{cM}$) cuya solución a la ecuación (4.11) es:

$$\frac{a_1(t)}{a_{01}} = \left(\frac{3H_0 t}{2} \right)^{2/3} \quad (4.14)$$

c) $0 < q_0 < \frac{1}{2}$ ($k' = -1$, $\rho_{0M} < \rho_{cM}$) y cuya solución es:

$$\cosh \Psi - 1 = \left(\frac{1 - 2q_0}{q_0} \right) \frac{a_1(t)}{a_{01}}, \quad (4.15)$$

$$H_0 t = q_0(1 - 2q_0)^{-3/2} [\text{senh}\Psi - \Psi], \quad (4.16)$$

en general, se pueden graficar las ecuaciones anteriores en un diagrama a vs t el cual se observa en la figura (4-1):

Como es posible notar de la figura (4-1), la brana 1 se comporta de la misma forma que se comporta el universo de FLRW sin constante cosmológica. La forma geométrica de la brana 1 estará regida por la densidad de materia que contiene la brana 1 ρ_{0M} .

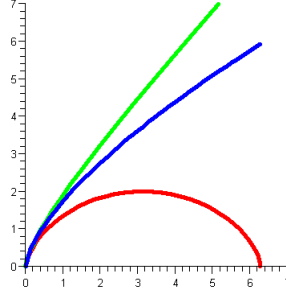


Figura 4-1: Gráfica a vs t . De abajo para arriba universos con geometrías esférica, plana e hiperbólica

Cabe mencionar que no existe evidencia física de la brana 1; lo que implica que no se puede conocer su ρ_{0M} .

En esta tesis se sugiere que la brana 1 contiene la materia oscura y ésta influye a nuestro universo (brana 2) haciendo sentir la interacción residual de la gravedad debido a que tuvo que viajar a través de la quinta dimensión para llegar a la brana 2. Si se supone que la materia oscura es regida por campos escalares y además se supone que los campos escalares solo se encuentran en la brana 1 y se desea realizar una medición de la materia oscura, es necesario realizarla en el universo que contiene la materia oscura; es decir la brana 1.

4.2.2. Dinámica de la brana 2 (Geometría esférica, hiperbólica y plana).

La brana 2 está regida por la ecuación de Friedman (4.7) y la ecuación de conservación (4.9). De igual manera que para la brana anterior, el término $\frac{M^2}{M_{(5)}^6 a_1^8} \frac{1}{2\lambda} \rightarrow 0$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$ contenido en la ecuación de Friedman puede ser despreciado, de tal manera que se obtendrá:

$$\frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{k'}{a_2} = \frac{\varkappa}{3}(\rho + \Lambda), \quad (4.17)$$

la ecuación (4.17) define la dinámica de un universo tipo FLRW con constante cosmológica que hace que éste se acelere. Por otra parte, la ecuación de conservación respectiva a la brana 2 vendrá de la forma:

$$\frac{d}{dt}(\rho a_2^3) + p \frac{d}{dt}(a_2^3) = 0. \quad (4.18)$$

En efecto, para encontrar la dinámica de la ecuación (4.17) se realizará el mismo tratamiento que en el capítulo anterior. Es claro que la ecuación (4.17) se puede escribir de la forma:

$$\dot{a}_2^2 = \frac{\kappa\rho}{3} a_2^2 + \frac{\kappa}{3} \Lambda a^2 - k'. \quad (4.19)$$

Si se realiza el mismo tratamiento que en el capítulo anterior, es posible definir la forma integral de la ecuación (4.19) de la forma:

$$H_0^2(t - t_0) = \int_0^{a_2/a_{02}} \left[1 + \Omega_{mat} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + \Omega_\Lambda (x^2 - 1) \right]^{-1/2} dx \quad (4.20)$$

donde $\Omega_{Tot} > 1$ para un universo cerrado, $\Omega_{Tot} = 1$ para un universo plano y $\Omega_{Tot} < 1$ para un universo abierto. En efecto, recordemos que $\Omega_{Tot} = \Omega_{mat} + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_E$.

