

# **Estudio Dinámico de Campos Escalares Autogravitantes**

Tesis  
que para obtener el grado de

**Doctora en Ciencias**

presenta

**Argelia Bernal Bautista**

*Departamento de Física,  
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados*

Junio de 2007

Directores de tesis:  
Dr. Tonatiuh Matos Chassin  
Departamento de Física  
CINVESTAV  
Dr. Francisco S. Guzmán Murillo  
Instituto de Física y Matemáticas,  
UMSNH.



*A Juan*



## Agradecimientos

De manera muy especial quiero agradecer a mis asesores, Dr. Francisco S. Guzmán Murillo y Dr. Tonatiuh Matos Chassin por los consejos, la motivación y el apoyo que he recibido de ellos para realizar esta tesis.

Quiero agradecer también a mis sinodales, Dr. Darío Núñez, Dr. Arnulfo Zepeda, Dr. Ricardo Becerril y Dr. Alfredo Cruz por sus útiles comentarios al revisar esta tesis.

Al CONACyT por la Beca de Doctorado que me otorgó.

Al CINVESTAV por los apoyos económicos que recibí como estudiante de esta institución.

Agradezco al Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por haberme permitido usar sus instalaciones para realizar parte de mis estudios de Doctorado.

Quiero agradecer también a mis profesores y amigos tanto del CINVESTAV como del Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por haberme compartido sus conocimientos y por los muy buenos momentos que hemos pasado.

Finalmente, infinitas gracias a mi familia.

## Abstract

The existence of stable and regular solutions to the Einstein Klein-Gordon (EKG) equations suggest that self-gravitating objects formed by scalar fields can be astrophysically relevant. The study of gravitational interactions between this type of objects and between these and baryonic matter turns out indispensable in order to confirm its existence in the nature.

In the present work we study, using numerical tools, the dynamics of these objects. In the relativistic context, when perturbed, the spherically symmetric field configurations present two types of generic behavior: they can be stable or unstable.

On the other hand, in the regime of weak gravity and non-relativistic fields in which the EKG equations are reduced to those of Schrödinger-Poisson, we found that the stable states are stable not only under radial perturbations, but also under non-radial perturbations and that they turn out to be attractors for non-spherical initial configurations of scalar field. We also present the head-on encounter of stable states. Our results indicate that these configurations can present a solitonic type behavior or they can merge and evolve towards a stable configuration depending on the initial energy of the system.

Within the framework of the Scalar Field Dark Matter model our results suggest *i)* that structures as galactic halos tolerate also non-radial perturbations *ii)* that scalar field dark matter structures can be formed by dark matter overdensities with arbitrary symmetry and *iii)* that the behavior of the scalar field dark matter in galaxies clusters is compatible with the behavior of the dark matter that is inferred from the encounter of the Bullet cluster merger.

## Resumen

La existencia de soluciones estables y regulares a las ecuaciones de Einstein Klein-Gordon (EKG) sugieren que objetos autogravitantes formados por campos escalares pueden ser astrofísicamente relevantes. El estudio de la interacción gravitacional entre varios objetos de este tipo y de éstos con materia compuesta por bariones resulta indispensable para poder confirmar su existencia en la naturaleza.

En el presente trabajo se estudia, utilizando herramientas numéricas, la dinámica de dichos objetos. En el contexto relativista las configuraciones de campo escalar con simetría esférica al ser perturbadas radialmente presentan dos tipos de comportamientos genéricos: pueden ser estables o inestables.

Por otra parte, en el régimen de gravedad débil y campos escalares no relativistas, en el cual las ecuaciones de EKG se reducen a las de Schrödinger-Poisson, encontramos que los estados estables ante perturbaciones radiales también lo son ante perturbaciones no radiales y que éstos resultan ser atractores para configuraciones iniciales no esféricas de campo escalar. Además estudiamos encuentros frontales de estados estables. Nuestros resultados indican que estas configuraciones pueden presentar un comportamiento tipo solitónico o fusionarse y evolucionar hacia una configuración estable dependiendo de la energía inicial del sistema.

En el marco del Modelo de Materia Oscura Escalar nuestros resultados sugieren *i)* que estructuras como los halos galácticos toleran también perturbaciones no radiales *ii)* que no existen restricciones respecto a la simetría de las sobredensidades de materia oscura escalar para formar estructuras *iii)* que el comportamiento de la materia oscura escalar en cúmulos de galaxias es compatible con el que se infiere a partir del choque del Bullet cluster.





# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
1.1. ¿Campos Escalares Fundamentales en la Naturaleza?	13
1.2. Modelo de Materia Oscura Escalar	15
1.3. Estrellas de Bosones	16
1.3.1. Las ecuaciones	17
1.3.2. Configuraciones de Equilibrio	18
1.3.3. Estabilidad	22
<b>2. El sistema Schrödinger-Poisson</b>	<b>23</b>
2.1. El límite Newtoniano de las ecuaciones de EKG	23
2.1.1. Las ecuaciones	24
2.1.2. Cantidades Físicas y Ecuaciones de Conservación	29
2.1.3. Escalas Características del Sistema	32
<b>3. Soluciones al sistema SP</b>	<b>35</b>
3.1. Configuraciones de equilibrio	36
3.2. Perturbaciones Pequeñas	38
3.3. Observables	43
<b>4. Colapso No Esférico</b>	<b>51</b>
4.1. Código Numérico	52
4.1.1. Pruebas al código numérico	53
4.2. Perturbaciones no esféricas	55
4.3. El colapso	57
<b>5. Choques frontales</b>	<b>65</b>
5.1. Configuraciones iniciales	65
5.2. Colisiones	67
<b>6. Estrellas de Bosones relativistas</b>	<b>77</b>
6.1. Evolución del espacio-tiempo	77

6.2. Los tres posibles destinos de las Estrellas de Bosones . . . . .	79
6.2.1. Destino 1: configuraciones estables . . . . .	83
6.2.2. Destino 2: configuraciones inestables ligadas . . . . .	84
6.2.3. Destino 3: configuraciones inestable no ligadas . . . . .	84
<b>7. Conclusiones y Perspectivas</b>	<b>87</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Las ecuaciones de Einstein Klein-Gordon (EKG), que representan un campo escalar complejo acoplado a la gravedad -tanto en su versión de relatividad general como newtoniana- tienen soluciones completamente regulares, estáticas, sin horizontes y estables, las llamadas estrellas de bosones, que por su naturaleza estable y estática pueden tener relevancia astrofísica. Ya sea que estén relacionadas con las estructuras de Materia Oscura, en el contexto de los modelos de Materia Oscura Escalar o en general que pudieran estar formadas por alguno de los diversos campos escalares que las extensiones al Modelo Estándar de partículas o las teorías de unificación predicen; su estudio resulta necesario para determinar las que podrían ser señales inequívocas de su existencia o bien determinar que su existencia es definitivamente imposible.

En este trabajo estudiamos la dinámica de campos escalares autogravitantes tanto en el marco de Relatividad General como en el régimen de gravedad débil y campos no relativistas. Debido a la complejidad del sistema de ecuaciones diferenciales parciales a resolver, fue necesario implementar códigos numéricos capaces de proveer la información buscada para realizar las investigaciones necesarias.

Como presentación de este trabajo, decidimos explorar el contexto en que los resultados tienen impacto importante. Para ello hemos dispuesto de la organización descrita a continuación. Se decidió presentar a modo de introducción aquellos temas bien conocidos y el estado del arte de estos, y dejamos para los capítulos siguientes todos los resultados en los que este trabajo ha tenido una contribución novedosa.

En este primer capítulo abordamos la pregunta, difícil de responder, acerca de la existencia de campos escalares fundamentales en la naturaleza, describimos después, las principales características del Modelo de Materia Oscura Escalar el cual, debido a su éxito a escalas cosmológicas, resulta un marco estimulante para investigar si las configuraciones escalares autogravitantes, en el régimen de gravedad débil estarían relacionadas con estructuras como halos galácticos de materia oscura. Finalmente hacemos una revisión de la manera en que se construyen las soluciones a las ecuaciones de EKG con simetría esférica conocidas como Estrellas de Bosones. Además describimos el comportamiento de éstas

ante perturbaciones radiales.

En el capítulo dos se derivan con detalle las ecuaciones de Schrödinger-Poisson (SP) como aproximación en el límite de gravedad débil y campos escalares no relativistas de las ecuaciones de EKG. En el caso de que la autointeracción entre los bosones se tome en cuenta, la ecuación de Schrödinger se convierte en una ecuación del tipo Gross-Pitaevskii para condensados de Bose. A pesar de que en la literatura se reconozca el sistema de SP como el límite newtoniano de las ecuaciones de EKG, la literatura conocida no provee esta derivación de manera formal, completa y rigurosa, por ello este capítulo es novedoso; además se definen propiamente las cantidades físicas que son observables del sistema, los posibles escalamientos de los sistemas de ecuaciones resultantes, etc.

En el capítulo tres se describe la manera de obtener soluciones estacionarias de las ecuaciones de SP con simetría esférica que dan origen a configuraciones que se sabe son sistemas virializados y estables ante perturbaciones radiales, llamados estados base. Los principales resultados de este trabajo de investigación se presentan en los dos capítulos finales. En el capítulo cuatro se estudia la evolución de los estados base ante perturbaciones con simetría axial, se muestra que también son estables bajo este tipo de perturbaciones más generales. Mas aún se estudia la evolución de configuraciones iniciales axialsimétricas, en este caso encontramos que los estados base son atractores de dichas configuraciones iniciales. Durante la evolución arrojan campo escalar perdiendo la simetría axial, su energía cinética disminuye y tienden a estados virializados. En el capítulo cinco se reportan los resultados de la evolución del choque frontal de dos configuraciones que inicialmente corresponden a estados base. Mostramos que la energía inicial del sistema determina si la configuración corresponde a un sistema ligado o no. Si la energía es positiva el sistema no es ligado y las configuraciones se comportan como si fuesen solitones traspasándose uno al otro y continuando su camino. Cuando la energía total es negativa los dos estados base forman un sistema ligado y terminan formando un solo estado base, sin embargo dependiendo del momento inicial de las configuraciones antes de fusionarse pueden traspasarse al menos una vez. El comportamiento tipo solitónico presentado en el caso de encuentros frontales entre estados base definitivamente no es posible en el caso de configuraciones autogravitantes de materia ordinaria, a pesar de que se observa en simulaciones de  $n$ -cuerpos que se pueden traspasarse, pero no se obtiene la propiedad fundamental de los solitones: su perfil de densidad no cambia a pesar de sufrir interacciones con otros solitones. Este tipo de comportamiento ha sido observado en la colisión de dos cúmulos de galaxias y en particular este resultado de nuestro trabajo apoya de manera importante el impacto potencial del modelo de materia oscura escalar en esta y otras observaciones. Una de éstas que aún no ha sido bien confirmada por distintos grupos de astrónomos pero que ha sido observada, es la formación de patrones de interferencia de materia oscura; este resultado es de lo más impactante, pues resulta que al momento de la colisión de nuestras estructuras (en el caso de configuraciones que se traspasan) se forma un patrón de interferencia que podría estar asociado al tipo de materia oscura.

En el capítulo seis se presenta la evolución de las configuraciones totalmente relativistas

de estrellas de bosones con simetría esférica. Se determinan los destinos dinámicos de las estrellas de bosones, que son: *i*) las estrellas de bosones son estables y de larga vida, *ii*) se colapsan y forman un hoyo negro, *iii*) explotan y dejan tras de sí un espacio-tiempo plano.

Finalmente, en el capítulo siete, se presentan las conclusiones y perspectivas de este trabajo.

## 1.1. ¿Campos Escalares Fundamentales en la Naturaleza?

Los últimos cien años han sido espectaculares en el avance de la Física. Surgió la Teoría de la relatividad tanto especial como general. Además surgió la mecánica cuántica. Ambas teorías modificaron nuestra visión del universo. La mecánica cuántica cambió nuestra perspectiva de lo muy pequeño, mientras que la relatividad general, apoyada en observaciones astronómicas, dio una nueva imagen del Universo a grandes escalas.

Los viejos esquemas son renovados continuamente. Hablar de *lo fundamental* debe estar íntimamente ligado a una etapa histórica determinada. Por ejemplo, en 1932, la naturaleza estaba formada por tres ladrillos “fundamentales”: el protón, el neutrón y el electrón. Pero el descubrimiento de nuevas partículas en los rayos cósmicos y en los nuevos aceleradores de partículas construidos en Stanford y en la Unión Soviética mostraron que no eran suficientes el protón y el neutrón para explicar la gran cantidad de nuevas partículas ahí descubiertas.

Tuvieron que pasar otros treinta años para establecer un nuevo esquema que actualmente conocemos como el Modelo Estándar de las Partículas Elementales. Este modelo contiene doce partículas con espín semi-entero *fundamentales*: seis quarks y seis leptones (con sus correspondientes anti-partículas). Los primeros tienen carga eléctrica fraccionaria (en unidades de la carga del electrón), y se unen en combinaciones de dos quarks, los llamados mesones, o en combinaciones de tres, llamados bariones. Los leptones son el electrón, el muón y el tau. Todos tienen la misma carga y sólo se distinguen por sus masas. Existen además tres leptones más llamados neutrinos: el neutrino del electrón, el neutrino del muón y el del tau.

Las interacciones entre estos bloques se da por medio de otras partículas, una especie de mensajeros de las fuerzas y he aquí otra vez el término fundamental, al denominar a estas interacciones como interacciones fundamentales. Estas fuerzas o interacciones son cuatro: la electromagnética, la interacción fuerte y la débil, además de la interacción gravitacional. Los mediadores de dichas interacciones son el fotón, los gluones y los bosones W y Z respectivamente. Para la gravedad no hay todavía una formulación en la cual exista un bosón de norma que propague esta interacción, aunque el nombre asociado a dicha partícula hipotética es de uso común: el gravitón.

Sin embargo, el modelo estándar necesita de un ingrediente más para que sea predictivo y se ajuste a la realidad. Se trata de una partícula con espín cero y se le conoce como bosón de Higgs. Dicho ingrediente se encarga de darle masa a todas las demás partículas. Lo

anterior se logra por medio de un mecanismo conocido como rompimiento espontáneo de la simetría. El bosón de Higgs es por lo tanto, a las escalas de energía actuales, la única partícula escalar que se considera fundamental. El pequeño inconveniente es que esta pieza necesaria en el modelo no se ha observado experimentalmente y se espera que sea inestable.

El Modelo Estándar ha sido probado y es hasta ahora el modelo más exitoso hecho por el hombre. Las pruebas de precisión a las que se ha sometido lo colocan en esa categoría. En algunos casos reproduciendo hasta con once cifras significativas el valor medido experimentalmente. Sin embargo, aunado al hecho de que el bosón de Higgs no ha sido observado, se encuentra el hecho de que el modelo estándar tiene demasiados parámetros libres, muchos de ellos ligados a esta partícula escalar. Por otra parte, a los neutrinos se les consideraba sin masa en el Modelo estándar, pero la medición del flujo de neutrinos provenientes del Sol, de reactores y neutrinos atmosféricos conducen a pensar que los neutrinos son masivos. Todo lo anterior nos lleva a suponer que debe haber Física más allá del modelo estándar.

La mayoría de las extensiones al Modelo Estándar (Teorías super-simétricas, Teorías de gran unificación, Cuerdas, etc.) involucran otro tipo de partículas escalares fundamentales además del Higgs.

Por si fuera poco, esas extensiones actualmente no sólo tienen la motivación teórica, sino además una impresionante motivación experimental que proviene de Cosmología y observaciones astronómicas: toda la materia descrita por el Modelo Estándar de las Partículas elementales no es suficiente para explicar la expansión acelerada del universo, ni para explicar los fenómenos asociados a la materia oscura, en particular a escala galáctica, donde las curvas de rotación del gas galáctico requiere de la existencia de un tipo de materia masiva que interactúe tan débilmente con la materia ordinaria que no ha sido posible determinar su naturaleza mediante el uso de detectores ordinarios.

Esto nos lleva a una conclusión muy estimulante: pueden existir más partículas exóticas, entre ellas, partículas bosónicas representadas por campos escalares que sean fundamentales en la naturaleza, además del bosón de Higgs. Y éstas pueden formar lo que se conoce actualmente como Materia Oscura y Energía Oscura. El modelo mejor estudiado hasta el momento, que propone partículas que pueden fungir como materia oscura es el modelo supersimétrico de partículas, que es una extensión del Modelo Estándar.

Hasta el momento, ninguna partícula escalar fundamental (en el sentido ya explicado) ha sido observada. Sin embargo, esta situación puede cambiar rápidamente porque dentro de muy poco un nuevo acelerador de protones, el LHC, entrará en funcionamiento y dadas sus características el Higgs podría ser observado. Es justo mencionar que las escalas de energía asociadas a nuevos experimentos, podrían determinar si las partículas supersimétricas existen y pueden jugar el papel de energía oscura. En este trabajo la inclinación es por extensiones de los modelos actuales que promueven la existencia de partículas bosónicas que puedan representarse con campos escalares.

La posibilidad de que las nuevas observaciones astronómicas puedan confirmar o descartar los distintos modelos cosmológicos entre los que se encuentran algunos que tienen por

ingrediente fundamental a partículas escalares, es cada día mas cercana. En la siguiente sección describiremos más detenidamente el escenario cuya hipótesis es que partículas bosónicas componen a la materia oscura y el cual explica exitosamente fenómenos a escala cósmica bajo esta hipótesis; el modelo que se conoce como Modelo de Materia Oscura Escalar.

