Investigación *Revista Mexicana de Física* **38**, *No. 1 (1992) 69–80*

Ecuaciones quirales y haces fibrados*

TONATIUH MATOS
Departamento de Física
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Apartado postal 14–740, 07000 México, D.F., México

Y

RICARDO BECERRIL
Ciencias Básicas e Ingeniería, Area de Física
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Av. San Pablo 180, 02200 México, D.F., México

Recibido el 25 de marzo de 1991; aceptado el 13 de septiembre de 1991

RESUMEN. Utilizando la hipótesis $g = g(\lambda^i)$ reducimos las ecuaciones quirales $(\rho g_{,z} g^{-1})_{,\bar{z}} + (\rho g_{,\bar{z}} g^{-1})_{,z} = 0$ a una ecuación de Killing de un espacio V_p de dimensión p, siendo $\lambda^i = \lambda^i(z, \bar{z})$ parámetros "geodésicos" de V_p. Suponiendo que g pertenece a un grupo de Lie G, se escriben los elementos del álgebra correspondiente F en términos de los vectores de Killing de V_p y los generadores de las subálgebras de F de dimensión igual a la dimensión del espacio de Killing. Los elementos de las subálgebras forman clases de equivalencia que en el grupo respectivo constituyen un haz fibrado principal. Esto se usa para integrar g en función de las variables complejas z y $\bar{z}$.

PACS: 04.50.+h; 02.40.+m

1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones quirales

$$(\rho g_{,z} g^{-1})_{,\bar{z}} + (\rho g_{,\bar{z}} g^{-1})_{,z} = 0 \tag{1}$$

han demostrado ser de gran utilidad en física. Tal vez las más estudiadas sean las ecuaciones quirales en donde g es una matriz del grupo SU(N) [1]. Sin embargo, existen otros campos de la física en donde g es la matriz de algún grupo y las ecuaciones quirales aparecen en forma natural. Se pueden ver las Ecs. (1) como la generalización matricial de la ecuación de Laplace: si suponemos que g es sólo una

*Trabajo apoyado parcialmente por CONACYT.

función, y hacemos $\ln g = f$, las ecuaciones quirales se transforman en la ecuación de Laplace

$$(\rho f_{,z})_{,\bar{z}} + (\rho f_{,\bar{z}})_{,z} = 0 \tag{2}$$

las cuales escritas en coordenadas cilíndricas, por ejemplo ($z = \rho + i\zeta$) nos dan la expresión familiar para la ecuación de Laplace

$$(\rho f_{,\rho})_{,\rho} + (\rho f_{,\zeta})_{,\zeta} = \rho \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial\zeta^2} \right] = 0.$$

En la teoría general de la relatividad, las ecuaciones quirales aparecen naturalmente siendo g un elemento de algún grupo de Lie. Por ejemplo, en el espacio de Ernst [2] o espacio de potenciales, las ecuaciones de Einstein en el vacío se reducen a las ecuaciones quirales, siendo g un elemento del grupo SU(1,1). En términos del potencial de Ernst ε, g se escribe [3]

$$g = \frac{1}{\varepsilon + \bar{\varepsilon}} \begin{pmatrix} 1 + \bar{\varepsilon}\varepsilon & 1 - \varepsilon\bar{\varepsilon} + \varepsilon - \bar{\varepsilon} \\ -1 + \varepsilon\bar{\varepsilon} + \varepsilon - \bar{\varepsilon} & -1 - \bar{\varepsilon}\varepsilon \end{pmatrix}, \tag{3}$$

y las ecuaciones (1) son las ecuaciones de Ernst, equivalentes a las ecuaciones de Einstein en el vacío.