Como se mencionó en el capítulo anterior, existe gran dificultad matemática para resolver la ecuación (4.20), es por esto que se mostrará en la figura (4-2) las gráficas recopiladas por S. Carroll [4] de distintas geometrías en las cuales la ecuación (4.20) puede ser resuelta.

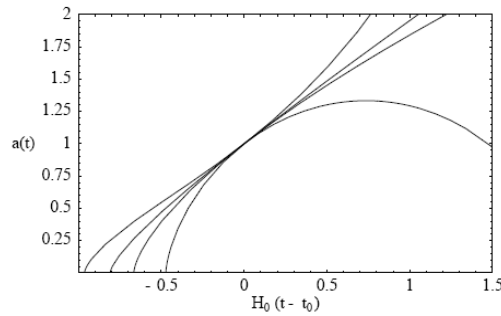


Figura 4-2: Diferentes historias de expansión, para diferentes valores de Ω_{mat} y Ω_Λ . et al Carroll S. [4]

De abajo para arriba tenemos: $\Omega_{mat} = 1, \Omega_{\Lambda} = 0$ (plano dominado por materia sin constante cosmológica), $\Omega_{mat} = 0,1, \Omega_{\Lambda} = 0$ (abierto, materia plausible no constante cosmológica), $\Omega_{mat} = 0,1, \Omega_{\Lambda} = 0,9$ (plano, materia plausible con constante cosmológica), $\Omega_{mat} = 0,01, \Omega_{\Lambda} = 0,99$ (plano, materia mínima con constante cosmológica).

S. Carroll [4] realiza la integral (4.20) dentro del intervalo $\left(\frac{a_2}{a_{02}}, 1\right)$ es por esto que en la figura (4-2) se observan valores negativos.

Es importante observar que si la cantidad de materia crece, la edad del universo será menor; mientras que más cantidad de energía del vacío (constante cosmológica) implica que el universo se haga más viejo. Esta característica es muy importante para obtener un universo que sea más viejo que las estrellas más viejas que se pueden observar.

Actualmente se sabe que el universo es plano lo que implica que $\Omega_{Tot} = \Omega_{mat} + \Omega_{DM} + \Omega_{Rad} + \Omega_{neut} + \Omega_{\Lambda} = 1$ y cuyos contenidos de materia, materia oscura, radiación, neutrinos y energía oscura; es como sigue: $\Omega_{mat} = 0,04, \Omega_{DM} = ,23, \Omega_{Rad} = 4 \times 10^{-4}, \Omega_{neut} = 4 \times 10^{-4}, \Omega_{\Lambda} = ,73$.

Como ya se mencionó anteriormente si se supone que la materia oscura se encuentra en la brana 1, únicamente se sentirá la influencia gravitacional producida por esta. Según el modelo, las branas se van alejando más y más entre ellas, debido a que la brana 2 contiene constante cosmológica y la brana 1 no contiene constante cosmológica; lo que implica que la influencia producida por la materia oscura se irá diluyendo más y más conforme se separan las branas. Lo que implica que en un futuro no se podrá medir el efecto de la materia oscura en nuestro universo. El análisis de estas ideas, se realizará de forma más rigurosa en la parte de resultados y conclusiones.

Capítulo 5

Modelo Alternativo.

5.1. Modelo alternativo

En el capítulo tres se modelaron las ecuaciones (3.19) y (3.22) mediante la imposición de valores dados de $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ y se obtuvieron las ecuaciones (3.27) y (3.26) que fueron expuestas a distintos regímenes.

A lo largo del capítulo 5 se modelarán las branas cambiando los valores de $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ con la finalidad de obtener una explicación a la materia oscura que se siente en nuestro universo. Los modelos anteriores aunque proporcionan una explicación de la procedencia de λ y de la constante cosmológica Λ no proporcionan una idea de la actual existencia de materia oscura en el universo.

La idea de este capítulo es proporcionar $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ de tal manera que ambas branas tengan las mismas ecuaciones dinámicas y evolucionen juntas; con la finalidad de establecer que la materia oscura se encuentre en la brana 1 y la brana 2 sienta únicamente la influencia de la gravedad producida por la materia oscura sin necesidad de que la contenga. Al igual se requiere que la brana 1 y 2 evolucionen con constante cosmológica para reproducir la actual expansión acelerada del universo.