## 1.2. Modelo de Materia Oscura Escalar

El modelo de materia oscura escalar (SFDMM por sus siglas en inglés) propone que la materia oscura es de naturaleza escalar, asumiendo que su tensor de energía-impulso es el de un campo escalar real

$$T_{\mu\nu} = \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\Phi^{,\sigma} \Phi_{,\sigma} + 2V(\Phi)) \quad (1.1)$$

cuyo potencial está dado por

$$V(\Phi) = \frac{m_\Phi^2}{8\pi G \lambda^2} \left[ \cosh(\sqrt{8\pi G} \lambda \Phi) - 1 \right] \quad (1.2)$$

en unidades donde  $\hbar = c = 1$ .  $\lambda$  y  $m_\Phi$  son los parámetros libres del modelo y la última es reconocida como la masa de las partículas de espín cero asociadas al campo escalar. En realidad para hacer compatible la idea de partículas escalares con este campo escalar clásico es necesario suponer que el tensor de energía-impulso (ec. 1.1) que aparece en el lado derecho de las ecuaciones de Einstein es el valor de expectación del operador cuantico  $\hat{T}_{\mu\nu}$ , (éste operador resulta de considerar al campo  $\hat{\Phi}$  con un operador cuántico) es decir, que estamos trabajando en una aproximación semiclásica. En este modelo además el campo escalar está mínimamente acoplado a la gravedad.

Para reproducir las observaciones más importantes y contundentes a escalas cosmológicas de la existencia de la materia oscura, dichos parámetros han sido fijados a los valores siguientes:

$$\begin{aligned} m_\Phi &\sim 10^{-23} \text{ eV} \\ \lambda &\sim 20 . \end{aligned} \quad (1.3)$$

En especial el valor  $m_\Phi$  es tal que en éste modelo las estructuras más pequeñas que  $1/m_\Phi \sim 10pc$  no se puedan formar. En el modelo estándar cosmológico, conocido como  $\Lambda$ CDM, donde no se supone la naturaleza de la materia oscura, pero se asume que las partículas de materia oscura son puntuales, resulta que la predicción de estructuras pequeñas es más abundante que lo observado; en este sentido, el SFDMM resulta consistente con las observaciones al costo de fijar los parámetros de la teoría, de modo que no hay parámetros

libres. Tenemos entonces que el modelo SFDMM es exitoso a escalas cosmológicas [1], y resulta muy interesante entonces responder si lo es también a escalas astrofísicas. Por ejemplo, analizar si este tipo de materia oscura puede formar estructuras cuyas características correspondan a las asociadas a los halos de materia oscura galácticos. Resulta natural pensar que estos halos son objetos los cuales a primera aproximación pueden tratarse como objetos newtonianos. Entonces resultaría útil estudiar las ecuaciones de Einstein acopladas a la ecuación de la dinámica del campo escalar en el límite newtoniano. Resulta ser que en éste límite dichas ecuaciones son bien aproximadas por el sistema Schrödinger–Poisson.

El problema interesante será reproducir el comportamiento de la materia oscura a escalas galácticas utilizando este modelo con los mismos parámetros fijados utilizando datos cosmológicos. Una de las motivaciones para realizar el presente trabajo doctoral es abordar dicho problema. Ha habido avances significativos en simetría esférica, donde se ha mostrado que las escalas de tiempo de relajación y virialización de sobredensidades que colapsan son consistentes con las observaciones, tanto para estructuras galácticas como estructuras mayores [2]. Ha quedado claro que la materia oscura escalar forma estructuras estables y virializadas, que mimifican halos galácticos observados. Pero es preciso generalizar estos resultados y estudiar el colapso de sobredensidades de materia oscura con simetrías mas generales que la esférica, o sea es necesario verificar que distribuciones con simetría arbitraria de campo escalar evolucionen de tal manera que formen dichos objetos estables. Es claro que será necesario que el perfil de densidad materia de estas estructuras sea tal, que ayude a explicar el comportamiento observado de las curvas de rotación.

Como ventajas adicionales del SFDMM sobre el Modelo de materia oscura Fría con constante cosmológica ( $\Lambda$ CDM) podemos mencionar que debido al valor pequeño de  $m_\phi$  el perfil de densidad de las estructuras (galaxias, cúmulos, etc.) es suave en el origen pues  $1/m_\phi$  es grande, lo que está de acuerdo con lo que se infiere de las observaciones de las curvas de rotación [3], a diferencia de las predicciones del modelo que asume que la materia oscura es representada por partículas puntuales.

A continuación describiremos otro tipo de objetos que pueden tener relevancia astrofísica los cuales están formados por campos escalares complejos, las Estrellas de Bosones.

### 1.3. Estrellas de Bosones

Las estrellas de bosones (EB) son soluciones de las ecuaciones de Einstein cuya materia es un campo escalar complejo autogravitante, son soluciones localizadas del sistema de ecuaciones acopladas Einstein Klein-Gordon (EKG) y dependiendo del potencial para el campo escalar existe una clasificación de las configuraciones obtenidas. En este trabajo nos referimos a las estrellas de bosones como aquellas con un potencial del tipo  $m^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4/2$  donde  $m$  es la masa del campo escalar complejo y  $\lambda$  es el parámetro de autointeracción [4]. Estas soluciones del sistema EKG se obtienen asumiendo simetría esférica, un campo escalar armónico  $\Phi(r, t) = \phi(r)\exp[-i\omega t]$  y condiciones de regularidad en el origen y de



planitud asintótica para el espacio-tiempo. El espacio-tiempo, dada la forma funcional del campo escalar resulta ser estático. Mas aún, las soluciones de esta manera construidas, llamadas también configuraciones de equilibrio, son completamente regulares y no presentan horizontes de sucesos.

La estabilidad de las EB ha sido estudiada, bajo distintos métodos: usando perturbaciones radiales infinitesimales [5], [6], [7] y [8] y también bajo perturbaciones radiales masivas en distintas geometrías y para diferentes valores de  $\lambda$  [9], [10] y [11]. Lo que se encuentra es que existen configuraciones de equilibrio estables ante perturbaciones radiales tanto con materia o sin ella y también configuraciones de equilibrio que ante este tipo de perturbaciones o bien migran hacia una configuración estable, colapsan gravitacionalmente a configuraciones con horizontes de sucesos o se dispersan.

### 1.3.1. Las ecuaciones

La acción que da lugar a las EB es la de un campo escalar complejo autogravitante y con autointeracción de la forma

$$I = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R - \int d^4x \left[ \sqrt{-g} \frac{1}{2} (\hbar^2 g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + m^2 c^2 |\Phi|^2 + \frac{\lambda}{2} |\Phi|^4) \right], \quad (1.4)$$

de esta acción se obtienen las ecuaciones de campo

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

con el tensor de energía-impulso dado por

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} [L_M] \\ &= \frac{1}{2} \hbar^2 (\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\hbar^2 g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi^* + m^2 c^2 |\Phi|^2 + \frac{\lambda}{2} |\Phi|^4), \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde el Lagrangiano de materia  $L_M$  es la expresión entre corchetes cuadrados de (1.4). La dinámica del campo escalar complejo  $\Phi$  está dada por las ecuaciones de Klein-Gordon (KG)

$$\left( \square - \frac{\lambda}{\hbar^2} |\Phi|^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Phi = 0 \quad (1.7)$$

$$\left( \square - \frac{\lambda}{\hbar^2} |\Phi|^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Phi^* = 0, \quad (1.8)$$

con el operador d'alambertiano dado por  $\square = (1/\sqrt{-g}) \partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu]$ . A diferencia de las estrellas modeladas con un tensor de energía-impulso de fluido perfecto, para las EB no se

especifica una ecuación de estado; la interacción de las partículas materiales está toda contenida en la acción. Por lo tanto, una vez que las condiciones de frontera y las condiciones iniciales estén determinadas, las ecuaciones (1.5), (1.7) y (1.8) determinan completamente, hasta una elección de norma, la métrica y  $\Phi$ .

Por último, debido a que la acción es invariante ante un cambio de fase constante  $\Phi \rightarrow \Phi e^{i\sigma}$  existe una corriente de Noether  $j^\nu$  y su correspondiente carga conservada, el número de partículas  $N$ :

$$j^\nu = \frac{i\hbar}{2c} \sqrt{-g} g^{\nu\mu} (\Phi^* \partial_\mu \Phi - \Phi \partial_\mu \Phi^*), \quad N = \int j^0 d^3x. \quad (1.9)$$

### 1.3.2. Configuraciones de Equilibrio

Las configuraciones de equilibrio son soluciones de las ecuaciones (1.5) y (1.7) para un espacio-tiempo estático y con simetría esférica. Soluciones de este tipo se obtienen si el campo escalar es de la forma

$$\Phi(r, t) = \phi(r) \exp[-i\omega t]. \quad (1.10)$$

En coordenadas de Schwarzschild, el elemento de línea para un espacio-tiempo estático con simetría esférica se escribe

$$ds^2 = -a^2 dt^2 + a^2 dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1.11)$$

donde  $a$  y  $\alpha$  son funciones de la coordenada radial  $r$ . En lo que resta de este capítulo utilizaremos unidades en las que  $c = \hbar = 1$ . Con estas condiciones de simetría las ecuaciones de Einstein por resolver son la componente  $\{tt\}$ , correspondiente a la constricción Hamiltoniana, y la componente  $\{rr\}$ . Estas ecuaciones se pueden escribir como ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para  $a$  y  $\alpha$  respectivamente. Además, para obtener el comportamiento de  $\phi$  hay que resolver la ecuación de KG. Antes de resolver estas ecuaciones se introducen las nuevas variables adimensionales

$$\bar{r} = mr \quad \bar{t} = \omega t \quad \bar{\phi} = \sqrt{4\pi G} \phi \quad \bar{\alpha} = \alpha \frac{m}{\omega} \quad \Lambda = \frac{\lambda}{m^2 4\pi G}, \quad (1.12)$$

en términos de estas variables el conjunto de ecuaciones a resolver es el siguiente

$$\begin{aligned}
\sigma &= \bar{\phi}' \\
\sigma' &= \bar{\phi} \left( \frac{a'}{a} - \frac{\bar{\alpha}'}{\bar{\alpha}} - \frac{2}{\bar{r}} \right) - \bar{\phi} \frac{a^2}{\bar{\alpha}^2} + a^2(1 + \Lambda \bar{\phi}^2) \bar{\phi} \\
\frac{a'}{a} &= \frac{1 - a^2}{2\bar{r}} + \frac{\bar{r}}{2} \left[ \bar{\phi}^2 \frac{a^2}{\bar{\alpha}^2} + \sigma^2 + a^2(\bar{\phi}^2 + \frac{1}{2}\Lambda \bar{\phi}^4) \right] \\
\frac{\bar{\alpha}'}{\bar{\alpha}} &= \frac{a^2 - 1}{\bar{r}} + \frac{a'}{a} - \bar{r} a^2 \bar{\phi}^2 (1 + \frac{1}{2}\Lambda \bar{\phi}^2).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Buscamos soluciones que sean regulares en el origen y que representen un objeto aislado. La primera característica se obtiene exigiendo que  $a(\bar{r} = 0) = 1$  y que todas las otras cantidades sean finitas en  $\bar{r} = 0$ ; para la segunda se necesita que  $\bar{\phi}(\bar{r} \rightarrow \infty) = 0$ . En  $\bar{r} = 0$  se elige arbitrariamente el valor central del campo escalar  $\bar{\phi}(\bar{r} = 0) = \bar{\phi}_0$  (lo cual equivale en las estrellas de fluidos perfectos a elegir la densidad central) mientras que su derivada la elegimos cero para que sea suave en el origen. Tenemos entonces un problema de valores a la frontera en dos puntos ya que en  $\bar{r} = 0$  conocemos todos los valores de las funciones excepto el de  $\bar{\alpha}$  mientras que en la otra frontera tenemos la condición  $\bar{\phi}(\bar{r} \rightarrow \infty) = 0$ . Este tipo de condiciones en las fronteras define un problema de eigenvalores donde el eigenvalor  $\omega$  toma diferentes valores, dados  $\bar{\phi}_0$  y  $\Lambda$  fijos, según el valor que tome  $\bar{\alpha}(\bar{r} = 0)$ .

Para cada  $\bar{\phi}_0$  y  $\Lambda$  fijos se encuentra un conjunto de soluciones  $\{\bar{\phi}^i(\bar{r}), a^i(\bar{r}), \bar{\alpha}^i(\bar{r})\}$  con  $\{i = 0, 1, 2, \dots\}$  las cuales en  $\bar{r} = 0$  se diferencian por el valor de  $\bar{\alpha}^i(0)$ . Estas soluciones tienen la característica de que la  $\bar{\phi}^i(\bar{r})$  tiene  $i$  nodos en la dirección radial. El valor de  $\omega$  para cada solución  $i$ -ésima del campo escalar (1.10) se encuentra a partir de la definición de  $\bar{\alpha}$  dada en (1.12). Debido a la simetría esférica y a que estamos modelando un objeto aislado, lejos de la fuente el espacio-tiempo debe aproximarse asintóticamente al espacio-tiempo de Minkowski, lo cual implica  $\alpha(r \rightarrow \infty) = 1$  de manera que de la definición para  $\bar{\alpha}$  se obtiene que  $\omega^i = m/\bar{\alpha}(\bar{r} \rightarrow \infty)$ . Se encuentra que  $0 < \omega^i < m$  y  $\omega^i < \omega^j$  para  $i < j$ . Tenemos que precisar que estas ecuaciones las resolvimos numericamente empleando un dominio espacial finito con fronteras  $\bar{r} = 0$  y  $\bar{r} = \bar{r}_{max}$ ; las condiciones de frontera, para las funciones en  $\bar{r} \rightarrow \infty$ , se exigen entonces en  $\bar{r} = \bar{r}_{max}$ . Las dos características de  $\omega^i$ ,  $0 < \omega^i < m$  y  $\omega^i < \omega^j$  para  $i < j$ , se pueden corroborar para los casos en que  $i = 0$  e  $i = 1$  usando los valores de  $(\bar{\alpha}^2)^i(\bar{r}_{max})$  para  $i = 0, 1$  que se muestran en la figura 1.2.

En la figura 1.1 se muestran las funciones radiales con cero y un nodos  $\bar{\phi}^0(\bar{r})$  y  $\bar{\phi}^1(\bar{r})$ . El valor central del campo escalar que se eligió es  $\bar{\phi}_0 = 0,1$  y para el parámetro de autointeracción reescalado  $\Lambda = 0$ . En la figura 1.2 se muestran las funciones métricas  $a^0$ ,  $\bar{\alpha}^0$  y  $a^1$ ,  $\bar{\alpha}^1$ .

Resumiendo, para cada conjunto de valores  $\phi_0$ ,  $\lambda$  y  $m$  fijos se encuentra una familia de soluciones  $\{\Phi^i(\phi^i, \omega^i), \alpha^i, a^i\}$ . En especial, se dice que la estrella de bosones, cuya configuración de campo escalar corresponde a  $\Phi^i$  con  $i = 0$ , es una estrella de bosones en el estado

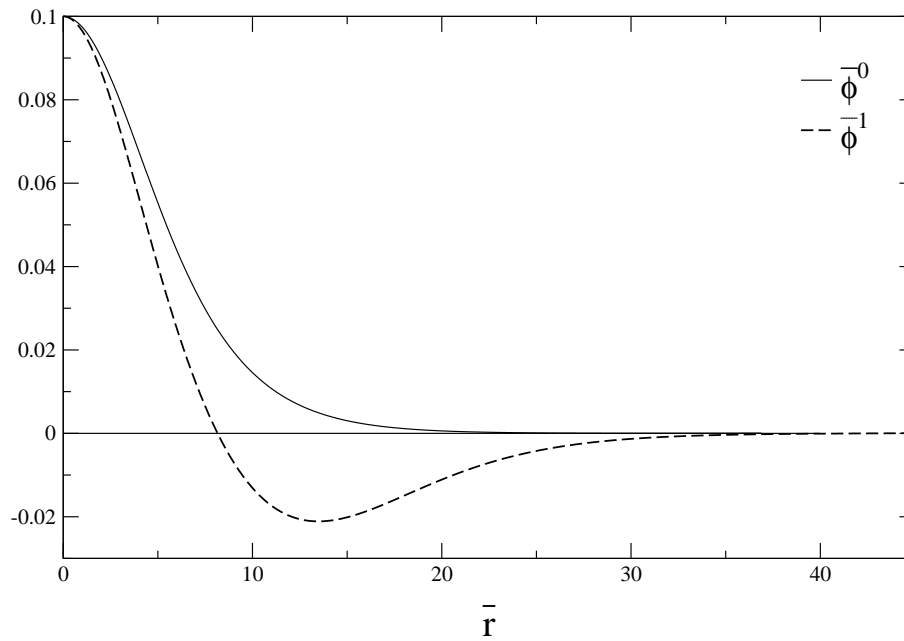


Figura 1.1: Funciones radiales  $\bar{\phi}^0(\bar{r})$  y  $\bar{\phi}^1(\bar{r})$  con cero y un nodos correspondientes a dos configuraciones de equilibrio con  $\Lambda = 1$  y  $\bar{\phi}_0 = 0,1$ .