En el caso de la teoría de Einstein-Maxwell, g es un elemento del grupo SU(2,1) en el espacio de potenciales, y las ecuaciones de Einstein-Maxwell se reducen a las Ecs. (1). En términos del potencial de Ernst y el potencial electromagnético ϕ, g se puede parametrizar como [3]

$$g = \frac{1}{\varepsilon + \bar{\varepsilon} + 2\phi\bar{\phi}} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon\bar{\varepsilon} + 2\phi\bar{\phi} & 1 - \varepsilon\bar{\varepsilon} + \varepsilon - \bar{\varepsilon} & 2i\phi(1 - \bar{\varepsilon}) \\ -1 + \varepsilon\bar{\varepsilon} + \varepsilon - \bar{\varepsilon} & -1 - \varepsilon\bar{\varepsilon} + 2\phi\bar{\phi} & -2i\phi(1 + \bar{\varepsilon}) \\ 2i\bar{\phi}(1 - \varepsilon) & 2i\bar{\phi}(1 + \varepsilon) & \varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\phi\bar{\phi} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

En teorías de unificación, como la teoría de dimensión cinco de Kaluza-Klein [4], también aparecen los campos quirales. Por ejemplo, en el espacio de potenciales [5] en 5 dimensiones, el cual es análogo al espacio de potenciales de Ernst, se pueden escribir las ecuaciones estacionarias de dimensión cinco de Kaluza-Klein como las ecuaciones quirales, siendo g un elemento del grupo SL(3,$\mathbb{R}$), donde g se parametriza como [6]

$$g = -\frac{2}{f\kappa^{2/3}} \begin{pmatrix} f^2 + \epsilon^2 - f\kappa\psi^2 & -\epsilon & -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\epsilon\chi + f\kappa^2\psi) \\ -\epsilon & 1 & \frac{1}{2\sqrt{2}}\chi \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\epsilon\chi + f\kappa^2\psi) & \chi/2\sqrt{2} & (\chi^2 - \kappa^2 f)/8 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

En las teorías de supercuerdas sobre espacios curvos aparecen los campos quirales con g en el grupo SL(8,$\mathbb{R}$). Pero el espacio de fondo es un espacio curvo de dimensión 10. Entonces este espacio curvo se supone que es solución de las ecuaciones de Einstein de dimensión 10 [7]. En el caso axial-simétrico estacionario estas ecuaciones se reducen a las ecuaciones quirales conjuntamente con una ecuación extra para un superpotencial [8].

Lo mismo sucede con las teorías de dimensión n de Kaluza-Klein. En el caso axial-simétrico estacionario, las ecuaciones de campo de Kaluza-Klein en el vacío se reducen a las ecuaciones quirales con $g \in \mathrm{SL}(n-2,\mathbb{R})$ más la ecuación de un superpotencial [8]. El caso particular $n = 4$, es la teoría de Einstein de la relatividad general.

Estos son algunos ejemplos de la importancia de los campos quirales en física. En este artículo, mostramos la relación que existe entre las ecuaciones quirales y los haces fibrados y se desarrolla un aparato matemático para determinar los campos quirales a partir del *ansatz* $g = g(\lambda^i)$, $i = 1,\ldots,p$ y para encontrar soluciones a las ecuaciones correspondientes. En la Sec. 3 se dan algunas aplicaciones en la teoría de dimensión cinco de Kaluza-Klein.

2. ECUACIONES QUIRALES Y HACES FIBRADOS

Las Ecs. (1) se pueden derivar de la lagrangiana [9]

$$\mathcal{L} = \rho\,\mathrm{tr}(g_{,z}g^{-1}g_{,\bar{z}}g^{-1}), \tag{6}$$

en donde, como también en la Ec. (1), aparecen los elementos correspondientes al álgebra de Lie F de G: $A_z, A_{\bar{z}}$ definidos como

$$\begin{aligned} Az: G &\longrightarrow F \\ g &\longmapsto A_z(g) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} A_{\bar{z}}: G &\longrightarrow F \\ g &\longmapsto A(g), \end{aligned}$$

tales que $dg\,g^{-1} = A_z(g)\,dz + A_{\bar{z}}(g)\,d\bar{z}$, llamada la forma de Maurer-Cartan [10]. Más aún, las ecuaciones quirales implican la existencia de un superpotencial α, ya que las condiciones de integrabilidad de

$$\alpha_{,z} = \tfrac{1}{2}\rho\,\mathrm{tr}(A_z)^2, \quad \alpha_{,\bar{z}} = \tfrac{1}{2}\rho\,\mathrm{tr}(A_{\bar{z}})^2,$$

se siguen de la Ec. (1) si $\rho_{,z} = \rho_{,\bar{z}}$, ya que

$$\alpha_{,z\bar{z}} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left((\rho g_{,z}g^{-1})_{,\bar{z}}g_{,z}g^{-1} + g_{,z}g^{-1}(\rho g_{,\bar{z}}g^{-1})_{,z} + \rho_{,z}g_{,z}g^{-1}g_{,\bar{z}}g^{-1}\right).$$