Supongamos que dentro de la brana 1 existe $\frac{1}{6}\Lambda_1 = \frac{\alpha}{3}\Lambda$, entre la brana 1 y la brana 2 existe $\frac{1}{6}\Lambda_2 = \frac{\alpha}{3}(\Lambda - 2\lambda)$ y en el exterior de la brana 2 tenemos $\frac{1}{6}\Lambda_3 = \frac{2\alpha}{3}\Lambda$; estas nuevas condiciones implican que las ecuaciones (3.19) y (3.22) tendrán una nueva forma.

Para la brana 1 consideremos que $\frac{1}{6}\Lambda_1 = \frac{\varkappa}{3}\Lambda$ y $\frac{1}{6}\Lambda_2 = \frac{\varkappa}{3}(\Lambda - 2\lambda)$ por lo que la ecuación (3.19) tiene la forma:

$$\frac{\dot{a}_1^2}{a_1^2} + \frac{k'}{a_1^2} = \frac{\varkappa}{3} \left[\frac{\rho_1^2}{2\lambda} + (\Lambda - \lambda) + \frac{\lambda^3}{2\rho_1^2} + \frac{M_1}{M_{(5)}^3 a_1^4} \frac{3}{\varkappa} \left[1 - \frac{\lambda^2}{\rho_1^2} \right] + \left(\frac{3}{\varkappa} \right)^2 \frac{M_1^2}{2M_{(5)}^6 \rho_1^2 a_1^8} \right], \quad (5.1)$$

Para la brana 2 realicemos lo siguiente; tomemos $\frac{1}{6}\Lambda_2 = \frac{-2\varkappa\lambda}{3}$ pues $\lambda \gg \Lambda$, nótese que esta consideración se realizó por efectos de cálculo y se considera como una hipótesis, además tenemos que $\frac{1}{6}\Lambda_3 = \frac{2\varkappa}{3}\Lambda$. De estas condiciones se obtiene:

$$\frac{\dot{a}_2^2}{a_2^2} + \frac{k'}{a_2^2} = \frac{\varkappa}{3} \left[\frac{\rho_2^2}{2\lambda} + (\Lambda - \lambda) + \frac{\lambda(\Lambda + \lambda)^2}{2\rho_2^2} + \frac{M_2}{M_{(5)}^3 a_2^4} \frac{3}{\varkappa} \left[-1 + \frac{\lambda(\lambda + \Lambda)}{\rho_2^2} \right] + \left(\frac{3}{\varkappa} \right)^2 \frac{M_2^2}{2M_{(5)}^6 \rho_2^2 a_2^8} \right]. \quad (5.2)$$

En efecto, en estas ecuaciones se consideran las tres geometrías de FLRW, las cuales son parecidas a las ecuaciones (3.26) y (3.27), excepto que la ecuación para la brana 1 tiene sumado un término que corresponde a la constante cosmológica.

De igual manera que en el capítulo anterior, es posible obtener ecuaciones características de cada régimen:

- En el inicio de las branas $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}_1^2}{a_1^2} + \frac{k'}{a_1^2} &= \frac{\varkappa}{3} \left[\frac{\rho_M^2}{2\lambda} - \frac{M}{M_{(5)}^3 a_1^4} \right], \\ \frac{\dot{a}_2^2}{a_2^2} + \frac{k'}{a_2^2} &= \frac{\varkappa}{3} \left[\frac{\rho^2}{2\lambda} - \frac{M}{M_{(5)}^3 a_2^4} \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

- Antes y durante el proceso de colisión $\rho, \rho_M \gg \lambda$.

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{a}_1}{a_1^2} + \frac{k'}{a_1^2} &= \frac{\varkappa}{3} \left[\frac{\rho_M^2}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2} + \frac{3M}{\varkappa M_{(5)}^3 a_1^4} \right], \\
\frac{\dot{a}_2}{a_2^2} + \frac{k'}{a_2^2} &= \frac{\varkappa}{3} \left[\frac{\rho^2}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2} - \frac{3M}{\varkappa M_{(5)}^3 a_2^4} \right].
\end{aligned} \tag{5.4}$$

· Después de la colisión $\rho, \rho_M \ll \lambda$.