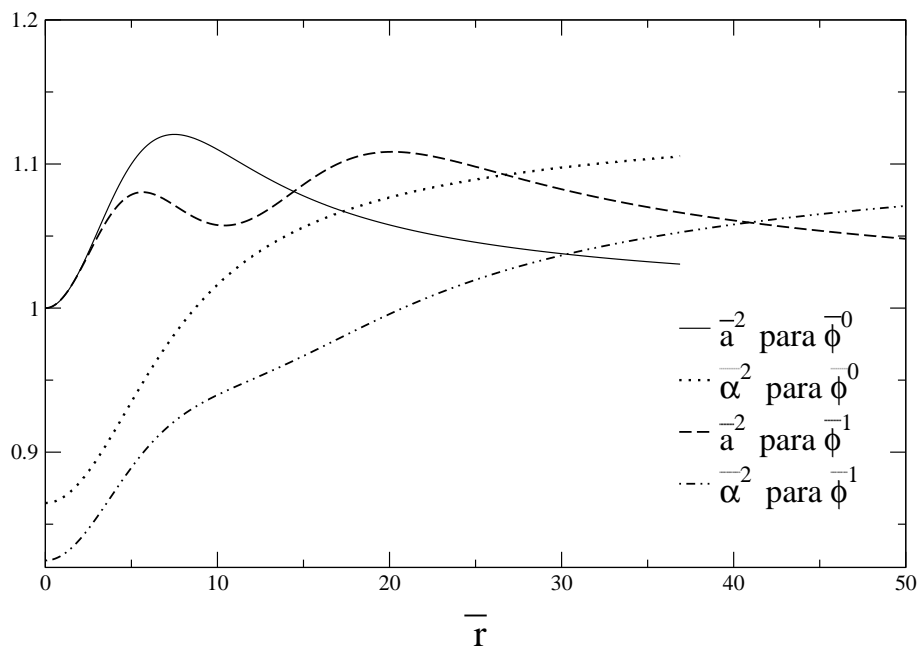


Figura 1.2: Funciones métricas de dos configuraciones de equilibrio con  $\Lambda = 1$  y  $\bar{\phi}_0 = 0,1$  cuyas funciones radiales  $\bar{\phi}^0(\bar{r})$  y  $\bar{\phi}^1(\bar{r})$  semuestran en la figura 1.1

base mientras que las configuraciones con  $i > 0$  son configuraciones excitadas. Esto es debido a que  $\phi^0$  no tiene nodos en la dirección radial y a que  $\omega^0$  (que en unidades físicas tiene unidades de energía) es el menor de los  $\omega^i$ . Veremos en la siguiente sección que mientras las estrellas de bosones en el estado base pueden ser estables o inestables ante perturbaciones radiales, las estrellas en estados excitados son inestables.

La masa de las EB se define considerando que éstas son objetos localizados de manera que en la región de vacío la métrica se aproxima asintóticamente a la métrica de Schwarzschild, entonces

$$M = \frac{1}{2} \bar{r}_{max} \left[ 1 - \frac{1}{a^2(\bar{r}_{max})} \right] \frac{m_{pl}^2}{m}, \quad (1.14)$$

donde  $m_{pl}$  es la masa de Planck.

Además de su masa, otra cantidad importante de las estrellas de bosones es su número de partículas  $N$  que es la carga conservada definida por (1.9). En general se cumple que  $mN$  es diferente de  $M$  y la diferencia entre estas define es la energía de amarre  $E_b = M - Nm$ .

En la figura 1.3 se muestra la masa  $M$  contra el valor central del campo escalar  $\bar{\phi}_0$  para distintas EB en el estado base con distintos valores de  $\Lambda$ . Los puntos marcados con un círculo son configuraciones con un valor máximo de la masa  $M$  y  $\bar{\phi}_0 = \bar{\phi}_c$ , estos puntos definen dos principales ramas de configuraciones, la estable, que comprende configuraciones a la izquierda y la inestable formada por configuraciones a la derecha. Los triángulos marcan las configuraciones con energía de amarre  $E_b = 0$ , para las configuraciones sobre las curvas a la izquierda (derecha) del triángulo se cumple  $M - Nm < 0$  ( $M - Nm > 0$ ). Acerca de la estabilidad de las EB hablaré en la siguiente sección.

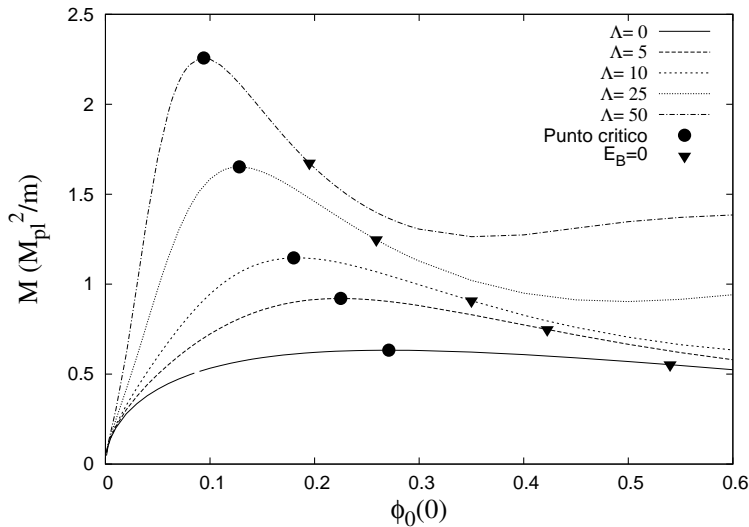


Figura 1.3: Estrellas de Bosones en el estado base para distintos valores de  $\Lambda$ .

### 1.3.3. Estabilidad

Los primeros trabajos donde se estudia la estabilidad de las EB consideraron perturbaciones radiales pequeñas que mantienen la masa y el número de partículas constantes [5]-[8]; se aprendió que las configuraciones con  $\phi_0 < \phi_c$  al ser perturbadas, oscilan con una frecuencia de oscilación característica mientras que las configuraciones con  $\phi_0 > \phi_c$  son inestables. El problema de la evolución temporal y la estabilidad bajo perturbaciones radiales finitas ha sido tratado en [9]-[11]. La evolución temporal de las EB ha sido estudiada en la formulación 3 + 1 de la gravedad y considerando simetría esférica, en este marco, la manera de mantener el vector shift  $\beta^i$  igual a cero en cada superficie con tiempo constante, de tal forma que el elemento de línea permanezca como en (1.11) es eligiendo la condición de rebanadas polares [13], que exige  $K_{00} + K_{\varphi\varphi} = 0$ , donde  $K_{ij}$  son las componentes de la curvatura extrínseca. Esta elección resulta útil en la evolución de objetos esféricamente simétricos porque nos avisa de estar cerca de un posible horizonte aparente ya que en este caso la función lapso  $\alpha$  decrece rápidamente aproximándose a cero [13]. Las ecuaciones a resolver son las ecuaciones de KG para  $\Phi$ , la componente  $\{tt\}$  de las ecuaciones de Einstein, que es la constricción Hamiltoniana, la componente  $\{rr\}$  que es la condición polar en cada superficie y la componente  $\{tr\}$ . De estas ecuaciones la de KG y la  $\{tr\}$  son ecuaciones de evolución para el campo escalar y para  $a$  respectivamente mientras que la  $\{rr\}$  es una ecuación diferencial ordinaria para el lapso  $\alpha$  que puede ser integrada para cada superficie con tiempo constante una vez que las demás variables son conocidas. Finalmente la constricción Hamiltoniana generalmente es usada para medir el grado de precisión en la solución numérica. El dato inicial para la evolución temporal debe satisfacer las ecuaciones de constricción, entonces si queremos evolucionar configuraciones de equilibrio perturbadas, por ejemplo aumentando el valor central del campo escalar para una configuración en el estado base, el procedimiento es resolver las constricciones para dicha configuración inicial perturbada y encontrar la configuración a un tiempo posterior mediante las ecuaciones de evolución temporal exigiendo que en cada superficie de tiempo constante se satisfagan las constricciones. Al perturbar las configuraciones en el estado base aumentando o disminuyendo campo escalar se encuentra que las EB con  $\sigma_c < \sigma_0$  evolucionan a configuraciones también en el estado base pero con menor masa que las configuraciones iniciales emitiendo campo escalar. Al perturbar las configuraciones con  $\sigma_c > \sigma_0$  disminuyendo la cantidad de campo escalar evolucionan hacia configuraciones en el estado base que se encuentran en la rama estable, sin embargo, su evolución al perturbarlas aumentándoles el campo escalar depende del signo de la energía de amarre. Las que se encuentran a la derecha de la configuración con  $E_B = 0$  se dispersan mientras que las que se encuentran a la izquierda colapsan a hoyos negros. Por último, las configuraciones en estados excitados son todas inestables [10], [11].

En esta tesis se muestra que efectivamente, la inestabilidad de las estrellas de bosones es de dos tipos: la configuración colapsa y forma un hoyo negro o la configuración explota, la materia es liberada y el espacio-tiempo final es el de Minkowski.

# Capítulo 2

## El sistema Schrödinger-Poisson

### 2.1. El límite Newtoniano de las ecuaciones de EKG

En esta sección desarrollaremos el Límite Newtoniano de las ecuaciones de EKG siguiendo el formalismo que se utiliza para obtener el límite Postnewtoniano de la gravedad. Básica-

mente, este formalismo aprovecha el hecho de que para algunos sistemas gravitacionales el parámetro  $v/c$  es pequeño ( $v$  es la velocidad relativa característica de las fuentes y  $c$  la velocidad de la luz) de manera que es posible hacer una expansión perturbativa de las ecuaciones de Einstein utilizando este parámetro. Para dichos sistemas, los resultados obtenidos resolviendo las ecuaciones perturbadas que contienen términos del parámetro de expansión a ordenes mas bajos son buenas aproximaciones de lo que se esperaría obtener con las ecuaciones completas. Específicamente el límite Newtoniano o primer orden Postnewtoniano se recupera con las ecuaciones que contienen términos de orden  $(v/c)^2$ . El formalismo Postnewtoniano de las ecuaciones de Einstein ha sido empleado, por ejemplo, en el cálculo de correcciones a la órbita Newtoniana de Mercurio alrededor del Sol, "corroborando" predicciones de la Relatividad General. Además se ha extendido para teorías alternativas a la Gravedad de Einstein, como las teorías tensoriales escalares, para imponer cotas en sus parámetros libres.

El procedimiento consiste en calcular observables de sistemas para los cuales este formalismo puede ser implementado, los resultados, que dependen de los parámetros libres, son comparados con las observaciones fijando dichos parámetros. Otro caso en el que las aproximaciones Postnewtonianas se han utilizado es en el de los sistemas binarios de estrellas, en los cuales las estrellas se aproximan gradualmente una a la otra debido a la emisión de radiación gravitacional; para muchos de éstos sistemas se cumple que  $v/c$  es pequeño, de manera que aproximaciones Postnewtonianas pueden usarse para describir las formas de onda de la radiación gravitacional emitida. Sin embargo, para calcular dichas formas de onda de manera mas precisa, tal que puedan ser contrastadas con posibles observaciones de

detectores de radiación gravitacional, correcciones a más altos ordenes en el parámetro de expansión deben ser calculadas. Se cree que al menos hasta el tercer orden Postnewtoniano debe ser considerado, esto es, que es necesario calcular las correcciones que se derivan de las ecuaciones que contienen términos de orden  $(v/c)^6$ .

Las ecuaciones de Schrödinger-Poisson (SP) son reconocidas en la literatura como el límite Newtoniano, de las ecuaciones de EKG, sin embargo, una deducción clara de este límite no ha sido publicada. En la primera sección de este capítulo se describe la manera en que a través del formalismo Postnewtoniano se encuentra la ecuación de Poisson y la ecuación tipo Schrödinger a las que se reducen las ecuaciones de EKG en el límite Newtoniano, es decir, cuando los efectos relativistas del sistema de campo escalar autogravitante y con autointeracción se desprecian, o equivalentemente, cuando para este sistema la gravedad Newtoniana es dominante. El utilizar el formalismo Postnewtoniano nos permite definir sin ambigüedades las cantidades físicas del sistema, ganando intuición física de los objetos descritos por las ecuaciones de SP; más aún, el formalismo Postnewtoniano permite, al resolver las ecuaciones que contienen términos donde el parámetro de expansión aparece a ordenes más altos, calcular correcciones relativistas que podrían considerarse importantes en la evolución del sistema.

### 2.1.1. Las ecuaciones

Lo complicado de aplicar el formalismo Postnewtoniano fue decidir cual sería el parámetro de expansión ya que no es claro hablar de velocidades del sistema para un campo escalar clásico, como lo es hablar de la velocidad de Mercurio alrededor del Sol. Entonces la manera en la que se recupera la ecuación de Schrödinger como aproximación no relativista de la ecuación de Klein Gordon en el espacio-tiempo de Minkowski fue útil como guía en nuestro caso.

Sabemos que, en el espacio-tiempo plano, al hacer la sustitución estándar en mecánica cuántica

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}, \quad (2.1)$$

en la expresión de la energía relativista para una partícula libre,  $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ , se obtiene la ecuación de KG (1.7) con  $\lambda = 0$  y  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ .

$$\left( -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Phi_{KG} = 0. \quad (2.2)$$

Una solución a esta ecuación está dada por

$$\Phi_{KG} = \exp[-i/\hbar(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})], \quad (2.3)$$

$\Phi_{KG}$ , en principio describiría entonces una partícula libre relativista de masa  $m$  y momento



$\vec{p}$  con energía  $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ . Por otra parte, substituyendo (2.1) en la aproximación no relativista de la energía para una partícula libre, la cual solo toma en cuenta la energía cinética  $E_K = p^2/2m$  se obtiene la ecuación de Schrödinger

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_S = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi_S, \quad (2.4)$$

cuya solución está dada por

$$\Psi_S = \exp[-i/\hbar(E_K - \vec{p} \cdot \vec{x})]. \quad (2.5)$$

Considerando que la energía relativista puede ser expandida como  $E = \pm mc^2[1 + \frac{p^2}{2m^2c^2} + \vartheta(\frac{p^2}{m^2c^2})^2]$  y haciendo la aproximación

$$E \approx mc^2[1 + \frac{p^2}{2m^2c^2}] = mc^2 + E_k, \quad (2.6)$$

es fácil ver que la ecuación de Schrödinger es la aproximación de la ecuación de KG que sólo retiene términos lineales del cociente de la energía cinética y la energía en reposo de la partícula  $E_K/mc^2$ , es decir, que se desprecian los términos de orden  $\vartheta(\frac{p^2}{m^2c^2})^2$  y además que la ecuación de Schrödinger describe la dinámica de la partícula sin considerar su energía en reposo, la cual es simplemente una constante aditiva de la energía. Tomando en cuenta (2.6) podemos escribir  $\Phi_{KG}$  como

$$\Phi_{KG} \approx \exp[-i/\hbar mc^2 t]\Psi_S, \quad (2.7)$$

que al ser substituida en la ecuación de Klein-Gordon (2.2) se obtiene

$$\exp[-i/\hbar mc^2 t] \left[ 2\frac{i}{\hbar}m\partial_t\Psi_S + \nabla^2\Psi_S - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\Psi_S \right] = 0. \quad (2.8)$$

Al dividir esta expresión entre  $mc^2$  y al calcular las derivadas espaciales o temporales de cada uno de los términos se encuentra que el término que involucra la segunda derivada temporal es del orden  $\vartheta(\frac{p^2}{m^2c^2})^2$  mientras que los otros términos son del orden  $\vartheta(\frac{p^2}{m^2c^2})$ . Vemos entonces que la ecuación de Schrödinger se recupera al despreciar el término de orden  $\vartheta(\frac{p^2}{m^2c^2})^2$ .

El procedimiento que hemos seguido para recuperar la ecuación de Schrödinger como límite no relativista de la de Klein-Gordon en el espacio plano nos da una idea de cómo hacerlo en el caso que nos ocupa, en particular nos da el *hint* de tomar como parámetro

---

\*Sabemos que esta interpretación no es correcta puesto que implicaría una densidad de probabilidad negativa, entre otras inconsistencias, en realidad es necesario el marco de la llamada "segunda cuantización" para tener una interpretación de partícula exitosa.

de expansión  $\epsilon^2$  en la aproximación Postnewtoniana el cociente  $p^2/(m^2c^2)$ . Además, en analogía con (2.7) escribiremos

$$\Phi \approx \exp\left[\frac{-i}{\hbar}mc^2t\right]\Psi(\vec{x}, t), \quad (2.9)$$

y esperamos que la versión newtoniana de (1.7) describa la dinámica de la parte de  $\Phi$  que contenga la información solo de la energía cinética del sistema, la cual debe ser pequeña comparada con la energía en reposo, de hecho la aproximación Newtoniana de la ecuación de Klein-Gordon (1.7) de  $\Psi$  y no de  $\Phi$ . Pero además, a diferencia de lo que sucede con  $\Psi_S$ , la dinámica de  $\Psi$  se verá modificada por la gravedad producida por su propia densidad de energía. Otra condición importante en el desarrollo Postnewtoniano, como veremos más adelante, es la relación entre las derivadas temporales y espaciales de  $\Phi$  y también la relación de estas derivadas para  $\Psi$ . Notemos que en términos del parámetro  $\epsilon$  las derivadas de  $\Psi_S$  están relacionadas de la siguiente manera  $\partial_0\Psi_S \sim \epsilon^2\frac{i}{\hbar}mc\Psi_S$  y  $\partial_i\Psi_S \sim \epsilon\frac{i}{\hbar}mc\Psi_S$ , esta misma propiedad será impuesta para  $\Psi$  de manera que

$$\partial_0\Psi \sim \epsilon^2\frac{i}{\hbar}mc\Psi \quad \partial_i\Psi \sim \epsilon\frac{i}{\hbar}mc\Psi, \quad (2.10)$$

mientras que las derivadas de  $\Phi$ , considerando (2.9) y las relaciones anteriores, cumplirán

$$\partial_0\Phi \sim \frac{i}{\hbar}mc\Phi \quad \partial_i\Phi \sim \epsilon\frac{i}{\hbar}mc\Phi. \quad (2.11)$$

Las tres últimas ecuaciones junto con la definición del parámetro de expansión  $\epsilon$  son condiciones muy importantes en el desarrollo Postnewtoniano de las ecuaciones de Einstein-KG.