Luego, los dos primeros términos del lado derecho de esta última expresión, son cero por la Ec. (1) y el último es simétrico en z, $\bar{z}$. También podemos definir una métrica en el álgebra de Lie F de manera estándar [11]

$$dS^2 = \mathrm{tr}(dg\, g^{-1} dg\, g^{-1}). \tag{7}$$

Se puede demostrar que la métrica generada por (7) es de un espacio riemanniano simétrico, es decir, tiene un tensor riemanniano covariantemente nulo [9].

Sean $\lambda^1, \ldots, \lambda^p$ un conjunto de parámetros que dependen de z y $\bar{z}$. Supongamos que estos parámetros son superficies geodésicas de cierto espacio riemanniano V_p

$$(\rho\lambda^i_{,z})_{,\bar{z}} + (\rho\lambda^i_{,\bar{z}})_{,z} + 2\rho\Gamma^i{}_{jk}\lambda^j_{,z}\lambda^k_{,\bar{z}} = 0 \qquad i,j,k = 1,\ldots,p. \tag{8}$$

Apliquemos ahora el *ansatz* debido a Neugebauer y Kramer [9], que consiste en escribir la matriz g de la ecuación quiral en función de los parámetros λ^i $(i = 1,\ldots,p)$. Usando la regla de la cadena, la Ec. (1) se transforma en una ecuación de Killing para cada componente de la matriz general del álgebra de Lie F, correspondiente al grupo G, es decir

$$A_{i;j} + A_{j;i} = 0, \tag{9}$$

siendo $A_i(g) \equiv A_i = g_{,i}g^{-1} = (\partial g/\partial\lambda^i)g^{-1}$ las componentes de la forma de Maurer-Cartan. La derivada covariante se puede expresar exclusivamente con elementos del álgebra. De la definición de A_i se sigue que

$$A_{i;j} - A_{j;i} = [A_j, A_i],$$

por lo que la derivada covariante de la matriz del álgebra F será

$$A_{i;j} = -\tfrac{1}{2}[A_i, A_j], \tag{10}$$

siendo $[A_i, A_j]$ el conmutador de las matrices A_i, A_j. Dichas matrices son invariantes ante la acción derecha de un elemento constante del grupo, es decir,

$$R_{g_0}g = g\,g_0 \Rightarrow dR_{g_0}A_i = (g\,g_0)_{,i}(g\,g_0)^{-1} = A_i.$$

Como las matrices A_i son "elementos invariantes por la derecha" del espacio tangente al grupo de Lie G, podemos escribir las A_i como combinación lineal de la base del álgebra correspondiente F y de los vectores de Killing al espacio V_p, es decir

$$A_i = \xi^j_i\sigma_j, \tag{11}$$

donde ξ_i^j es la i-ésima componente del j-ésimo vector de la base del espacio de Killing. En otras palabras, los vectores tangentes al punto p del grupo de Lie (como variedad diferenciable) serán

$$A = A_i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p ,$$

donde x^i es un sistema coordenado local al espacio de Killing.

Definamos el mapeo continuo

$$\phi: G_c \times G \longrightarrow G, \qquad (c,g) \longmapsto \phi(c,g),$$

que satisface

$$\phi(E,g) = g \qquad \text{y} \qquad \phi(C_1C_2,g) = \phi(C_1,\phi(C_2,g)), \tag{12}$$

donde G_c es el grupo G de matrices constantes, es decir, el grupo de matrices de G que no dependen de z y $\bar{z}$. (G_c, G, ϕ) es un G_c-espacio, donde G_c actúa por la izquierda sobre el espacio topológico G. $\phi(C,g)$ es tal que conserva las propiedades de g. Por ejemplo, en el caso en que g es simétrica, se escoge