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{a}_1}{a_1^2} + \frac{k'}{a_1^2} &= \frac{\varkappa}{3} \left[\rho_M + \Lambda + \left(\frac{3}{\varkappa} \right)^2 \frac{M^2}{M_{(5)}^6 a_1^8} \frac{1}{2\lambda} \right], \\
\frac{\dot{a}_2}{a_2^2} + \frac{k'}{a_2^2} &= \frac{\varkappa}{3} \left[\rho + \Lambda + \left(\frac{3}{\varkappa} \right)^2 \frac{M^2}{M_{(5)}^6 a_2^8} \frac{1}{2\lambda} \right],
\end{aligned} \tag{5.5}$$

y las ecuaciones de conservación se ven como:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\rho_M a_1^3) + p_M \frac{d}{dt}(a_1^3) &= 0, \\
\frac{d}{dt}(\rho a_2^3) + p \frac{d}{dt}(a_2^3) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

En efecto, la diferencia entre las ecuaciones (5.5) y (4.6) es en la brana 1 donde ahora su ecuación dinámica contiene un factor de constante cosmológica que hace que éste se acelere, de igual forma que para la brana 2 por lo que ambas brana siguen una dinámica como la mostrada por la gráfica (4-2) según su geometría [4]. Lo anterior implica que ambas branas se van juntas aceleradas por el factor de la constante cosmológica (Véase ecuaciones dinámicas (5.5)). Al igual que en el capítulo anterior se supone que la materia oscura regida por las ecuaciones de campo escalar, solo se encuentra en la brana 1, y en la brana 2 (nuestro universo) únicamente se siente su influencia gravitacional de la materia oscura. Nótese que la distancia de separación entre las branas da lugar a la burbuja de vacío λ que es resultado de los datos de la mecánica cuántica,

la cual está inmersa en el espacio 5-dimensional. Si se desea obtener una medición experimental de la burbuja de vacío, es necesario realizarla entre la separación de ambas branas, es decir en el espacio 5-dimensional. Se realiza un análisis más formal acerca de estas ideas en la parte de resultados y conclusiones.

Capítulo 6

Resultados y Conclusiones

Como se ha observado a través de esta tesis, la propuesta de branas es un método efectivo para obtener un modelo que rige nuestro universo. A partir de ecuaciones primordiales que contiene el término de curvatura extrínseca es posible obtener soluciones generales que concuerdan con el trabajo realizado por Ida [12]. Asimismo de un análisis correcto en lo que respecta a las densidades de ambas branas, es posible obtener su dinámica en distintos regímenes de su evolución. Durante el proceso de esta tesis, se generaron ideas en cada régimen evolutivo; es decir: antes, durante y después del proceso de colisión; así como de realizar distintos modelos que resuelvan los problemas de la cosmología actual.

- Modelo mostrado en el capítulo 3 y 4.

Antes de la colisión, no resulta factible realizar un análisis ya que los efectos cuánticos de la gravedad están presentes y las ecuaciones obtenidas durante esta tesis en este régimen no incluyen una teoría más general como lo sería gravitación cuántica. Sin embargo la belleza de las ecuaciones (3.24) es valiosa hacerla notar, ya que proporciona una idea de como el cosmos se comporta en esos regímenes. Es posible observar que existe radiación en ambas branas, así como un término octavo característico del modelo de branas. La existencia de burbuja de vacío en ambas branas es parte importante de la dinámica. Se muestra en el capítulo 3 y 4 que las densidades respectivas de cada brana compite con la energía del vacío debido a que las temperaturas y las presiones en esos momentos de la evolución son demasiado altas.

Durante el proceso de colisión se muestra que el comportamiento de la densidad de la

brana 1 tendrá la forma de un campo escalar el cual provocará una expansión inflacionaria que producirá una colisión contra la brana 2. De igual manera se conjetura que la brana 1 contendrá las partículas con espín uno, la brana 2 contendrá partículas con espín cero y en el momento de la colisión se formarán las partículas con espín 1/2 estableciendo la dinámica actual de partículas conocida en nuestro universo. Esta idea, continúa siendo una hipótesis y su demostración necesita de resultados experimentales para ser comprobada.