Ahora que las condiciones sobre el campo escalar han quedado determinadas, veamos de manera precisa cómo el tensor métrico y las cantidades que se lo involucran al ser calculadas pueden escribirse como expansiones en términos del parámetro  $\epsilon$ . Intuitivamente es claro que el hecho de que la energía cinética de las fuentes sea mucho menor que su energía en reposo, esto es que  $\epsilon \ll 1$ , implica en parte una deformación del espacio tiempo plano pequeña (su masa en reposo también debe ser tomada en cuenta), formalmente esta característica se conoce como la condición de gravedad débil. De la experiencia con la solución de Schwarzschild se sabe que es posible encontrar un sistema de coordenadas en las cuales esta condición se expresa expandiendo el tensor métrico alrededor de la métrica de Minkowski en potencias de  $\epsilon$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + g_{00}^2 + g_{00}^4 + \dots \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + g_{ij}^2 + g_{ij}^4 + \dots \\ g_{i0} &= g_{i0}^3 + g_{i0}^5 + \dots, \end{aligned} \quad (2.12)$$

entendiéndose que la perturbación  $g_{\mu\nu}^N$  es de orden  $\epsilon^N$ . Tenemos ahora los elementos básicos

para calcular el tensor de energía-impulso del campo escalar y verificar que se satisface el tercer ingrediente del límite Newtoniano, que es que la densidad de energía es mucho mayor que las presiones. Los otros dos ingredientes son: el parámetro de expansión es pequeño y la gravedad débil. De la definición (1.6), usando las relaciones (2.10) y (2.11) y la forma de la métrica (2.12), se encuentra que el tensor de energía-impulso se puede escribir como

$$\begin{aligned} T_{00} &= T_{00}^0 + T_{00}^2 + \dots \\ T_{0i} &= T_{0i}^1 + T_{0i}^3 + \dots \\ T_{ij} &= T_{ij}^2 + T_{ij}^4 + \dots, \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde el superíndice de  $T_{\alpha\beta}^N$  indica que el término es de orden  $\epsilon^N m^2 c^2$ . Tenemos entonces que los términos asociados a las presiones  $T_{ij}$  son  $\epsilon^2$  más pequeños que el término asociado a la densidad de energía  $T_{00}$ .

Contamos ya con los elementos básicos para implementar el formalismo Postnewtoniano en el sistema de un campo escalar autogravitante y autointeractuante y en especial se ha vuelto evidente que la posibilidad de tratar a este sistema Newtonianamente, esto es que la dinámica del campo escalar y de las componentes métricas sean descritas por el límite Newtoniano de las ecuaciones de Einstein-KG, depende básicamente de la magnitud del parámetro de expansión  $\epsilon$ ; si éste es suficientemente pequeño (más tarde quedará claro el orden de magnitud de  $\epsilon$  de manera que sea *suficientemente* pequeño) las ecuaciones derivadas mediante el formalismo Postnewtoniano a orden  $\epsilon^2$  o ecuaciones Newtonianas nos darán una buena descripción del sistema.

Empezaremos por obtener la ecuación que describe la dinámica del campo Newtoniano  $\Psi$ . Una forma elegante de hacerlo es a través de la ecuación de Euler-Lagrange aplicada al lagrangiano de materia  $L_M$ , el cual está dado por el término entre corchetes cuadrados de la expresión para la acción (1.4). Usando (2.10)-(2.11) y (2.12), el lagrangiano se puede escribir como la suma  $L_M = (1/2) \sqrt{-g}(L_M^2 + L_M^4 + \dots)$  donde el superíndice de  $L_M^N$  indica que el término es de orden  $\epsilon^N m^2 c^2 |\Psi|^2$ . En especial

$$\begin{aligned} L_M^2 &= -g_{00}^2 m^2 c^2 \Psi \Psi^* - i\hbar m c (\Psi^* \partial_0 \Psi - \Psi \partial_0 \Psi^*) \\ &+ \hbar^2 \partial^i \Psi \partial_i \Psi^* + \frac{\lambda}{2} |\Psi|^4. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Debemos aclarar aquí que el término  $\frac{\lambda}{2} |\Psi|^4$  lo incluimos en  $L_M^2$  por conveniencia, de manera que la ecuación que se obtenga a partir de esta parte del lagrangiano sea del tipo de Schrödinger no lineal. El incluir este término de autointeracción restringe el orden de magnitud del parámetro  $\lambda$ , esto se discute con detalle en la última sección de este capítulo.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtienen a partir de  $L_M^2$  son

$$\begin{aligned} -2i\hbar m c \partial_0 \Psi - \hbar^2 \nabla^2 \Psi - g_{00}^2 m^2 c^2 \Psi + \lambda |\Psi|^2 \Psi &= 0, \\ 2i\hbar m c \partial_0 \Psi^* - \hbar^2 \nabla^2 \Psi^* - g_{00}^2 m^2 c^2 \Psi^* + \lambda |\Psi|^2 \Psi^* &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ahora pasamos a las ecuaciones para la geometría. En esta parte seguimos básicamente el procedimiento descrito en [14]. Dada la expansión del tensor métrico (2.12) se construye el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  a través de las conexiones métricas  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ . En el cálculo de las conexiones se toma en cuenta que las derivadas temporales y espaciales de las componentes métricas, al igual que las derivadas del campo  $\Psi$ , satisfacen las relaciones  $\partial_0 \sim \epsilon \partial_j$ . Además se impone la condición de norma armónica

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0. \quad (2.16)$$

Esta condición simplifica las fórmulas para el tensor de Ricci. Los términos involucrados hasta orden Post-Newtoniano son

$$\begin{aligned} R_{00}^2 &= \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}^2 \\ R_{ij}^2 &= \frac{1}{2}\nabla^2 g_{ij}^2 \\ R_{00}^4 &= \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}^4 - \frac{1}{2}\partial_0^2 g_{00}^2 - \frac{1}{2}g_{ij}^2 \frac{\partial^2 g_{00}^2}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{2}(\nabla^2 g_{00}^2)^2 \\ R_{0i}^3 &= \frac{1}{2}\nabla^2 g_{i0}^3, \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde el superíndice  $N$  indica que el término  $R_{\mu\nu}^N$  es de orden  $\epsilon^N/\bar{r}^2$  y  $\bar{r}$  es la escala de distancia del sistema. La aproximación Newtoniana involucra correcciones a la métrica de Minkowski sólo a orden  $\epsilon^2$  mientras que la Postnewtoniana (o corrección a segundo orden Postnewtoniano), mantiene correcciones a orden  $\epsilon^4$ . Finalmente se escriben las ecuaciones de Einstein (1.5) que conviene reescribir como

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

donde  $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}T$ , y el signo negativo aparece por la manera en que Weinberg define en la referencia [14] el tensor de Riemann. Las ecuaciones de Einstein para las

correcciones Newtonianas y Postnewtonianas de la métrica son

$$\begin{aligned}
\nabla^2 g_{00}^2 &= -\frac{8\pi G}{c^4} T^{000} & (2.19) \\
\nabla^2 g_{ij}^2 &= -\frac{8\pi G}{c^4} \delta_{ij} T^{000} \\
\nabla^2 g_{00}^4 &= \partial_0^2 g_{00}^2 + g_{ij}^2 \frac{\partial^2 g_{00}^2}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial g_{00}^2}{\partial x^i} \frac{\partial g_{00}^2}{\partial x^i} \\
&\quad - \frac{8\pi G}{c^4} [T^{002} - 2g_{00}^2 T^{000} + T^{ij2}] \\
\nabla^2 g_{i0}^3 &= \frac{16\pi G}{c^4} T^{i01}.
\end{aligned}$$

A orden  $\epsilon^2$ , es decir en la aproximación Newtoniana, las ecuaciones de Einstein Klein-Gordon (EKG) correspondientes son (2.15) y las dos primeras del sistema (2.19) las cuales forman el sistema

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + Um\Psi + \frac{\lambda}{2m}(\Psi\Psi^*)\Psi, \quad (2.20)$$

$$\nabla^2 U = 4\pi Gm^2\Psi\Psi^*, \quad (2.21)$$

y la correspondiente para  $\Psi^*$ , donde hemos sustituido  $T^{000} = m^2c^2\Psi\Psi^*$ ,  $U = -g_{00}^2c^2/2 = -g_{ii}^2c^2/2$  y se tomó en cuenta que  $g_{ij}^2 = 0$  para  $i \neq j$ . Reconocemos que la primera ecuación, la cual determina la dinámica del campo escalar  $\Psi$ , es una ecuación tipo Schrödinger para el campo  $\Psi$  en un potencial  $U$  y con un término de autointeracción. Mientras que la segunda ecuación es la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional  $U$  donde la fuente es la densidad de masa dada por  $m^2\Psi\Psi^*$ . Entonces al orden más bajo en la expansión Postnewtoniana para el campo escalar  $\Phi = \exp[-(i/\hbar)mc^2t]\Psi$ , con  $\Psi$  no relativista y gravedad débil, la ecuación de Klein-Gordon (1.7) toma la forma de una ecuación de Schrödinger no lineal para  $\Psi$  (2.20), mientras que las de Einstein se reducen a la de Poisson (2.21).

### 2.1.2. Cantidades Físicas y Ecuaciones de Conservación

Veamos ahora el límite Newtoniano de las cantidades físicas definidas a partir del tensor Energía-Impulso. Empecemos por  $T^{00}$  que se interpreta como la densidad de energía. Para ésta componente,  $T^{000}$  y  $T^{002}$  son los únicos términos que a lo más involucran correcciones Newtonianas a la métrica,  $T^{000}$  se reconoce como energía en reposo mientras que  $T^{002}$  como la densidad de energía no relativista del sistema; calculándolas obtenemos que están

dadas por las siguientes expresiones

$$T^{000} = m^2 c^2 \Psi \Psi^* \quad (2.22)$$

$$T^{002} = 2m^2 U \Psi \Psi^* + \frac{3}{4} \lambda |\Psi|^4 - \frac{\hbar}{2} (\Psi^* \nabla^2 \Psi + \Psi \nabla^2 \Psi^*) + \frac{\hbar^2}{4} \partial_i (\Psi \partial_i \Psi^* + \Psi^* \partial_i \Psi), \quad (2.23)$$

donde hemos utilizado las ecuaciones de Euler-Lagrange derivadas de  $L_M^2$ . La densidad de energía en reposo está dada entonces por

$$e_0 = m^2 c^2 \Psi \Psi^*, \quad (2.24)$$

mientras que, a partir del término  $T^{002}$  se definen las densidades de energía cinética  $k$ , energía potencial  $w$  y energía debido a la autointeracción del campo escalar  $i$  como

$$k = -\frac{\hbar^2}{2} (\Psi^* \nabla^2 \Psi + \Psi \nabla^2 \Psi^*), \quad (2.25)$$

$$w = 2m^2 U |\Psi|^2, \quad (2.26)$$

$$i = \frac{3\lambda}{4} |\Psi|^4. \quad (2.27)$$

Por otra parte,  $T^{0i}$  y  $T^{ij}$  se interpretan como la densidad de momento  $p_i$  y la densidad de flujo de momento  $q_{ij}$  respectivamente, en el límite Newtoniano. Los términos importantes son  $T^{i01}$  y  $T^{ij2}$  y toman la forma

$$p_i = \frac{i\hbar}{2} m (\Psi^* \partial_i \Psi - \Psi \partial_i \Psi^*), \quad (2.28)$$

$$q_{ij} = \frac{\hbar^2}{2} (\partial_i \Psi \partial_j \Psi^* + \partial_i \Psi^* \partial_j \Psi) - \frac{1}{2} \delta_{ij} L_M^2. \quad (2.29)$$

Ahora veamos el aspecto de las ecuaciones de conservación  $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$  en el límite Newtoniano y las cantidades conservadas que de éstas se derivan. A orden  $\epsilon^2 m^2 c^2 / \bar{r}$ ,  $T^{\mu 0}_{;\mu} = 0$  queda

$$\partial_0 T^{000} + \partial_i T^{i01} = 0. \quad (2.30)$$

Esta ecuación implica la conservación de la energía en reposo dada por

$$E_0 = \int m^2 c^2 \Psi \Psi^* dv. \quad (2.31)$$

Es interesante mencionar en este momento que ésta cantidad conservada está relacionada con la carga de Noether (1.9) producto de la simetría de la acción (1.4) ante una transfor-

mación de fase global del campo relativista  $\Phi$ : el número de partículas  $N$ . A orden  $\epsilon^0$ , el número de partículas (1.9) está dado por

$$N = m \int \Psi \Psi^* dv. \quad (2.32)$$

De manera que la energía en reposo  $E_0$  que se está conservando se puede interpretar como la energía en reposo de  $N$  partículas de masa  $m$ . Además tiene sentido hablar de una corriente de partículas  $J$  definida en el límite Newtoniano por el término  $T^{i0^1}$  la cual se escribe como

$$J = \frac{i\hbar}{2}(\Psi^* \partial_i \Psi - \Psi \partial_i \Psi^*). \quad (2.33)$$

Por otra parte, a orden  $\epsilon^3 m^2 c^2 / \bar{r}$  de la otra ecuación de conservación  $T^{\mu i}_{;\mu} = 0$  se obtiene

$$\partial_0 T^{0i^1} + \partial_j T^{ij^2} = -T^{00^0} \partial_i U, \quad (2.34)$$

sustituyendo la densidad de momento  $T^{0i^1}$  (2.28) la densidad de flujo de momento  $T^{ij^2}$  (2.29) y la densidad de energía en reposo  $T^{00^0}$  (2.22) en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} & \partial_j \Psi^* [i\hbar m c \partial_0 \Psi + \frac{\hbar^2}{2} \nabla^2 \Psi - U m^2 \Psi - \frac{\lambda}{2} |\Psi|^2 \Psi] + \\ & + \partial_j \Psi [ -i\hbar m c \partial_0 \Psi^* + \frac{\hbar^2}{2} \nabla^2 \Psi^* - U m^2 \Psi^* - \frac{\lambda}{2} |\Psi|^2 \Psi^* ] = 0, \end{aligned}$$

que implica las ecuaciones de evolución del sistema (2.20). Este resultado era de esperarse puesto que en el límite relativista la ecuación de conservación  $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$  implica la ecuación de Klein-Gordon para el campo  $\Phi$ .

Una cantidad importante más por definir es la densidad de masa en reposo  $\rho$  cuya expresión, partiendo de la densidad de energía en reposo,  $e_0$  (2.24) toma la forma

$$\rho = m^2 \Psi \Psi^*, \quad (2.35)$$

y por consiguiente la masa total estaría dada por

$$M = m^2 \int \rho dv. \quad (2.36)$$

Esta expresión para la masa coincide con la definida a partir de la integral de la fuente del potencial gravitacional  $U$  de la ecuación de Poisson (2.21) de manera que podríamos interpretar que la fuente de  $U$  es la masa debida a  $N$  partículas de masa  $m$  según la definición de  $N$  (2.32).

En resumen, en la aproximación Newtoniana las ecuaciones a resolver son el sistema

---



---

Densidad de Masa	$\rho = m^2\Psi\Psi^*$
Densidad de Energía cinética	$k = -\frac{\hbar^2}{2}(\Psi^*\nabla^2\Psi + \Psi\nabla^2\Psi^*)$
Densidad de Energía potencial	$w = 2m^2U \Psi ^2$
Densidad de Energía de autointeracción	$i = \frac{3}{4}\lambda \Psi ^4$
Densidad de Momento lineal	$p_i = \frac{i\hbar}{2}mc(\Psi\partial_i\Psi^* - \Psi^*\partial_i\Psi)$

---



---

Figura 2.1: Cantidades físicas, en el límite Newtoniano, definidas a través del formalismo Postnewtoniano para un campo escalar autogravitante y autointeractuante.

Schrödinger-Poisson (2.20) y (2.21) mientras que las cantidades físicas son las que aparecen en la tabla 2.1

### 2.1.3. Escalas Características del Sistema

Ahora veamos cuales son los parámetros que determinan las escalas características de los sistemas descritos por las ecuaciones de Schrödinger-Poisson. De la parte del lagrangiano para el campo escalar  $\Phi$  a orden  $\epsilon^2 m^2 c^2 L_M^2$  (2.14), que da lugar al límite Newtoniano de la ecuación de Klein-Gordon, es decir, que da lugar a las ecuaciones tipo Schrödinger (2.15), nos damos cuenta, comparando los términos  $g_{00}^2 m^2 c^2 \Psi\Psi^*$  y  $\hbar^2 \partial^i \Psi \partial_i \Psi^*$ , que la longitud típica  $r$  es del orden de la longitud de onda de Compton de una partícula de masa  $m$  por el inverso de  $\epsilon$

$$r \sim \frac{1}{\epsilon} \frac{\hbar}{mc}. \quad (2.37)$$

Ahora, comparando los términos  $g_{00}^2 m^2 c^2 \Psi\Psi^*$  y  $i\hbar mc \Psi \partial_0 \Psi^*$  encontramos que el tiempo característico  $t$  del sistema, es del orden

$$t \sim \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\hbar}{mc^2}, \quad (2.38)$$

con la información acerca de  $r$ , y considerando que

$$U \sim \epsilon^2 c^2, \quad (2.39)$$



de la ecuación de Poisson (2.21) se deduce que la amplitud del campo escalar para las configuraciones Newtonianas debe ser del orden

$$|\Psi| \sim \epsilon^2 \frac{c^2}{\hbar \sqrt{4\pi G}}. \quad (2.40)$$

Finalmente, el haber incluido el término  $(\lambda/2)|\Psi|^4$  en el lagrangiano  $L_M^2$  (2.14) (que implica que la versión Newtoniana de la ecuación de Klein-Gordon sea una ecuación de Schrödinger con término de autointeracción) restringe el orden de magnitud del parámetro  $\lambda$  de manera que

$$\lambda \sim \frac{1}{\epsilon^2} \frac{4\pi G \hbar^2 m^2}{c^2}, \quad (2.41)$$

esto es, el orden de  $\lambda$  en las ecuaciones de Schrödinger (2.15) no puede ser totalmente arbitrario.