$$\phi(C,g) = CgC^T,$$

de tal forma que $\phi(C,g)$ es también simétrica. Es claro que $\phi(C,g)$ satisface la ecuación quiral (1) ya que C no depende de z y $\bar{z}$, y $\phi(C,g)$ es un elemento de G. Definido $\phi(C,g)$ así, ahora vamos a definir un nuevo conjunto. Sea

$$F_g = \{g' \in G \mid g' = \phi(C,g)\}_{C \in G_c}. \tag{13}$$

Obsérvese que F_g es homomórfico a G_c, ya que $\phi(C,g)$ es continua y la función $\phi_c(g) = \phi(C,g)$ tiene inversa continua, ya que

$$\phi_{C_1C_2}(g) = \phi(C_1C_2,g) = \phi(C_1,\phi(C_2,g)) = \phi_{C_1}(\phi_{C_2}(g)) = \phi_{C_1} \circ \phi_{C_2}(g),$$

y entonces

$$\phi_{CC^{-1}}(g) = \phi_C \circ \phi_{c^{-1}}(g) = g,$$

por lo que la inversa $\phi_C^{-1}(g) = \phi_{C^{-1}}(g)$ es continua.

Como $\phi(C,g)$ es un elemento de G, podemos definir $A^c: G \longrightarrow TG$ como

$$A^c(g) = A(\phi(C,g)) = A \circ \phi_c(g).$$

Lema: La relación $A^c \, r \, A \iff \exists C \in G_c$ tal que $A^c(g) = A \circ \phi_c(g) \forall g \in G$, es de equivalencia.

Demostración: $A^c \, r \, A^c$ ya que $E \in G_c$ y $A^c = A^c \circ \phi_E(g)$. Si $A^c \, r \, A \Rightarrow \exists C^{-1} \in G_c$ (puesto que G es grupo) tal que $A = A^c \circ \phi_{C^{-1}} = A \circ \phi_c \circ \phi_{c^{-1}}$ y finalmente, si $A^{c_1} \, r \, A^{c_2}$ y $A^{c_2} \, r \, A$ entonces $A^{c_1} = A^{c_2} \circ \phi_{C_1} = A \circ \phi_{c_2} \circ \phi_{c_1} = A \circ \phi_{c_1 c_2}$, es decir $A^{c_1} \, r \, A$. ■

Entonces podemos separar el conjunto de mapeos $\{A\}$ del grupo G al álgebra de Lie F, en clases de equivalencia:

$$\{A\}/\sim = \{[A]\} = \left\{ \{A^c \in C^\infty(G,TG) \mid A^c = A \circ \phi_c\}_{C\in G_c} \right\}.$$

Podemos escoger el conjunto de representantes A de cada clase; de hecho, cualquier elemento de la clase puede ser uno de ellos. Vamos a escoger un conjunto de representantes de cada clase en F y llamémoslo TB. Cada elemento de TB es un elemento del álgebra de Lie F. Uno puede pasar de los elementos del álgebra de Lie a los elementos del grupo correspondiente a través del mapeo exponencial [11]. De cualquier modo, de cada representante de la clase, nosotros podemos generar el elemento respectivo del grupo, es decir, podemos generar

$$B = \exp TB = \{g \in G \mid g = \exp A, \; A \in TB\} \subset G, \tag{14}$$

donde $\exp A$ es el mapeo exponencial de A.

Finalmente, vamos a demostrar que escogiendo un grupo de parámetros λ^i que cumplen (8), es suficiente encontrar el conjunto B, para obtener todo el conjunto de g's que se obtienen del *ansatz* $g = g(\lambda^i(z,\bar{z}))$.

Teorema: El sexteto $(G, B, \Pi, G_c; u; \phi)$ es un haz fibrado principal, con $\Pi(\phi(C,g)) = g$, $\forall C_c \in G, g \in G$.