Conocer lo que sucede durante el proceso de colisión entre las branas es de vital importancia pues con esto se puede conocer la forma evolutiva que tendrán en un futuro dichas branas. En efecto, podemos imaginar que ambas branas se fundieron en una sola debido a la colisión dando origen a la forma actual de nuestro universo; sin embargo en esta tesis consideramos que ambas sufren una colisión distinta a la inelástica, de tal manera que estas sigan interactuando entre si, todo esto con el fin último de considerar que la materia oscura viva en una de las branas.

Algunos autores [21] suponen que lo que colisiona contra las branas es la burbuja de vacío que se encuentra en el espacio 5-dimensional y con esto concluyen su análisis sin necesidad de proponer ecuaciones de conservación de momento y energía para la colisión como es en el caso de esta tesis. Si se aplica la misma idea para este modelo, tenemos que lo que ocasiona la energía térmica dentro de la brana dos, sería la burbuja de vacío de la región II al colisionar con la brana dos, debido a que la burbuja de vacío es empujada como una pared por la expansión inflacionaria de la brana uno.

En efecto, suponer una colisión entre espacios-tiempos (branas) es difícil de entender, pues uno llegaría a pensar que dos espacios-tiempos no sienten su efecto mutuo, sino que es su contenido de energía lo que hace que interactúen entre si.

Cabe mencionar que los procesos de colisión son altamente complejos pues su explicación necesita teoría cuántica de campos, gravitación o inclusive una teoría unificada debido a las altas temperaturas y bajas longitudes en dichos momentos evolutivos; por lo que aún se encuentra fuera del alcance de los objetivos de esta tesis y por esto solo es tratado superficialmente pero sin dejar atrás el poder proponer nuevas formas de visualizar el problema de la colisión.

Finalmente es importante notar que en la época de colisión el término octavo deja de existir mientras que el término de radiación continúa apareciendo en las ecuaciones dinámicas; el primer término del lado derecho de la igualdad permanece de la misma forma que antes del proceso de

colisión y existe un término que corresponde a la mitad de la burbuja de vacío.

Como ya se había mencionado anteriormente, el proceso de colisión es importante ya que según nuestra hipótesis en ese momento fue donde se creó la dinámica y los componentes actuales de nuestro universo. El rompimiento de la simetría que dió origen a las partículas de espín 1/2 y el recalentamiento (reheating), fué gracias al contenido de el campo escalar en la brana 1 que lo llevó al acontecimiento inflacionario que provocó la colisión y al nacimiento de la actual constante cosmológica.

La parte más importante de esta tesis es en el régimen $\rho, \rho_M \ll \lambda$ pues a partir de ecuaciones fundamentales de teoría de branas, se obtuvo la ecuación de Friedman con y sin constante cosmológica para cada brana respectivamente, y las cuales son propias de un análisis clásico de la cosmología de FLRW. Es importante mencionar que en este análisis se obtuvo un término octavo particular de esta teoría que no aparece en las ecuaciones clásicas de Friedman y que consideramos nulo debido a que λ es muy grande. La existencia de λ en ambas branas es señal de que su influencia sigue siendo parte de la dinámica evolutiva de las branas. Es importante recalcar que en estudios que deberán realizarse posteriormente se debe analizar si el término octavo en las ecuaciones de las branas tiene un significado físico; puesto que aunque su influencia en la dinámica de la brana en el régimen $\rho, \rho_M \ll \lambda$ es casi nula éste sigue siendo parte de dichas ecuaciones.

En esta tesis se supuso que nuestro universo vive en la brana 2, lo que implica que las ecuaciones dinámicas resultado de la teoría de branas deben modelar nuestro universo actual. En efecto, los resultados de esta tesis concuerdan con las ecuaciones dinámicas de la forma actual de evolución de nuestro universo, obviamente pensando que este se comporta bajo la dinámica de constante cosmológica. Es decir que a partir de ecuaciones fundamentales se obtuvo la dinámica del universo, la cual actualmente se modela colocando el término de la constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein. El hecho de que la brana 2 no hubiese contenido constante cosmológica tendría repercusiones importantes en los resultados, ya que sin ésta, el universo tendría una edad menor al de las estrellas más viejas que existen en él; lo que claramente implicaría un grave problema en los resultados predictivos en esta tesis.