Entonces, podemos concluir que el campo escalar  $\Phi$  es “Newtoniano” si al escribirlo como el producto  $\Phi = \exp[-i/\hbar mc^2 t] \Psi(\vec{x}, t)$ , se cumple que las derivadas de  $\Psi$  satisfacen las relaciones (2.10) y su orden de magnitud es

$$|\Phi| \sim \epsilon^2 \frac{c^2}{\hbar \sqrt{4\pi G}} \quad (2.42)$$

con  $\epsilon \ll 1$ . Es interesante observar que la definición de un campo escalar  $\Phi$  como un campo escalar Newtoniano es independiente de la masa  $m$  asociada a dicho campo.

En el caso de las estrellas de bosones, en [15], se probó mediante la comparación de resultados obtenidos evolucionando las ecuaciones de EKG y las de Schrödinger-Poisson (SP) para una misma configuración inicial de campo escalar que el sistema SP resulta ser una buena aproximación al de EKG, aún para  $\epsilon^2 \sim 10^{-3}$  ya que en este caso la diferencia en los resultados es de menos del 4% (en el caso del Sistema Solar  $\epsilon^2 = (v/c)^2 \sim 10^{-6}$  donde  $v$  es la velocidad tangencial promedio de un planeta como la Tierra).

Por otra parte, como hemos señalado en el párrafo anterior, ni el valor ni el orden de magnitud de  $m$  están restringidos. En el caso de configuraciones autogravitantes formadas por campos escalares, como es el caso de las estrellas de bosones el valor de  $m$  influye en la magnitud de su radio característico, como se puede deducir de (2.37); mientras más grande sea  $m$  más pequeña la estrella, sin embargo una vez fija la masa del campo escalar podemos obtener objetos autogravitantes Newtonianos con tamaños distintos dependiendo del valor de  $\epsilon$ , es decir dependiendo de la magnitud de  $\Phi$ , según las relación (2.42). Tenemos entonces que en el límite Newtoniano tanto la masa como el parámetro de expansión  $\epsilon$ , al que llamaremos *parámetro de Newtonicidad* del campo escalar, definen las escalas características del sistema.

En el siguiente capítulo se encontrarán soluciones numéricas al sistema SP, las cuales pueden asociarse con configuraciones autogravitantes de campo escalar.



# Capítulo 3

## Soluciones al sistema SP

En el capítulo anterior encontramos que un campo escalar complejo  $\Phi$  cuya acción está dada por (1.4) puede decirse que es Newtoniano si al escribirse como

$$\Phi = \exp\left[\frac{-i}{\hbar}mc^2t\right]\Psi(x, t) \quad (3.1)$$

las derivadas parciales temporales y espaciales de  $\Psi$  satisfacen las relaciones (2.10) y  $\Phi$  la condición

$$|\Phi| \sim \epsilon^2 \frac{c^2}{\hbar \sqrt{4\pi G}} \quad (3.2)$$

con  $\epsilon \ll 1$ . Decimos que  $\Phi$  es Newtoniano en el sentido de que las componentes de su tensor de energía-impulso se pueden expandir como (2.13), de manera que  $T_{0i} \sim \epsilon T_{00}$  y  $T_{ij} \sim \epsilon^2 T_{00}$ .  $T_{0i} \sim \epsilon T_{00}$  equivale a que las “velocidades” típicas de la materia escalar son pequeñas comparadas con la de la luz mientras que  $T_{ij} \sim \epsilon^2 T_{00}$  equivale a que los esfuerzos sean pequeños comparados con la densidad de energía. Entonces la dinámica de éste campo escalar Newtoniano estará determinada por un espacio-tiempo cuyo tensor métrico se puede escribir como el tensor métrico del espacio plano  $\eta_{\mu\nu}$  más una pequeña perturbación  $h_{\mu\nu}$ , o de manera equivalente, la perturbación que éste campo escalar provocará al espacio-tiempo es tal que su tensor métrico se puede escribir como en (2.12).

Una vez establecidas las características del campo escalar Newtoniano así como del tensor métrico y (eligiendo la norma armónica) encontramos que a partir de las ecuaciones de Einstein perturbadas y de la perturbación del lagrangiano de materia que contienen términos de las perturbaciones métricas de orden  $\epsilon^2$  se obtiene el sistema Schrödinger-Poisson (2.20). Este sistema, considerando que  $\epsilon \ll 1$ , dará una buena descripción aproximada de la dinámica de  $\Psi$  y de las perturbaciones a la métrica de Minkowski  $h_{00} = h_{ii}$  de orden  $\epsilon^2$ .

En la primera sección de éste capítulo describiremos la manera en que se encuentran soluciones específicas al sistema SP adimensional, en la sección que sigue estudiaremos el comportamiento de esas soluciones ante perturbaciones infinitesimales, y ya en la última

sección hablaremos de las cantidades físicas relacionadas con las soluciones encontradas en la primera sección.

### 3.1. Configuraciones de equilibrio

En esta sección describiremos la manera en que se construyen soluciones físicamente relevantes del sistema Schrödinger-Poisson. Considerando simetría esférica, escribiendo a  $\Psi$  como una función armónica y bajo condiciones de frontera adecuadas, el sistema SP describe configuraciones de campo escalar autogravitantes y con autointeracción, espacialmente acotadas, con simetría esférica y regulares. Este tipo de soluciones son conocidas como configuraciones de equilibrio. La estabilidad de éstas soluciones ante perturbaciones radiales pequeñas la trataremos también en este capítulo mientras que la estabilidad ante perturbaciones finitas arbitrarias las estudiaremos en el siguiente.

Antes de empezar a resolver el sistema SP es conveniente introducir las variables adimensionales

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \epsilon \frac{mc}{\hbar} r, & \bar{t} &= \epsilon^2 \frac{mc^2}{\hbar} t, \\ \bar{U} &= \frac{U}{\epsilon^2 c^2}, & \bar{\Psi} &= \frac{\sqrt{4\pi G \hbar}}{\epsilon^2 c^2} \Psi, & \bar{\Lambda} &= \frac{\epsilon^2 c^2}{8\pi G \hbar^2 m^2} \lambda. \end{aligned} \quad (3.3)$$

El sistema Schrödinger-Poisson (2.20)-(2.21) se reescribe entonces como

$$i\partial_{\bar{t}}\bar{\Psi} = -\frac{1}{2}\bar{\nabla}^2\bar{\Psi} + \bar{U}\bar{\Psi} + \bar{\Lambda}(\bar{\Psi}\bar{\Psi}^*)\bar{\Psi}, \quad (3.4)$$

$$\bar{\nabla}^2\bar{U} = \bar{\Psi}\bar{\Psi}^*. \quad (3.5)$$

Asumiendo simetría esférica y trabajando en el sistema sin unidades escribimos a  $\bar{\Psi}$  como una función armónica

$$\bar{\Psi} = \exp[-i\bar{\gamma}\bar{t}]\bar{\phi}(\bar{r}), \quad (3.6)$$

donde  $\bar{r}$  es la coordenada radial y  $\bar{\gamma}$  una frecuencia adimensional. Sustituyendo  $\bar{\Psi}$  en el sistema SP (3.4)-(3.5) y omitiendo las barras de las variables obtenemos

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\phi) = 2r(U - \gamma)\phi + 2\Lambda\phi^3, \quad (3.7)$$

$$\frac{d^2}{dr^2}(rU) = r\phi^2. \quad (3.8)$$

En lo que sigue de este capítulo omitiremos las barras excepto cuando sea necesario hacer la distinción entre las cantidades con dimensiones y las adimensionales. Las condiciones impuestas para este sistema son, en el origen,  $\phi(0) = \phi_c$ ,  $\phi'(0) = 0$  y  $U'(0) = 0$ ; además buscamos configuraciones espacialmente acotadas  $\phi(r \rightarrow \infty) = 0$ , de manera que asintótica-

mente se cumplirá que  $U(r \rightarrow \infty) = 0$ . Bajo estas condiciones, el sistema anterior se convierte en un problema de valores propios para  $\gamma$ , esto es, dados valores para  $\phi_c$  y  $\Lambda$  y las condiciones de frontera, existen ciertos valores de  $\gamma$  tal que  $\Psi$  y  $U$  son soluciones del sistema.

Para resolver numéricamente el sistema (3.7)-(3.8) definimos las nuevas variables

$$y_1 = \phi, \quad y_2 = \frac{d\phi}{dr}, \quad y_3 = U - \gamma, \quad (3.9)$$

y además reescribimos la ecuación de Poisson (3.8) de la siguiente manera

$$\frac{dy_3}{dr} = \frac{y_4(r)}{r^2}, \quad (3.10)$$

con  $y_4(r) = \int_0^r y_1^2 x^2 dx$ , entonces el sistema SP equivale a

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dr} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dr} &= -\frac{2}{r}y_2 + 2y_3y_1 + \frac{2}{r}\Lambda y_1^3, \\ \frac{dy_3}{dr} &= \frac{y_4}{r^2}, \\ \frac{dy_4}{dr} &= y_1^2 r^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La cuarta ecuación no es redundante considerando que tenemos 4 incógnitas, la función  $\phi$ , su derivada espacial, el potencial  $U$  y el eigenvalor  $\gamma$ . Las condiciones de frontera para éstas ecuaciones son las siguientes, en  $r = 0$ :  $y_1 = \phi_0$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = V$  y  $y_4 = 0$  y en  $r \rightarrow \infty$ :  $\phi = 0$ , donde  $V = U(0) - \gamma$  es una constante por determinar. Tenemos entonces un problema de valores a la frontera en dos puntos el cual se puede resolver usando el método numérico de *shooting*\*. Mediante este método se encuentra el valor de  $V$  de manera que las soluciones cumplan las condiciones en ambas fronteras.

Notemos que aun encontrando el valor de  $V$ , el valor de  $\gamma$  y por tanto el potencial  $U$  todavía están indeterminados. El valor de  $\gamma$  se puede determinar a partir del valor de  $U(0)$  y éste puede conocerse considerando que la ecuación de Poisson (3.8) tiene como solución formal

$$U(x) = U(0) + \int_0^x y \phi^2 dy - \frac{1}{x} \int_0^x y^2 \phi^2 dy, \quad (3.12)$$

que con las condiciones de aislamiento  $U(x \rightarrow \infty) = 0$  y la condición de soluciones

---

\*Este método consiste en resolver el sistema de ecuaciones ordinarias para algún valor inicial de la frecuencia, se verifica si se cumplen o no las condiciones de frontera impuestas sobre las funciones incógnita, en caso de no cumplirse se elige un nuevo valor de la frecuencia. De esta manera se bisecta cada vez con mayor precisión el valor de dicha frecuencia hasta un error deseado [12].

localizadas  $\phi(r \rightarrow \infty) = 0$  implican

$$U(0) = - \int_0^{\infty} y \phi^2 dy. \quad (3.13)$$

Al resolver las ecuaciones (3.11) se encuentra que existen más de un valor para  $V$ , esto es, distintos valores de  $\gamma$  tales que sus respectivas  $\phi$ 's y  $U$ 's satisfacen las condiciones de frontera. Entonces, para cada par  $\phi_0$  y  $\Lambda$  fijos se encuentra un conjunto de soluciones  $\{\Psi^i(\gamma^i, \phi^i(r)), U^i(r)\}$ . Los valores que toman las  $\gamma^i$  son negativos y se cumple que  $\gamma^i < \gamma^j$  para  $i < j$  con  $i, j = 0, 1, 2, \dots$ . Además se encuentra que la función del campo escalar  $\phi^i$  tiene  $i$  nodos en la dirección radial. La nomenclatura usual es que a las soluciones  $\phi(r)$  con cero nodos se les llame estados base mientras que a las que tienen nodos se les conoce como estados excitados, esto es consistente con el hecho de que  $\gamma^0$ , que en unidades completas tiene unidades de energía, sea el menor de los  $\gamma^i$ 's. En las figuras 3.1, 3.2 y 3.3 se muestran  $\phi^0$ ,  $\phi^1$  y  $\phi^2$  con  $\phi_0^i = 1$  y para diferentes valores de  $\Lambda$ . En las figuras 3.4, 3.5, 3.6 y 3.7 se muestran los estados base  $\phi^i$  y sus respectivos potenciales gravitacionales  $U^i$  para  $i = 0$  e  $i = 2$  con distintos valores de  $\Lambda$  y  $\phi_0^i = 1$ .

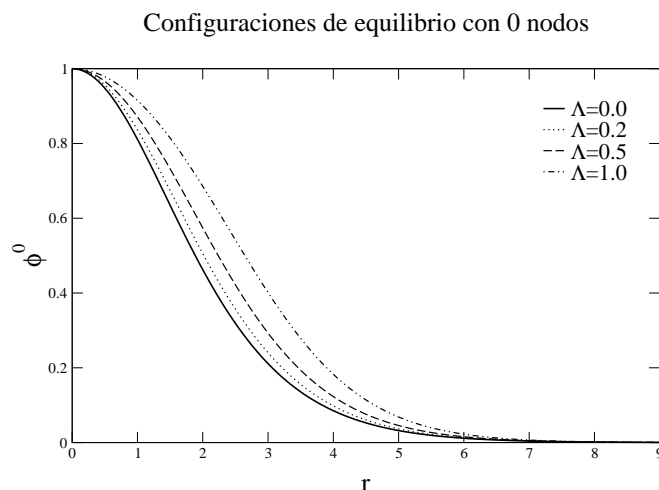


Figura 3.1: Perfil de la función de onda para estados base con  $\phi_0^0 = 1$  y distintos valores del parámetro de autointeracción  $\Lambda$ .

## 3.2. Perturbaciones Pequeñas

En esta sección describiremos el comportamiento de configuraciones de equilibrio, ante perturbaciones infinitesimales; esto es importante porque en los capítulos que siguen realizaremos la evolución numérica del sistema SP para distintas condiciones iniciales y como

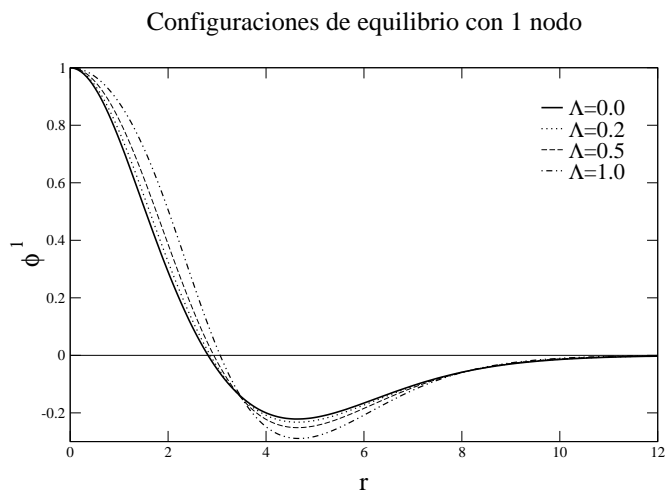


Figura 3.2: Primeros estados excitados con  $\phi_0^1 = 1$  y distintos parámetros de autointeracción  $\Lambda$ .

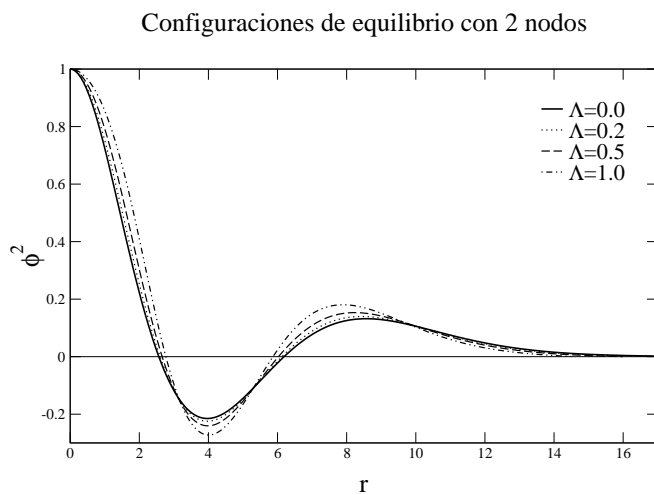


Figura 3.3: Segundos estados excitados con  $\phi_0^2 = 1$  y distintos parámetros de autointeracción  $\Lambda$ .

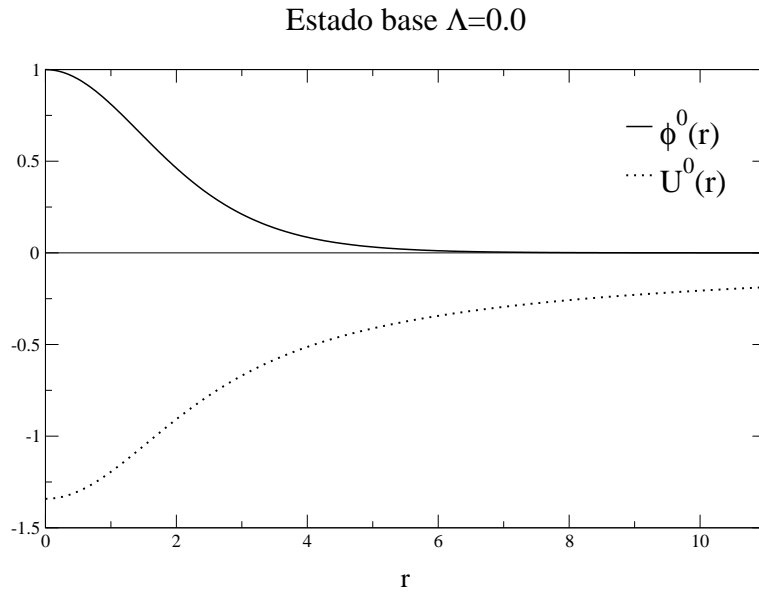


Figura 3.4: Se muestran la configuración de equilibrio con 0 nodos  $\phi^0$  y el potencial gravitacional  $U^0$  correspondiente. Se eligieron los valores  $\phi_0^0 = 1$  y  $\Lambda = 0,0$  para el sistema sin dimensiones.