Demostración: Primero demostremos que (G, B, Π, G_c, u) es un haz fibrado. Como $B \subset G$, podemos tomar la topología relativa de B respecto de G. Entonces los abiertos de B serán $B \supset U = U_G \cap B$, con U_G en la topología de G. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una cubierta de B. Como F_g definido en (13) es homeomórfico a G_c, podemos tomar el haz $\alpha_F = (G_C \times U_\alpha, U_\alpha, \pi)$ y sólo debemos demostrar que α_F es isomórfico al haz $\alpha = (\Pi^{-1}(U_\alpha), U_\alpha, \Pi|_{\Pi^{-1}(U_\alpha)})$. Para esto, definamos el mapeo

$$\psi_\alpha : \Pi^{-1}(U_\alpha) = \{g' \mid g' = \phi(C,g)\}_{C \in G_c} \longrightarrow G_c \times U_\alpha,$$

tal que

$$g' \longmapsto \psi_\alpha(g') = (C, g) \in G_c \times U_\alpha.$$

ψ_α es claramente un homeomorfismo, ya que

$$\psi_\alpha(g') = \psi_\alpha(\phi(C,g)) = I(C,g) = I_g(C) = (C,g)$$

que es un homeomorfismo. Por otro lado, es claro que

$$\Pi|_{\Pi^{-1}(U_\alpha)}(g') = \Pi|_{\Pi^{-1}(U_\alpha)}(\phi(C,g)) = g = \Pi_2(C,g) = \Pi_2 \circ \psi_\alpha(g').$$

Es decir, α y α_F son isomórficos. Se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\psi_\alpha"] \arrow[dr, "\Pi|_{\Pi^{-1}(U_\alpha)}"'] & G_c \times U_\alpha \arrow[d, "\Pi_2"] \\
 & U_\alpha
\end{tikzcd}$$

que conmuta, es decir, el haz α es localmente trivial.

Ya hemos demostrado que (G, G_c, ϕ) es un G_c-espacio. Sólo falta demostrar que este G_c-espacio es localmente isomórfico al G-espacio $(G_c \times U_\alpha, G_c, \delta)$, con $\delta: G_c \times (G_c \times U_\alpha) \longrightarrow G_c \times U_\alpha$ tal que $\delta(C_2,(C_1,g)) = (C_1C_2, g)$. Para eso observamos que

$$\delta \circ \mathrm{id}|_G \times \psi_\alpha(C_1, g') = \delta(C_1,(C,g)) = (C_1C, g).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha \circ \phi|_{G_c \times \pi^{-1}(U_\alpha)}(C_1, g') &= \psi_\alpha(\phi(C_1, g')) = \psi_\alpha(\phi_{C_1}(g')) \\
&= \psi_\alpha(\phi_{C_1}(\phi(C,g))) = \psi_\alpha(\phi_{C_1C}(g)) = (C_1C, g),
\end{aligned}$$

es decir, ambos G_c-espacios son isomórficos. ∎

Lo que nos dice el teorema es que es suficiente con encontrar el conjunto B definido en (14) para generar todo el grupo de Lie G que depende de los parámetros λ^i, $i = 1, \ldots, p$.

3. Aplicaciones a la teoría de Kaluza-Klein de dimensión cinco

En esta sección aplicaremos el teorema dado anteriormente a la teoría de Kaluza-Klein de dimensión cinco. Tomemos la matriz parametrizada según el espacio de potenciales (5) y supongamos que $g = g(\lambda, \tau)$, donde $\lambda = \lambda(z, \bar{z})$ y $\tau = \tau(z, \bar{z})$. Por supuesto λ y τ son parámetros geodésicos como en (8) de un espacio de dimensión dos. Entonces escribimos las matrices A_λ y A_τ correspondientes como en (9). Todo espacio riemanniano simétrico de dos dimensiones tiene curvatura constante. Pero todo espacio bidimensional con curvatura constante tiene siempre tres vectores de Killing linealmente independientes. Por lo que la Ec. (11) será

$$A = (A_\lambda, A_\tau) = \xi\sigma_1 + \phi\sigma_2 + \zeta\sigma_3, \tag{15}$$

siendo ξ, ϕ, ζ tres vectores de Killing linealmente independientes. Como g es una matriz del grupo SL(3,$\mathbb{R}$), σ_1, σ_2, σ_3 generarán todas las subálgebras de sl(3,$\mathbb{R}$) tridimensionales. Según la clasificación de Jacobson (véase por ejemplo la Ref. [11]), también estarán incluidas las subálgebras 2 y 1 en este caso.