Originalmente la idea del modelo se realizó con una geometría esférica, sin embargo durante

el proceso de estudio se generalizó al considerar los tres tipos de geometría que son característicos del análisis de FLRW. Es importante recordar que de los tres tipos de geometrías, el modelo plano asociado a la brana 2 da la capacidad de trabajar con datos reales, debido a que actualmente tenemos conocimiento de que nuestro universo es plano.

Es importante notar que la brana 1 puede tener cualquier tipo de geometría, pues en la actualidad no se cuenta con pruebas de su existencia y por lo tanto no se conoce su forma geométrica.

Con lo que respecta al caso de la materia oscura se propone que existe únicamente en la brana 1 y en la brana 2 (nuestro Universo) solo sentimos su influencia gravitacional.

Es importante notar que el hecho de que las branas se separen entre sí implica que la influencia de la materia oscura sobre la brana 2 se irá haciendo más y más pequeña y en el futuro no formará más parte de la dinámica de nuestro universo.

Si se realiza una gráfica, en la que se observa la dinámica evolutiva de las omegas podemos observar que conforme el universo evoluciona la cantidad de materia oscura en el universo disminuye, lo que concuerda con nuestro modelo. En efecto, la cantidad de materia oscura en nuestro universo no disminuye, sino que el efecto gravitacional sobre nuestra brana es lo que disminuye debido a la expansión acelerada de nuestro universo (brana 2). Véase figura (6-1).

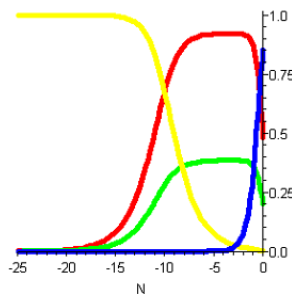


Figura 6-1: Gráfica de las densidades críticas. $\Omega_{MO} = 0.23$ (Rojo), $\Omega_B = 0.04$ (Verde), $\Omega_{rad} = 10^{-4}$ (Amarillo), $\Omega_{EO} = 0.73$ (Azul). $N = \ln(a)$.

· Modelo mostrado en el capítulo 5

El modelo que se muestra en el capítulo 5 de esta tesis, busca obtener una solución alternativa

al problema de la materia oscura y de igual manera al problema de la constante cosmológica en el régimen $\rho, \rho_M \ll \lambda$. Como se mencionó en el capítulo 5, es posible suponer que la materia oscura conformada por campo escalar, viviera en la brana 1 y los datos experimentales que obtenemos en nuestro universo (brana 2), únicamente son consecuencia de la influencia gravitacional de la materia oscura. En efecto, nuestro universo no contiene en sí la materia oscura, si no que la brana 1 es la que contiene este tipo de materia; nótese que ambas branas evolucionan juntas con una separación constante dando pauta a que la materia oscura sea capaz de influenciar la dinámica de nuestro universo mediante la interacción gravitacional sin que esta cambie por el hecho de que se están alejando entre sí como en el modelo mostrado en el capítulo 3 y 4.

En efecto, la interacción de la materia oscura en el universo no cambia conforme este evoluciona sino lo que cambia es la densidad de materia oscura en la brana 1 debido a que ésta se expande aceleradamente bajo el efecto de la constante cosmológica provocando que la interacción disminuya y este modelo esté de acuerdo con la gráfica (6-1)

Es importante notar que en el modelo mostrado en el capítulo 5 existe una burbuja de vacío entre brana y brana, la cual es un resultado predictivo de la mecánica cuántica; lo que nos lleva a la explicación del porqué la discrepancia entre los datos observacionales y los datos experimentales.

Avances acerca del estudio de teoría de branas pueden hacerse en posteriores estudios si se generalizan las ecuaciones (3.15) y (3.16) agregándoles el término de curvatura propio de cada brana (modelo DGP) o el término de curvatura en función del factor de escala de la brana con la que se interactúa.