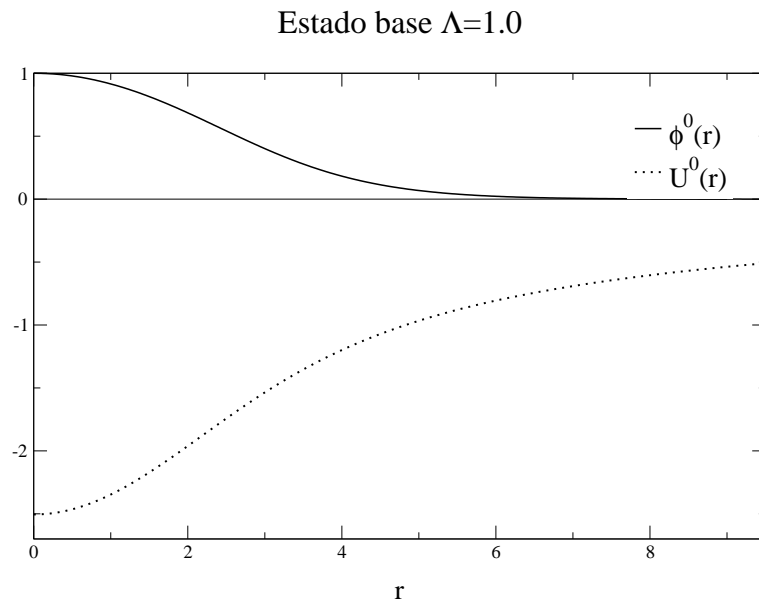


Figura 3.5: Se muestran la configuración de equilibrio con 0 nodos  $\phi^0$  y el potencial gravitacional  $U^0$  correspondiente. Se usaron los valores  $\phi_0^0 = 1$  y  $\Lambda = 1,0$  para el sistema sin dimensiones.



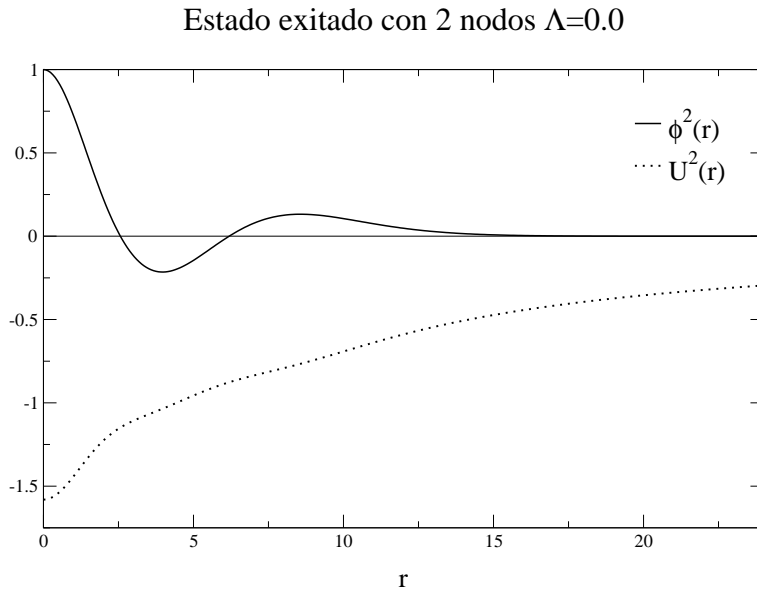


Figura 3.6: Se muestran la configuración de equilibrio con 2 nodos  $\phi^2$  y el potencial gravitacional  $U^2$  correspondiente. Se eligieron los valores  $\phi_0^2 = 1$  y  $\Lambda = 0,0$  para el sistema sin dimensiones.

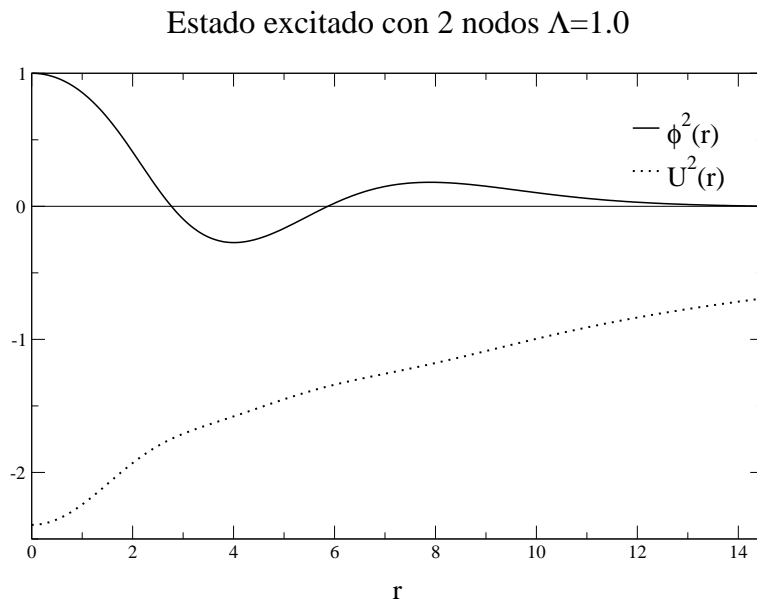


Figura 3.7: Se muestran la configuración de equilibrio con 2 nodos  $\phi^2$  y el potencial gravitacional  $U^2$  correspondiente. Se eligieron los valores  $\phi_0^2 = 1$  y  $\Lambda = 1,0$  para el sistema sin dimensiones.

veremos estas simulaciones numéricas introducen inevitablemente perturbaciones debido a los errores de discretización de las ecuaciones. Es entonces necesario mantener el control sobre las perturbaciones intrínsecas de la evolución numérica. Por ejemplo, al comparar el comportamiento de un estado de equilibrio al ser evolucionado numericamente con el de uno perturbado infinitesimalmente, sabremos si la perturbación debido a la evolución numérica puede ser considerada infinitesimal.

Partimos de que una configuración de equilibrio  $\psi^{(0)} = \exp(-i\gamma t)\phi(r)$  es perturbada linealmente de la siguiente manera

$$\psi = \psi^{(0)} + \delta\psi, \quad (3.14)$$

donde  $|\delta\psi| < 1$ . Esta perturbación en  $\psi^{(0)}$  produce una perturbación en el potencial  $U^{(0)}$  (solución a la ecuación de Poisson para  $\psi^{(0)}$ ) de manera que el nuevo potencial lo escribiremos de la siguiente manera

$$U = U^{(0)} + \delta U, \quad (3.15)$$

suponiendo que debido a la condición  $|\delta\psi| < 1$  se puede esperar que  $|\delta U| < 1$ . Siempre es posible asumir que  $\delta\psi$  es de la forma  $\delta\psi = \varphi(r, t)\exp(-i\gamma t)$ , así que sustituyendo (3.14) y (3.15) en el sistema SP (3.4)-(3.5) se obtienen las ecuaciones para las perturbaciones

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= -\frac{1}{2r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) + (U^{(0)} - \gamma)\varphi + \delta U\varphi, \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\delta U) &= r\phi(\varphi^* + \varphi), \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde se han despreciado los términos que contienen expresiones cuadráticas en las perturbaciones.

De manera precisa, en términos del parámetro de expansión  $\epsilon$ , las condiciones  $|\delta\bar{\psi}| < 1$  y  $|\delta\bar{U}| < 1$  significan que las cantidades con dimensiones definidas a partir de estas adimensionales se obtienen de las siguientes expresiones

$$\varphi = \frac{\epsilon^4 c^2}{\hbar \sqrt{4\pi G}} \bar{\varphi}, \quad \delta U = \epsilon^4 c^2 \delta \bar{U}. \quad (3.17)$$

Comparando con las relaciones para  $\psi^{(0)}$  y para  $U^{(0)}$  (3.3) notamos que sus respectivas perturbaciones  $\varphi$  y  $\delta U$  son  $\epsilon^2$  veces más pequeñas que las soluciones no perturbadas.

Para resolver el sistema de las perturbaciones (3.16) asumimos que  $\varphi$  se puede escribir como  $\varphi(r, t) = \varphi_1(r)\exp(-i\sigma t) + \varphi_2(r)\exp(i\sigma t)$ , donde  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son funciones reales. A primer orden, la perturbación  $\delta\psi$  y la respectiva perturbación de la densidad de número

adquieren la forma

$$\begin{aligned}\delta\psi(r, t) &= \exp(-i\gamma t)[\varphi_1 \exp(-i\sigma t) + \varphi_2 \exp(i\sigma t)], \\ \delta\rho(r, t) &= \phi(\varphi_1 + \varphi_2)[\exp(-i\sigma t) + \exp(i\sigma t)],\end{aligned}\quad (3.18)$$

de donde se deduce que la perturbación del potencial gravitacional admite una expansión de la forma  $\delta U(r, t) = \delta u(r)[\exp(-i\sigma t) + \exp(i\sigma t)]$ . Por tanto el sistema (3.16) se reduce a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi_1) &= 2r(U^{(0)} - \gamma - \sigma)\varphi_1 + 2r\delta u\phi, \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi_2) &= 2r(U^{(0)} - \gamma + \sigma)\varphi_2 + 2r\delta u\phi, \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\delta u) &= r\phi(\varphi_1 + \varphi_2).\end{aligned}\quad (3.19)$$

El proceso seguido para resolver el sistema (3.19) es análogo al que se utilizó para resolver el sistema (3.11). Como antes, el valor central de una de las funciones se fija arbitrariamente al valor  $\varphi_1(0) = 1$  de manera que con la relación (3.17) se cumple  $|\delta\psi| < 1$ . Los valores de los parámetros  $\varphi_2(0)$ ,  $\delta u(0)$  y  $\sigma$  quedan libres y se fijan mediante el método de shooting haciendo que las condiciones de frontera  $\delta M(t, r \rightarrow \infty) = \varphi_1(t, r \rightarrow \infty) = \varphi_2(t, r \rightarrow \infty) = 0$  se satisfagan al mismo tiempo que las funciones sean regulares en el origen.

Cuando se resuelven estas ecuaciones considerando que  $\psi^{(0)} = \exp(-i\gamma t)\phi(r)$  es el estado base para  $\Lambda = 0,0$ , con  $\psi^{(0)}(0) = 1,0$  y  $\gamma = -0,692$ , de manera que  $\phi(r)$  y  $U(r)$  están dados en la figura 3.4, el valor de la eigenfrecuencia de las perturbaciones es  $\sigma = 0,2916$ . Notemos que para  $\psi^{(0)}$ , tanto la densidad  $\rho^{(0)} = \psi^{(0)}\psi^{(0)*}$  como  $U^{(0)}$ , son independientes del tiempo; sin embargo, al perturbar ligeramente a  $\psi^{(0)}$ , la densidad, que de acuerdo con la expresión (3.18), estará dada por

$$\rho = \phi^2 + \phi(\varphi_1 + \varphi_2)\cos(\sigma t),\quad (3.20)$$

(donde hemos despreciado los términos cuadráticos en las perturbaciones) y entonces oscilará con una frecuencia  $f = \sigma/2\pi = 0,046$ ; lo mismo sucederá con el potencial perturbado  $U$ .

Debido a que  $\sigma$  es real, el modo de la perturbación  $\delta\psi$  es armónico. Esto significa que el estado  $\psi^{(0)}$  es estable ante pequeñas perturbaciones radiales.

### 3.3. Observables

En esta sección regresaremos a la convención de que las variables adimensionales serán escritas con una “barra” encima mientras que las variables con dimensiones no la tienen. En

la primera sección de este capítulo vimos que el sistema SP (3.4) tiene soluciones “bonitas” de la forma  $\bar{\Psi} = \exp[-i\bar{\gamma}\bar{t}]\bar{\phi}$  en el sentido que son regulares en la región espacial donde están definidas y que son acotadas. Más aún, según los resultados de la segunda sección, las soluciones llamadas estados base son estables ante perturbaciones radiales pequeñas. Tenemos entonces que las soluciones llamadas configuraciones de equilibrio pueden ser de interés físico. En el sistema con dimensiones, las configuraciones de equilibrio de campo escalar  $\Phi = \exp[\frac{-i}{\hbar}mc^2t]\Psi$  son aquellas para las que

$$\Psi = \exp[\frac{-i}{\hbar}mc^2\gamma t]\phi(r), \quad (3.21)$$

con  $\gamma = \bar{\gamma}\epsilon^2$  y  $\phi$  está dada, según el reescalamiento para el campo escalar (3.3), por

$$\phi(r) = \frac{\epsilon^2 c^2}{\hbar \sqrt{4\pi G}} \bar{\phi}(r). \quad (3.22)$$

Dada la forma funcional de  $\bar{\phi}$ , que toma su valor máximo en el origen, la condición de Newtonicidad (2.42) exige que el valor central de  $\bar{\phi}_0 = \bar{\phi}(\bar{r} = 0)$  sea del orden de la unidad, de hecho en las soluciones construidas en la primera sección se tomó  $\bar{\phi}_0 = 1^{**}$ .

Las configuraciones de equilibrio definen una densidad de materia escalar  $\rho = m^2|\Phi|^2$  de un objeto esféricamente simétrico y espacialmente acotado, que genera un potencial gravitacional

$$U(\vec{x}) = -G \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|}. \quad (3.23)$$

Algunas gráficas para  $\bar{U}(\bar{r})$  se muestran también en la primera sección. Recuperamos  $U$  tomando  $U = \epsilon^2 c^2 \bar{U}$ . Finalmente la evolución temporal de  $\Psi$  y por tanto de la densidad de materia escalar están dadas por la ecuación de Schrödinger no lineal (2.20).

Las propiedades físicas de estos objetos autogravitantes formados de materia escalar como su masa, su tamaño, su compacidad y su tiempo de vida dependen de:  $m$ ,  $\epsilon$  y  $\lambda$ ; la masa asociada con el campo escalar, el parámetro de Newtonicidad y el parámetro de autointeracción de las “partículas” escalares respectivamente. Estos son parámetros libres; sin embargo, existe una diferencia entre la masa y los dos últimos; el orden de magnitud de la masa puede ser elegido arbitrariamente, mientras que no sucede lo mismo para  $\epsilon$  ni para  $\lambda$ . La restricción para  $\epsilon$  viene de la condición de Newtonicidad para el campo  $\Phi$ . Por otra parte  $\bar{\Lambda} \sim 1$  implica que los objetos de campo escalar formados tengan compacidad  $C \sim \epsilon^2$ , es decir, que la aproximación Newtoniana siga siendo válida para su descripción. Esta condición implica, a través de la relación (3.3), valores restringidos para  $\lambda$ .

En la Tabla 3.1 se muestra la manera de calcular las cantidades físicas como la Masa

---

\*\*Recordemos que al construir las soluciones de equilibrio el valor central del campo escalar lo elegimos arbitrariamente, esta situación es análoga en la construcción de soluciones para objetos autogravitantes como estrellas de fluidos perfectos en las que a mano se elige el valor central de la densidad [24].

$M$ , la energía cinética  $K$ , la energía potencial  $W$  y la energía de autointeracción  $I$  a partir de sus respectivas densidades  $\rho$ ,  $k$ ,  $w$ ,  $i$  definidas en el capítulo anterior (ver tabla 2.1) \*\*\*. En la tabla (3.2) se muestra cómo calcular las mismas cantidades específicamente para las configuraciones de equilibrio.

Los valores de las cantidades físicas  $\bar{M}$ ,  $\bar{K}$ ,  $\bar{W}$   $\bar{I}$  que aparecen en la Tabla 3.2 para las distintas configuraciones de campo escalar cuyos perfiles  $\bar{\phi}(\bar{r})$  se muestran en las figuras 3.1-3.3 se listan en las columnas de la Tabla 3.3. También, en esta tabla, aparecen los valores de sus respectivas frecuencias  $\bar{\gamma}$  y el valor del potencial gravitacional en el origen  $\bar{U}(0)$  para cada configuración. El valor  $\bar{r}_{95}$  es el radio que delimita la superficie imaginaria de la configuración de equilibrio la cual contiene el 95 % de la masa  $\bar{M}$ . La compacidad  $C$  de cada configuración se muestra en la última columna y está definida en términos del  $\bar{r}_{95}$  puesto que formalmente es en  $\bar{r} = \infty$  donde la densidad se hace cero. Es claro que la compacidad de las configuraciones de equilibrio aumenta si lo hace  $\epsilon$ . En el caso con  $\lambda = 0$  la compacidad es independiente de  $m$  y aumenta, manteniendo fijo  $\epsilon$ , solo si el número de nodos aumenta. Si  $\lambda$  es distinta de cero, entonces manteniendo fijo  $\epsilon$ , la compacidad de los estados base aumenta si lo hace el parámetro de autointeracción  $\lambda$  o si lo hace la masa asociada al campo escalar  $m$ . Esto nos da una idea de porqué para configuraciones de estrellas de bosones relativistas con  $m$  fija, la  $\bar{\phi}_c$  es más pequeña a medida que  $\lambda$  aumenta.  $\bar{\phi}_c$  es el valor central del campo escalar para el cual se divide la rama de configuraciones de equilibrio en configuraciones estables e inestables, ver Figura 1.3.