En este trabajo consideramos sólo las subálgebras clásicas tridimensionales de sl(3,$\mathbb{R}$). Estas son sl(2,$\mathbb{R}$), sp(2,$\mathbb{R}$) y so(2,1,$\mathbb{R}$), las dos primeras tienen la misma representación, así que sólo tomaremos dos representaciones distintas, las correspondientes a sl(2,$\mathbb{R}$) y a so(2,1,$\mathbb{R}$).

Tomaremos los vectores de Killing

$$\xi = \frac{1}{2v^2}[K\tau^2 + 1, K\lambda^2 + 1], \quad \phi = \frac{1}{2v^2}[-\tau, \lambda], \quad \zeta = \frac{1}{2v^2}[K\tau^2 - 1, 1 - K\lambda^2] \tag{16}$$

con $v = 1 + K\lambda\tau$. Tomemos el grupo SL(2,$\mathbb{R}$). Una representación del álgebra de Lie compatible con los vectores de Killing (16) es [12]

$$\sigma_1 = 2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = 2\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = 2\begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ab = 1. \tag{17}$$

Si se integra $g_{,\lambda}g^{-1} = A_\lambda$; $g_{,\tau}g^{-1} = A_\tau$, usando (9), (16) y (17), se obtiene

$$g = \frac{1}{1 - \lambda\tau}\begin{pmatrix} c(1-\lambda)(1-\tau) & e(\tau - \lambda) & 0 \\ e(\tau - \lambda) & d(1+\lambda)(1+\tau) & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \lambda\tau)/cd \end{pmatrix} \tag{18}$$

donde $a = e/c$, $b = -e/d$, $-e^2 = cd < 0$ y $K = -1$. Si comparamos ahora la matriz (18) con la matriz (5), obtenemos

$$f = \frac{c(1 - \lambda\tau)}{d(1+\lambda)(1+\tau)}, \quad \varepsilon = \frac{b(\tau - \lambda)}{(1+\lambda)(1+\tau)} \quad , \kappa = 1, \; \psi = \chi = 0.$$

Estos son precisamente los potenciales de Ernst en su versión real [13]. Como SU$(1,1,C)$ es isomórfico a SL(2,$\mathbb{R}$), es posible pasar de una representación a otra a través de una transformación, en este caso compleja. Si tomamos $ie = -1$ y $\xi = \lambda$, $\bar{\xi} = \tau$, el potencial de Ernst de la representación SU$(1,1,C)$ en (3) será

$\varepsilon = f + i\epsilon$, lo que quiere decir que la teoría de Kaluza-Klein contiene en su caso límite ($\psi = \chi = 0$, $\kappa = 1$) a la teoría de Einstein.

Un caso más interesante es la subálgebra $\mathrm{so}(2,1,R)$. En este caso, una representación matricial compatible con (16) es [12]

$$\sigma_1 = 2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & d' \\ 0 & 0 & c' \\ b' & a' & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & -d' \\ 0 & 0 & c' \\ b' & -a' & 0 \end{pmatrix},$$

con $d'b' = a'c' = 1/2$. Entonces integrando la matriz g obtenemos

$$g = \frac{1}{(4-\lambda\tau)^2} \times \begin{vmatrix} a(\lambda_2)(\tau-2)^2 & b(\lambda-\tau)^2 & c(\lambda-2)(\tau-2)(\lambda-\tau) \\ b(\lambda-\tau)^2 & d(\tau+2)^2(\lambda+2)^2 & e(\lambda+2)(\tau+2)(\lambda-\tau) \\ c(\lambda-2)(\tau-2)(\lambda-\tau) & e(\lambda+2)(\tau+2)(\lambda-\tau) & f[(4-\lambda\tau)^2 - 8(\tau-\lambda)^2] \end{vmatrix} \tag{19}$$

donde $a = a'd'/b'$, $b = 8a'd'$, $c = -4a'd'/c'$, $d = 1$, $e = 4a'$, $f' = -a'/c'$ y $K = -1/4$.