Los problemas de la física actual con lo que respecta a la aceleración del universo, materia oscura y otros, son parte fundamental del día a día de la ciencia en el mundo. Aun cuando teoría de branas es una forma importante de modelar el universo y como se observa en esta tesis es una manera distinta de abordar estos problemas, todavía no existe un veredicto final acerca de su total éxito predictivo. Actualmente, se empezará a buscar la existencia de dimensiones extras en experimentos de aceleradores de partículas como en el experimento CERN. Cabe la

posibilidad de que las dimensiones extras estén a niveles de energía más altos de los que la tecnología actual puede llegar. Sin embargo es fundamental abordar los problemas de la física actual desde diferentes ángulos con el fin de obtener un entendimiento completo de nuestra naturaleza, esperando que en el mediano plazo, la tecnología sea capaz de hurgar los lugares más recónditos de nuestro universo.

Bibliografía

- [1] Binetruiy P., Deffayet C. and Langlois D, Nucl. Phys. B565, 269 (2000) [hep-th/0502032].
- [2] Bradley D., Fisher S., Guenault A., Haley R, Kopu J, Martin H, Pickett G, Roberts J and Tsepelin V. *Relic topological defects from brane annihilation simulated in superfluid ^3He* . doi: 10.103/nphys815.
- [3] Capovilla R., Guven J.. *Geometry of deformations of relativistic membranes*. Phys. Rev. D. Lett. **51**, Num. 12.
- [4] Carroll S. *The cosmological constant*. arXiv:astro.ph/0004075v2 8 April 2000.
- [5] Cordero R. and Rojas E. *Nucleation of $^{(4)}R$ brane universes*. Class Quantum Grav. **21** (2004) 4231-4246.
- [6] Cordero R., Molgado A. and Rojas E.. *Born Infeld Objects*. Class. Quantum Grav. **24** (2007) 1665-1682.
- [7] Cordero R. and Vilenkin A. *Stealth Branes*, Phys. Rev D. Lett. **65**, 083519.
- [8] Giveon A., Kutasov D. *Brane Dynamics and Gauge Theory*. arXiv:hep-th/9802067v2 31 Aug 1998.
- [9] Greene B. *El universo elegante*. Edit. Planeta Colombia S.A.
- [10] Heredia I. *Rompimiento de simetrías mediado por modos de Kaluza-Klein*. Tesis de maestría CINVESTAV.
- [11] Hoyle C. *Test of the gravitational inverse-square law below the dark-energy length scale*. Phys. Rev. Lett. **D70** (2004) 042004L.

- [12] Ida D. *Brane-world cosmology*, JHEP02 (2000) 014.
- [13] Kaluza T. *On the problem of unity in physics*. Sitzungsberg. Preuss. Akad.Wiss. Berlin (Math. Phys.), K1:966-972. 1921.
- [14] Misner C., Thorne K., Wheeler J. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company. San Francisco.
- [15] Padmanabhan T. *Accelerated expansion of the universe driven by tachyonic matter*. Phys. Rev. D. Lett 66 , 021301(R) (2002).
- [16] Randall L., Sundrum R. *An alternative to compactification*. Phys. Rev. Lett 83, Num 23.
- [17] Rodriguez P. *Modelo de juguete para un universo homogéneo e isotrópico con branas*. Tesis de maestría CINVESTAV.
- [18] Ryan M. and Shepley L. *Homogeneous relativistic cosmologies*. Princeton Series in Physics. Princeton, New Jersey 1975.
- [19] Scherrer R. *Purely kinetic k-essence as unified dark matter*. arXiv:astro-ph/0402316v3 6 May 2004.
- [20] Straumann N. *The history of the cosmological constant problem*. arXiv:gr-qc/0208027v1 13 Aug 2002.
- [21] Uchida Gen, Akihiro Ishibashi, and Takahiro Tanaka. *Brane big bang brought on by bulk bubble*. Physical Review D **66**, 023519 (2002)
- [22] Weinberg S. *Gravitation and cosmology: Principles and applications of general theory of relativity*. John Wiley and Sons.
- [23] Weinberg S. *The cosmological constant problem*. Review of modern physics, **61**, No 1, January 1989.
- [24] Zichichi A., de Sabbata V. y Sánchez N. *Gravitation and modern cosmology, The cosmological constant problem*. Physical Sciences.