Con los valores que aparecen en la Tabla 3.3 se puede comprobar que se cumple la relación virial  $2\bar{K} + \bar{W} + 3\bar{I} = 0$  para un sistema con autointeracción (ver [23]), es decir que las configuraciones de equilibrio son sistemas virializados. Finalmente, en el segundo renglón, de esta misma tabla, aparece el factor por el que hay que multiplicar las cantidades adimensionales para recuperar las unidades.

Con los valores de la masa del campo escalar  $m$  y el parámetro de autointeracción  $\lambda$  fijos, es el parámetro  $\epsilon$  “quien” determina los valores de las cantidades físicas de las configuraciones de equilibrio, esto es evidente si consideramos que para recuperar las unidades

---

\*\*\* El factor  $\frac{1}{2}$  que aparece en la integral para  $W$  se introduce de la analogía a la manera de calcular la energía potencial de un sistema de partículas que interactúan bajo un potencial a pares, y que se anula en el infinito. En el caso por ejemplo de un sistema de cargas, la energía potencial de una  $i$ -ésima carga  $q_i$  que se trae del infinito a una configuración de  $n - 1$  cargas, está dada por

$$W = q_i \sum_j^{n-1} \frac{q_j}{|x_i - x_j|} \quad (3.24)$$

Y la energía potencial total de todas las cargas debido a todas las fuerzas que actúan entre ellas es

$$W = \sum_i^{n-1} \sum_{j < i} \frac{q_i q_j}{|x_i - x_j|} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{|q_i - q_j|} \quad (3.25)$$

con  $i$  diferente de  $j$ .

en las cantidades físicas tenemos que multiplicar por el respectivo factor que aparece en el segundo renglón de la Tabla 3.3. Vemos por ejemplo que la masa total  $M$  es proporcional a  $\epsilon$  mientras que el  $r_{95}$  es inversamente proporcional a  $\epsilon$ .

El valor de  $\epsilon$  está relacionado con el valor central de la parte espacial del campo escalar  $\phi_0 = \phi(r = 0)$  dado, según la expresión (3.22) por

$$\phi_0 = \frac{\epsilon^2 c^2}{\hbar \sqrt{4\pi G}} \bar{\phi}_0 \quad (3.26)$$

donde, como ya mencionamos anteriormente, se debe cumplir que  $\bar{\phi}_0 \sim 1$  y  $\epsilon \ll 1$  para que se satisfaga la condición de Newtonicidad de  $\Phi$ . Esta relación nos dice cómo construir familias de soluciones del sistema SP para cada conjunto de valores  $\epsilon$ ,  $\lambda$  y  $m$  a partir de una solución específica determinada por  $\bar{\phi}_0$  por ejemplo para  $\bar{\phi}_0 = 1$ . Para ilustrar esta propiedad, en la grafica 3.8 se muestran las masas  $M$

$$\begin{aligned} M &= \bar{M} \epsilon \frac{m_{pl}^2}{m} = \bar{M} \phi_0^{1/2} \left( \frac{\hbar \sqrt{4\pi G}}{c^2} \right)^{1/2} \frac{m_{pl}^2}{m} \\ &= \bar{M} \bar{\phi}_0^{1/2} \epsilon \frac{m_{pl}^2}{m} \end{aligned} \quad (3.27)$$

para configuraciones en el estado base cuya amplitud central del campo escalar es  $\bar{\phi}_0$  y para distintos valores de  $\bar{\Lambda}$ . El valor de  $\bar{M}$  es el que se obtuvo en la primera sección para el estado con  $\bar{\phi}_0 = 1$ . En la figura 3.9 se muestran los radios  $r_{95}$  de los estados base como función de su amplitud central  $\bar{\phi}_0$ .

De hecho, dada la manera en la que aparece el factor  $\epsilon$  en el factor de conversión para recuperar las unidades (ver segundo renglón de la tabla 3.2) se tiene que las cantidades físicas para las distintas familias de soluciones reescalan de la siguiente manera

$$\{t, r, U, \phi\} \rightarrow \{\tau^{-2} \hat{t}, \tau^{-1} \hat{r}, \tau^2 \hat{U}, \tau^2 \hat{\phi}\}, \quad (3.28)$$

$$\{\rho, M, K, W, I\} \rightarrow \{\tau^4 \hat{\rho}, \tau \hat{M}, \tau^3 \hat{K}, \tau^3 \hat{W}, \tau^3 \hat{I}\}, \quad (3.29)$$

donde las cantidades con sombrero corresponden a las cantidades físicas de la solución que genera las familias de soluciones y  $\tau$  un parámetro arbitrario.

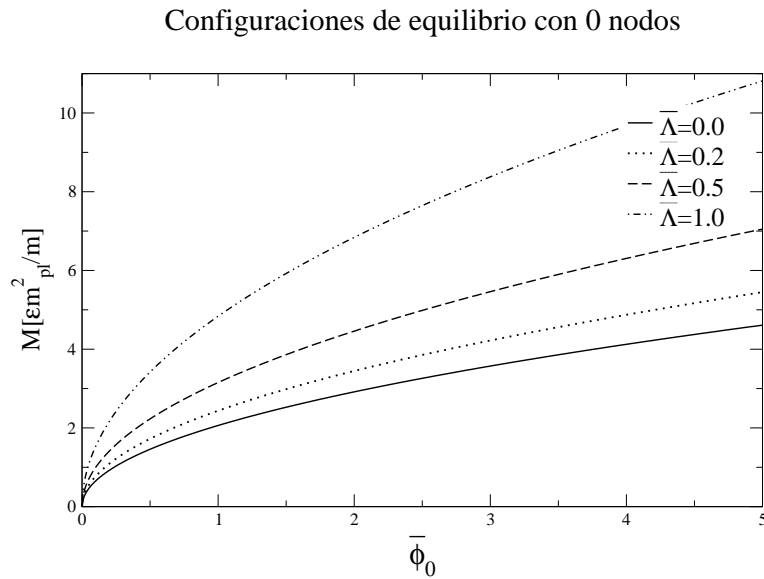


Figura 3.8: Valores que toma la masa  $M$  para estados base que difieren por el valor central del campo escalar  $\bar{\phi}_0$  y el valor de  $\bar{\Lambda}$ . Las curvas se construyeron según la relación (3.27) donde el valor de  $\bar{M}$  es el valor adimensional de la masa de los estados base con  $\bar{\phi}_0 = 1$  y que aparecen en la Tabla 3.3

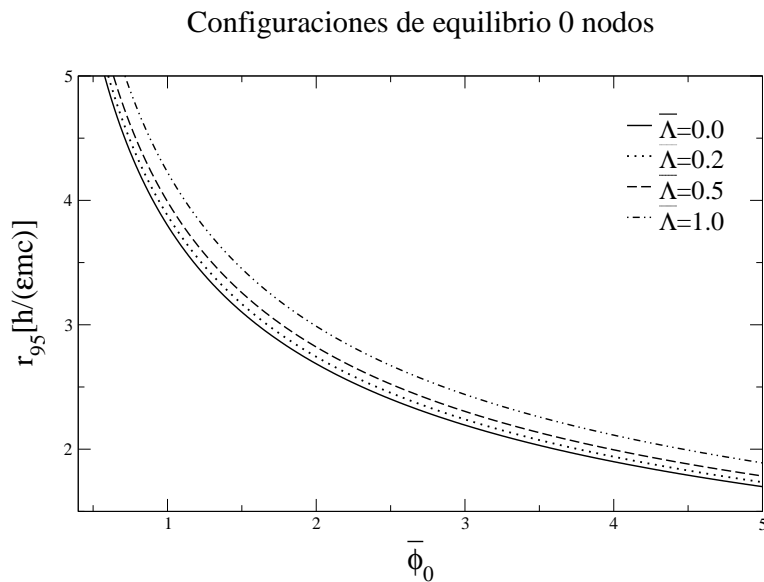


Figura 3.9: Valores que toma el radio  $r_{95}$  para estados base que difieren por el valor central del campo escalar  $\bar{\phi}_0$  y el valor de  $\bar{\Lambda}$ . Las curvas se construyeron a partir de las relaciones de reescalamiento usando como familias generadoras, las de los estados base que aparecen en la Tabla 3.3

---



---


$$\Phi = \exp[-\frac{i}{\hbar}mc^2t]\Psi = \Psi_0 \exp[-\frac{i}{\hbar}mc^2t]\bar{\Psi} \quad \Psi_0 = \frac{\epsilon^2 c^2}{\hbar \sqrt{4\pi G}}$$


---



---

$$M = \int \rho dv \quad = \int \bar{\Psi}\Psi^* d\bar{v} \frac{1}{4\pi} \epsilon \frac{m_{pl}^2}{m}$$

$$K = \int k dv \quad = -\frac{1}{2} \int (\bar{\Psi}^* \bar{\nabla}^2 \bar{\Psi} + \bar{\Psi} \bar{\nabla}^2 \bar{\Psi}^*) d\bar{v} \frac{\epsilon^3}{4\pi} \frac{m_{pl}^2}{m} c^2$$

$$W = \frac{1}{2} \int w dv \quad = \int \bar{U} \bar{\Psi} \bar{\Psi}^* d\bar{v} \frac{\epsilon^3}{4\pi} \frac{m_{pl}^2}{m} c^2$$

$$I = \frac{2}{3} \int i dv \quad = \bar{\Lambda} \int (\bar{\Psi} \bar{\Psi}^*)^2 d\bar{v} \frac{\epsilon^3}{4\pi} \frac{m_{pl}^2}{m} c^2$$


---



---

Cuadro 3.1: Cantidades físicas del sistema descrito por las ecuaciones de SP. Las densidades  $\rho$ ,  $k$ ,  $w$ ,  $i$  se definieron en el capítulo anterior, ver Tabla 2.1. A partir de estas densidades se definen la Masa  $M$ , la energía cinética  $K$ , la energía potencial  $W$  y la energía de autointeracción  $I$ . Las cantidades con barras son adimensionales y las dimensiones se recuperan con los factores que aparecen en la extrema derecha de la segunda columna.



---



---

$\Phi = \exp[-\frac{i}{\hbar}mc^2t]\Psi = \Psi_0 \exp[-\frac{i}{\hbar}mc^2t]\bar{\Psi}$	$\Psi_0 = \frac{\epsilon^2 c^2}{\hbar \sqrt{4\pi G}}$
Configuraciones de equilibrio	$\bar{\Psi}(\bar{r}, \bar{t}) = \exp[-i\bar{\gamma}\bar{t}]\bar{\phi}(\bar{r})$
$\Psi = \Psi_0 \exp[-\frac{i}{\hbar}mc^2\gamma t]\bar{\phi}$	$\gamma = \epsilon^2 \bar{\gamma}$

---



---

$M = \int \bar{\phi}^2 \bar{r}^2 d\bar{r} \epsilon \frac{m_{pl}^2}{m}$	$= \bar{M} \epsilon \frac{m_{pl}^2}{m}$
$K = - \int \bar{\phi} \bar{\nabla}^2 \bar{\phi} \bar{r}^2 d\bar{r} \frac{\epsilon^3 m_{pl}^2}{m} c^2$	$= \bar{K} \epsilon^3 \frac{m_{pl}^2}{m} c^2$
$W = \int \bar{U} \bar{\phi}^2 \bar{r}^2 d\bar{r} \epsilon^3 \frac{m_{pl}^2}{m} c^2$	$= \bar{W} \epsilon^3 \frac{m_{pl}^2}{m} c^2$
$I = \bar{\Lambda} \int \bar{\phi}^4 \bar{r}^2 d\bar{r} \epsilon^3 \frac{m_{pl}^2}{m} c^2$	$= \bar{I} \epsilon^3 \frac{m_{pl}^2}{m} c^2$

---



---

Cuadro 3.2: Expresiones para la Masa  $M$ , la energía cinética  $K$ , la energía potencial  $W$  y la energía de autointeracción  $I$  para configuraciones de equilibrio. En la Tabla 3.3, que aparece al final de este capítulo, se listan los valores de estas cantidades físicas, para algunas configuraciones de equilibrio específicas.

Nodos	$\bar{\Lambda}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{U}(0)$	$\bar{M}$	$\bar{r}_{95}$	$\bar{K}$	$\bar{W}$	$\bar{I}$	$C = \frac{2\bar{M}}{\bar{r}_{95}}$
	$\frac{8\pi G\hbar^2 m^2}{\epsilon^2 c^2}$	$\epsilon^2$	$\epsilon^2 c^2$	$\epsilon \frac{m_p l^2}{m}$	$\frac{1}{\epsilon} \frac{\hbar}{mc}$	$\epsilon^3 \frac{m_p l^2 c^2}{m}$	$\epsilon^3 \frac{m_p l^2 c^2}{m}$	$\epsilon^3 \frac{m_p l^2 c^2}{m}$	$\epsilon^2$
0	0,0	-0,692	-1,342	2,062	3,799	0,952	-1,903	0,0	1,086
0	0,2	-0,773	-1,517	2,437	3,870	1,047	-2,563	0,156	1,579
0	0,5	-0,921	-1,834	3,153	3,990	1,216	-4,053	0,540	1,580
0	1,0	-1,246	-2,505	4,837	4,226	1,569	-8,647	1,836	2,290
1	0,0	-0,648	-1,503	4,587	7,844	1,981	-3,962	0,0	1,170
1	0,2	-0,707	-1,641	4,990	7,751	2,208	-4,744	0,110	1,290
1	0,5	-0,816	-1,885	5,720	7,611	2,632	-6,342	0,359	1,500
1	1,0	-1,055	-2,412	7,349	7,388	3,631	-10,726	1,155	1,990
2	0,0	-0,631	-1,581	7,097	11,955	2,985	-5,969	0,0	1,187
2	0,2	-0,683	-1,707	7,553	11,714	3,316	-6,906	0,092	1,290
2	0,5	-0,773	-1,926	8,333	11,316	3,937	-8,706	0,293	1,473
2	1,0	-0,973	-2,393	10,028	10,684	5,386	-13,352	0,906	1,877

Cuadro 3.3: Valores de las cantidades físicas de distintas configuraciones de equilibrio con distintos número de nodos y distintos valores del parámetro de autointeracción  $\Lambda$ . La escala y las dimensiones de estas cantidades se recuperan al multiplicar por los factores respectivos que aparecen en el segundo renglón.

# Capítulo 4

## Colapso No Esférico

En el capítulo anterior se construyeron configuraciones de equilibrio de las ecuaciones de Schrödinger-Poisson, las cuales son soluciones armónicas, esféricamente simétricas y regulares en cualquier punto en el que están definidas. Vimos además que las soluciones sin nodos son estables ante pequeñas perturbaciones radiales. En este capítulo estudiaremos la evolución temporal de configuraciones de equilibrio bajo perturbaciones finitas con simetría esférica y con simetría axial. Además estudiaremos la evolución de configuraciones arbitrarias de campo escalar con simetría axial. Los resultados principales son que los estados base también son estables ante perturbaciones finitas, en el sentido de que evolucionan hacia nuevos estados base y además que son configuraciones atractoras de configuraciones iniciales arbitrarias. Dado que las configuraciones de equilibrio, en especial los estados base, pueden asociarse con objetos de interés astrofísico el estudio de su evolución ante perturbaciones arbitrarias es importante; pues nos daría información acerca de la estabilidad de dichos objetos. Por otra parte, podríamos inferir cómo es que estos objetos se forman a partir del estudio de la evolución de configuraciones iniciales arbitrarias de campo escalar.

Básicamente, el sistema de ecuaciones SP consiste en una ecuación de constricción que es la ecuación de Poisson (de hecho es la forma Newtoniana de la constricción hamiltoniana) y una ecuación de evolución, la ecuación de Schrödinger. El hacer la evolución de dicho sistema consiste entonces en resolver la ecuación de Poisson con condiciones de frontera adecuadas para una densidad inicial de campo escalar, obteniendo el potencial gravitacional al tiempo  $t$ . Una vez obtenido el potencial, resolviendo la ecuación de Schrödinger se calcula la distribución del campo escalar al tiempo  $t + \delta t$ , se resuelve entonces nuevamente la ecuación de Poisson para la nueva densidad de campo escalar obteniéndose el potencial al tiempo  $t + \delta t$  y se repiten éstas operaciones. Este proceso se lleva a cabo utilizando métodos numéricos que involucran diferencias finitas, es decir, se discretiza el dominio espacial y temporal de manera que las funciones solo estarán definidas en ciertos puntos de su dominio y se aproximan los operadores diferenciales quedando definidos a partir de los valores de las funciones en dichos puntos; pasando así de un problema de

ecuaciones diferenciales a un problema puramente algebraico. En principio sonaría un poco sospechoso este procedimiento puesto que no se resuelven las ecuaciones en el continuo, sin embargo utilizándolo es posible reproducir resultados conocidos, como veremos más adelante y además existen ciertos conceptos importantes, en el marco de los métodos de diferencias finitas, que nos garantizan que las soluciones que obtenemos son confiables, el mas importante de ellos: la convergencia.

En la primera sección de éste capítulo describiremos los métodos numéricos que emplearemos en la evolucion de las configuraciones de campos escalares iniciales, mencionaremos cuales son los conceptos importantes que nos garantizan soluciones confiables, describiremos el código numérico que construimos para la evolución, así como las pruebas de que funciona, es decir reproduciremos con éste resultados esperados. En la segunda sección haremos la evolución de estados base perturbados por densidades de campo escalar con simetría axial y comprobaremos que tienden a nuevos estados base. Finalmente en la tercera sección evolucionaremos configuraciones iniciales axialsimétricas arbitrarias comprobando que los estados base son configuraciones atractoras.