Esta g es nuevamente un elemento del conjunto B en (14). Si comparamos (19) con (5), obtenemos que los potenciales f, κ, ϵ, χ, ψ son

$$\begin{aligned} f &= \frac{(4-\lambda\tau)^2}{(\tau+2)^2(\tau+2)^2}, & \epsilon &= \frac{4(\lambda-\tau)^2}{(\lambda+2)^2(\tau+2)^2} \\ \psi &= \frac{(\lambda-\tau)}{(\lambda+2)(\tau+2)}, & \chi &= \frac{8(\lambda-\tau)}{(\lambda+2)(\tau+2)}, \quad \kappa = 2\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{20}$$

El hecho de que κ resulte constante implica una restricción a la teoría. En este caso, es bien conocido que la teoría de Kaluza-Klein, se reduce a la teoría de Einstein-Maxwell con la restricción

$$f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} = 0, \tag{21}$$

donde $f_{\mu\nu}$ es el tensor de Maxwell. Si nosotros calculamos el tensor de Maxwell dado por (20), encontramos que se cumple la restricción (21). Sin embargo, si comparamos la matriz (19) con (4) para $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$, $\phi = \bar{\phi}$ vemos que hay una estrecha relación. Tomando ε y ϕ reales en (4), se puede ver por cálculo directo que la métrica generada (7) en el álgebra de Lie $\mathrm{SU}(1,1,C)$ es

$$dS^2_{\mathrm{EM}} = \frac{1}{F^2} dF^2 + \frac{1}{F} d\phi^2, \qquad F = -\varepsilon + \phi^2; \tag{22}$$

mientras que si hacemos la transformación $\psi = a\phi$, $\chi = b\phi$, $\kappa =$ cte., $\epsilon = -c\phi^2$ y $f = \varepsilon + \phi^2$ en (5), obtenemos exactamente la misma expresión (22), sólo que las ecuaciones de Einstein-Maxwell no tienen necesariamente la restricción (21).

Lo que realmente sucede es que la métrica (22) tiene un grupo de isometrías que es el $O(2,1,R)$; y si tomamos en cuenta esto, observamos que el tensor de Maxwell se puede transformar como [14]

$$F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} \cos\alpha - f^*_{\mu\nu} \operatorname{sen}\alpha, \tag{23}$$

con $f^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu\alpha\beta} f^{\alpha\beta}$, siendo $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ el pseudotensor de Levi-Civita. Si tomamos $\alpha = \pi/4$, encontramos que $F_{\alpha\beta}$ en (23), cumple con la restricción (21). Así que la sustitución

$$\kappa = \text{cte.}, \quad \psi = a\phi, \quad \chi = b\phi, \quad \epsilon = -c\phi^2, \quad f = \varepsilon + \phi^2, \tag{24}$$

entre los potenciales en la teoría de dimensión cinco de Kaluza-Klein y los potenciales de Ernst nos permiten generar, a partir de cualquier campo electrostático (o magnetostático) estacionario y axialsimétrico de Einstein-Maxwell, la correspondiente solución de las ecuaciones de Kaluza-Klein. De hecho, dada cualquier solución electrostática o magnetostática de las ecuaciones de Einstein-Maxwell $(g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu})$ estáticas, con $g_{\nu\mu}$ diferente de cero sólo si $\nu \neq \mu$, la solución de las ecuaciones de Einstein-Maxwell que cumple con la restricción (21) es $(g_{\mu\nu}, F_{\mu\nu} = (f_{\mu\nu} - f^*_{\mu\nu})/\sqrt{2})$. Obsérvese que esta última es entonces una solución electrostática y magnetostática, al mismo tiempo, de las ecuaciones de Kaluza-Klein.

4. CONCLUSIONES

Hemos desarrollado un aparato matemático para determinar campos quirales, a partir de la hipótesis $g = g(\lambda^i)$ $i = 1, \ldots, p$. Esto nos permitió demostrar que los campos quirales forman un haz fibrado principal. Este aparato matemático puede ser usado para encontrar soluciones exactas de las ecuaciones quirales de la siguiente forma: escoja un p particular, reduzca las ecuaciones quirales a una ecuación de Killing de espacio $(\lambda^1, \ldots, \lambda^p)$, encuentre los vectores de Killing y escriba los elementos del álgebra respectiva como combinación lineal de los vectores de Killing y de los generadores de las subálgebras de dimensión igual a la dimensión del espacio de Killing. Para cada subálgebra se obtendrá toda una clase de soluciones unidas a través del producto $A^c = A \circ \phi_c$, siendo A el generador de la clase. Regrese ahora al grupo de Lie aplicando el mapeo exponencial, o integrando g. En el grupo, todos los elementos de G serán generados por los elementos obtenidos de los representantes de las clases a través del mapeo $g' = \phi(C, g)$, donde g es el elemento de G obtenido de algún representante de la clase.

APÉNDICE

Definición: Dos G-espacios $\gamma = (E, G, \psi)$ *y* $\gamma' = (E', G, \psi')$ *se dicen isomorfos si existe* $h: E \longrightarrow E'$*, homeomorfismo de espacios topológicos, tal que*

$$\psi' \circ (h \times \mathrm{id}|_G) = h \circ \psi.$$

Definición: Un haz fibrado principal es un sexteto $\xi = (P, B, \pi, G; u; \psi)$*, donde* $(P, B, \pi, G; u)$ *es un haz fibrado (con base* B*, espacio total* P*, proyección* π*, fibra* G*, y sistema de coordenadas locales* $u = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$*) y* (P, G, ψ) *es un* G*-espacio tal que* $\forall\, \alpha \in J$ *se tienen los isomorfismos de* G*-espacios*

$$(\pi^{-1}(U_\alpha), G, \psi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)\times G}) \underset{(\phi_\alpha, \mathrm{id}|_G \times \phi_\alpha)}{\approx} (G \times U_\alpha, G, \delta)$$

y

$$\delta: G \times (G \times U_\alpha) \longrightarrow G \times U_\alpha,$$

$$(g', (g, x)) \longmapsto (gg', x)$$

REFERENCIAS

1. Un estudio sobre esto se encuentra por ejemplo en: Chau, Ling-Lie, "Geometrical Integrability and Equations of Motion in Physics: A Unifying View", reprint UCD-87-38.
2. Ernst, F.J.V., *Phys. Rev.* **167** (1968) 1175.
3. Neugebauer, G. and Kramer, D., en *Galaxies, Axisymmetric Systems and Relativity*, Ed. M.A.H. McCallum (1985).
4. Véase, por ejemplo, Bailin, D. and Love, A., *Rep. Prog. Phys.* **50** (1987) 1087.
5. Neugebauer, G., *Habilitationsschrift*, Jena (1969).
6. Matos, T., *Phys. Lett.* **A 131** (1988) 423.
7. Véase, por ejmplo, de Vega, H.J. and Sánchez, N., *Nucl. Phys.* **B309** (1988) 552.
8. Matos, T., *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 208.
9. Neugebauer, G., Kramer, D., "Stationary Axisymmetric Einstein-Maxwell Fields Generated by Bäcklund Transformations", Preprint, Universidad de Jena, Alemania (1990).
10. Véase, por ejemplo, Choquet-Bruhat, De Witt-Morette and Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics*, p. 168.
11. Gilmore, R., *Lie Groups, Lie Algebras and some of their Applications*, John Wiley and Sons (1974) 213.
12. Matos, T., *Ann. Phys. (Leipzig)* **46** (1989) 462.
13. Véase la Ref. [6] o Díaz, M.C., *Rev. Mex. Fís.* **34** (1988) 1.
14. Kramer, D. *et al. Exact Solutions of Einstein's Fields Equations*, DVW, Berlín, p. 327.

ABSTRACT. Using the hypothesis $g = g(\lambda^i)$, the chiral equations $(\rho g_{,z} g^{-1})_{,\bar{z}} + (\rho g_{,\bar{z}} g^{-1})_{,z} = 0$ are reduced to a Killing equation of a p-dimensional space V_p, being $\lambda^i = \lambda^i(z, \bar{z})$ "geodesic" parameters of V_p. Supposing that g belongs to a Lie group G, one writes the corresponding Lie algebra elements (F) in terms of the Killing vectors of V_p and the generators of the subalgebra of F of dimension $d =$ dimension of the Killing space. The elements of the subalgebras belong to equivalence classes which in the respective group form a principal fiber bundle. This is used to integrate the matrix g in terms of the complex variables z and $\bar{z}$.