## 4.1. Código Numérico

Para estudiar configuraciones con simetría axial se eligieron coordenadas cilíndricas denotadas por  $(x, z)$ , donde  $x$  es la coordenada radial y  $z$  la axial. El sistema SP en estas coordenadas se escribe de la siguiente manera

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + U\psi, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \psi^*\psi. \quad (4.2)$$

En el código numérico construido, se aproximaron estas ecuaciones continuas (4.1-4.2) usando diferencias finitas centradas para ambas coordenadas  $x$  y  $z$ . El dominio numérico se definió por  $x = p\Delta x$  y  $z = q\Delta z$ , con  $p$  y  $q$  enteros, y se usó la misma resolución en ambas direcciones, ésto es,  $\Delta x = \Delta z$ . El operador diferencial espacial es el mismo en ambas ecuaciones y fue tratado de la misma manera en ambos casos: fuera de las expresiones usuales en diferencias finitas solo dos puntos delicados fueron incluidos relacionados con las derivadas de primer orden con respecto a  $x$  en (4.1-4.2): *i*) la red fue desplazada en la dirección  $x$  un intervalo  $\Delta x/2$  de manera que evitáramos la divergencia de este término y *ii*) se transformó dicho término en  $\frac{1}{x}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2\frac{\partial\psi}{\partial x^2}$ , donde la última expresión es la derivada respecto a  $x^2$ .

Para la ecuación de Schrödinger se discretizó el tiempo  $t = n\Delta t$ , con  $n$  entero y  $\Delta t$  la resolución en el tiempo. Esta ecuación se resolvió utilizando un integrador temporal explícito con segundo orden de precisión, el cual es una versión modificada de el método

iterativo de tres pasos Crank-Nicholson.

Para simular fronteras abiertas en las orillas del dominio numérico, se usó una “esponja” en la región más alejada del dominio. La esponja ha sido un concepto usado exitosamente al trabajar con la ecuación de Schrödinger. Esta técnica consiste en sumar al potencial en la ecuación de Schrödinger un potencial imaginario. El resultado es que en la región donde se define este potencial ficticio se simula un sumidero de partículas, y por lo tanto la densidad de probabilidad en ésta región tenderá a cero de manera que se obtiene el efecto de una frontera abierta. Ejemplos en los que esta esponja ha sido usada para sistemas que involucran la ecuación de Schrödinger son [15, 21, 9].

La ecuación de Poisson (4.2) es una ecuación elíptica para  $U$ , la cual se resolvió usando el arreglo de cinco puntos en dos dimensiones para las derivadas y sucesivamente un algoritmo de relajación con parámetro óptimo de aceleración conocido como SOR. Para imponer las condiciones de frontera se cuidó que estas fronteras numéricas estuvieran lo suficientemente lejos de manera que el valor de la masa  $M = \int |\psi|^2 d^3x$  fuera el mismo a lo largo de las tres caras del dominio, se usó entonces el término monopolar del potencial gravitacional  $U = -M/r$  con  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ , como condición de frontera. En el eje se demandó que el potencial fuera simétrico respecto al eje.

#### 4.1.1. Pruebas al código numérico

La naturaleza del sistema SP nos permite tener plena libertad de elegir el dato inicial ya que una vez que elegimos una distribución inicial de campo escalar  $\psi$  solo basta integrar la ecuación (4.2) al tiempo inicial; ésto significa que la función  $\psi$  puede ser bastante arbitraria. Sin embargo, antes de evolucionar distribuciones arbitrarias, para hacer pruebas al código numérico, se decidió evolucionar un estado base de los que se construyeron en el capítulo anterior.

Los pasos seguidos en la construcción de soluciones al sistema SP pueden ser resumidos de la siguiente manera: *i*) elegimos una distribución inicial  $\psi(\mathbf{x}, 0)$  para la superficie temporal  $t = 0$ , *ii*) se llena el dominio numérico con esos datos, *iii*) se resuelve la ecuación (4.2) y se obtiene un potencial gravitacional, *iv*) usando dicho potencial se obtiene  $\psi(\mathbf{x}, 0 + \Delta t)$ , *v*) usando la función de onda obtenida se resuelve nuevamente (4.2), *vi*) se repite en ciclo desde el paso *iv*) hasta que los datos obtenidos comiencen a ser inconsistentes con la física esperada.

El código se probó utilizando como datos iniciales estados base, cuyas propiedades conocemos de su construcción. Sabemos por ejemplo, que en el límite continuo, la función de onda de estos estados, oscila con una frecuencia constante  $\gamma$ , lo cual implica que la densidad de masa  $\rho$  y por lo tanto el potencial gravitacional permanecen independientes del tiempo. Sin embargo, numéricamente se resuelven las versiones discretizadas del sistema SP, las cuales son aproximaciones en diferencias finitas que se obtienen de las expansiones truncadas de los operadores diferenciales. Por lo tanto, no es difícil imaginar que las características de las funciones que se obtienen al resolver el sistema discreto no

sean exactamente las mismas que las del sistema continuo. Dado que intrínsecamente se introduce cierto error al resolver las versiones discretizadas es necesario asegurarse de que la discrepancia entre estas soluciones y las de las ecuaciones continuas se debe a este error intrínseco y no a una mala implementación de los algoritmos numéricos empleados en la construcción del código. Una herramienta útil, en el esquema de las diferencias finitas, para probar y validar los códigos numéricos es el concepto de convergencia de las soluciones. Al aproximar los operadores diferenciales por diferencias finitas lo hacemos con cierto orden de exactitud en los elementos  $\Delta x$  en los que se discretiza el dominio. Por ejemplo, si la derivada de una función  $u(x)$  denotada como  $u'(x)$  se aproxima por el operador en diferencias finitas  $Du(x)$  de manera que el error definido como su diferencia es proporcional a  $\Delta x^2$ , esto es,  $Du(x) - u'(x) \sim O(\Delta x^2)$  decimos que hemos hecho una aproximación del operador continuo a segundo orden de exactitud. El orden de exactitud en la aproximación de los operadores diferenciales es algo que podemos elegir. Sin embargo, el que los operadores de las ecuaciones discretas sean aproximados con cierto orden de exactitud no implica que las soluciones de las ecuaciones discretizadas difieran también de la solución exacta por un error del mismo orden. En general esto depende del método numérico empleado. Si teóricamente se prueba que un método numérico genera soluciones  $y(x)$  con segundo grado de exactitud por ejemplo, entonces estas soluciones están relacionadas con la solución exacta  $y_0(x)$  de la siguiente manera

$$y(x) = y_0(x) + E(x)(\Delta x^2) + O(\Delta x^3) \quad (4.3)$$

donde  $E$  denota el término de error. El saber que es posible escribir la solución aproximada de esta manera es muy importante puesto que implica que el método numérico es convergente o bien que las soluciones convergen, es decir, si calculamos una nueva solución numérica  $y_1(x)$  pero ahora doblando la resolución, esto es, hacemos los intervalos del dominio más pequeños tal que sean de magnitud  $\Delta x/2$  y calculamos la diferencia  $(y - y_0)/(y_1 - y_0)$  necesariamente esperamos obtener

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = \frac{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = 4 + O(\Delta x^3), \quad (4.4)$$

decimos entonces que el método numérico es convergente y que las soluciones convergen a segundo orden (hay que notar que el 4 depende del factor en que aumentó la resolución).

En nuestro caso, se sabe teóricamente que los métodos numéricos implementados en el código generan soluciones con segundo orden de aproximación entonces las soluciones obtenidas mediante este código necesariamente serán convergentes a segundo orden.

La solución conocida con la que probamos convergencia de las soluciones obtenidas con el código numérico fue el estado base con  $\psi(\mathbf{0}, 0) = 1$  que en el límite continuo, como mencionamos anteriormente, tiene una densidad central independiente del tiempo, esto es,  $\rho(\mathbf{0}, t) = \rho(\mathbf{0}, 0) = 1$  para todo  $t$ ; En la Figura 4.1 se muestra la convergencia

a de segundo orden para todo tiempo  $t$  de la densidad central, es decir, al aumentar la resolución, disminuyendo los intervalos espaciales de  $\Delta x = \Delta z = 0,2$  a  $\Delta x = \Delta z = 0,1$ , el valor promedio de la densidad disminuyó en un factor de cuatro. Además la Figura 4.2 se muestra que el estado base es un sistema virializado en el límite continuo pues la relación  $2K + W = 0$  se satisface con segundo orden de convergencia.

Es importante notar que a pesar de la convergencia de las soluciones, la independencia temporal de la densidad no es satisfecha estrictamente de hecho el estado base se está comportando como un estado perturbado, recordemos que la densidad de un estado base perturbado oscila con una frecuencia característica, ver la sección 3.2. Necesariamente el error de truncamiento debido a la discretización introduce una perturbación para todo  $t$  de la evolución. El punto es qué clase de perturbación esperamos que se introduzca numéricamente, nos gustaría que fuera pequeña de manera que al evolucionar un estado base no encontráramos que dicho estado fuera inestable contradiciendo los resultados de la teoría de perturbaciones. Esta exigencia en realidad constituye una segunda prueba al código numérico. En el caso de la evolución del estado base con  $\psi(\mathbf{0}, 0) = 1$  específicamente estamos pidiendo que la densidad  $\rho$  de la función de onda tenga un comportamiento estacionario de manera que su frecuencia de oscilación coincida con la predicha por la teoría de perturbaciones calculada en la sección 3.2. Que el código satisface también esta segunda prueba es claro de la Figura 4.3, ésta es la gráfica de la transformada de Fourier de la evolución temporal de la densidad central del dato inicial y muestra que su frecuencia de oscilación es  $\gamma = 0,046$  coincidiendo con la calculada para una perturbación lineal, via la teoría de perturbaciones.

## 4.2. Perturbaciones no esféricas

Hemos visto en la sección anterior que los estados base al ser evolucionados con el código numérico con simetría axial se comportan como lo haría un estado base perturbado por una perturbación radial e infinitesimal. En ésta sección estudiaremos el comportamiento de un estado base ante perturbaciones pequeñas no esféricas. El dato inicial que se evoluciona es de la forma

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_{ground} + \delta\psi, \quad (4.5)$$

donde  $\delta\psi = e^{-ik_r \sqrt{x^2+y^2}} \left( \sum_{l=0}^2 a_l Y_l^0 \right)$ , y los coeficientes  $a_l = A_l e^{-(\sqrt{x^2+z^2}-r_0)^2/\sigma^2}$  son cáscaras de tipo gaussiano las cuales son agregadas a la parte real de la función de onda de un estado base. Por otra parte, el factor  $e^{-ik_r \sqrt{x^2+y^2}}$  contribuye con una velocidad inicial distinta de cero a la perturbación y los  $Y_l^0$  son armónicos esféricos con simetría axial. Tenemos entonces que la perturbación está caracterizada completamente por los parámetros  $r_0$ ,  $A_l$ ,  $\sigma$  y  $k_r$ .

Se hicieron diferentes corridas para distintas combinaciones de los parámetros de la perturbación encontrando para todas ellas resultados similares: 1) el sistema inicial después

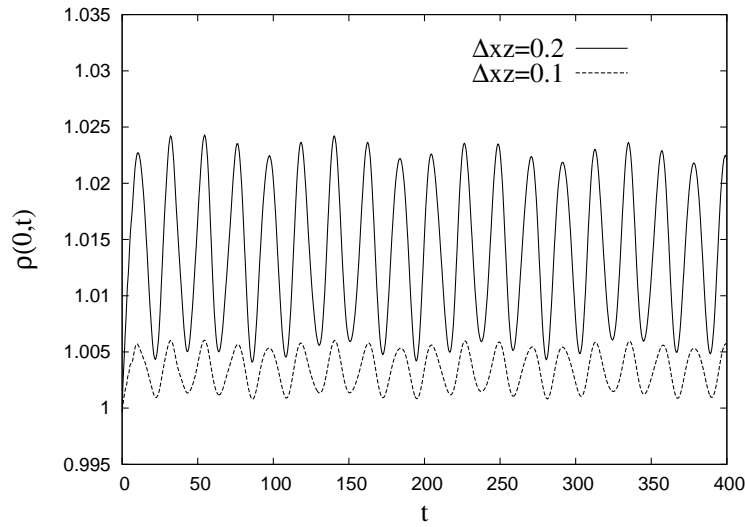


Figura 4.1: Se muestra que la densidad central presenta convergencia de segundo orden al usar dos diferentes resoluciones. Las corridas fueron llevadas a cabo en un dominio de  $x \in [0, 20]$ ,  $z \in [-20, 20]$  con resoluciones  $\Delta x = \Delta z = 0,1, 0,2$ . El hecho de que con la menor resolución la densidad central sea cuatro veces más grande que cuando la resolución es menor indica convergencia de segundo orden.

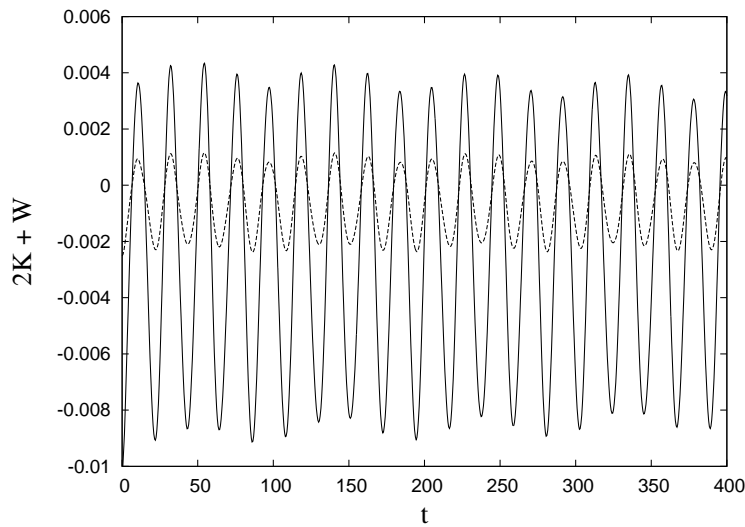


Figura 4.2: En esta gráfica se muestra el significado de una configuración virializada. Debido a los errores de discretización al resolver el sistema SP se introduce un error en los cálculos, entonces formalmente el sistema solo estará virializado en el límite continuo.



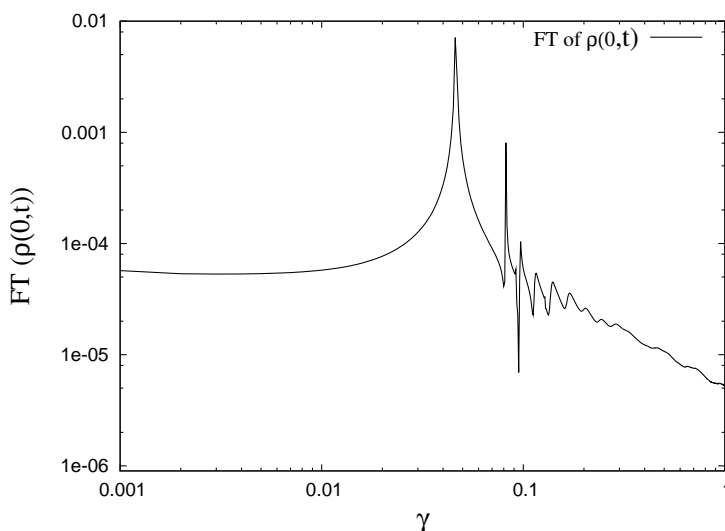


Figura 4.3: Transformada de Fourier para la densidad central después de que la evolución se ha llevado a cabo. El pico principal muestra que  $\gamma = 0,046$ , lo cual coincide con el resultado obtenido usando teoría de perturbaciones radiales pequeñas [15].

de cierto tiempo se relaja y virializa, es decir alcanza un estado de equilibrio, 2) más aún, la configuración inicial tiende al estado base inicial  $\psi_{ground}$ , ésto se verifica al observar que la masa  $M$  y la energía total se aproximan a los respectivos valores de  $\psi_{ground}$ .

Los resultados que aquí se presentan son los obtenidos de la evolución del estado base perturbado con una perturbación inicial cuyos parámetros característicos tienen los valores:  $r_0 = 10,0$ ,  $A_0 = A_1 = 0$ ,  $A_2 = 0,02$ ,  $\sigma = 2,0$ ,  $k_r = -2,0$ . La evolución se llevo a cabo en un dominio numérico para el cual  $x \in [0, 20]$ ,  $z \in [-20, 20]$  con resolución  $\Delta x = \Delta z = 0,2$  y la masa de la perturbación es de alrededor del 0,8 % la del estado base.

En la Figura 4.4 se muestra que la configuración inicial tiende a un estado de equilibrio virializado mientras que la Figura 4.5 muestra que la energía total se aproxima a la del estado  $\psi_{ground}$ .

### 4.3. El colapso

En esta sección se estudia el colapso de configuraciones no esféricas de campo escalar y se muestra que los estados base son atractores para dichas configuraciones iniciales.

El procedimiento que se sigue para verificar que una configuración inicial evoluciona hacia un estado base y además determinar cual es dicho estado base es el siguiente: *i)* Dada la evolución de un estado inicial  $\psi(\mathbf{x}, t)$  se obtiene via la Transformada de Fourier de una cantidad física, por ejemplo de la densidad central  $\rho_c^\psi$ , la frecuencia  $\beta$  del modo fundamental de oscilación del sistema. Se asume que dicha  $\beta$  está asociada a la frecuencia característica

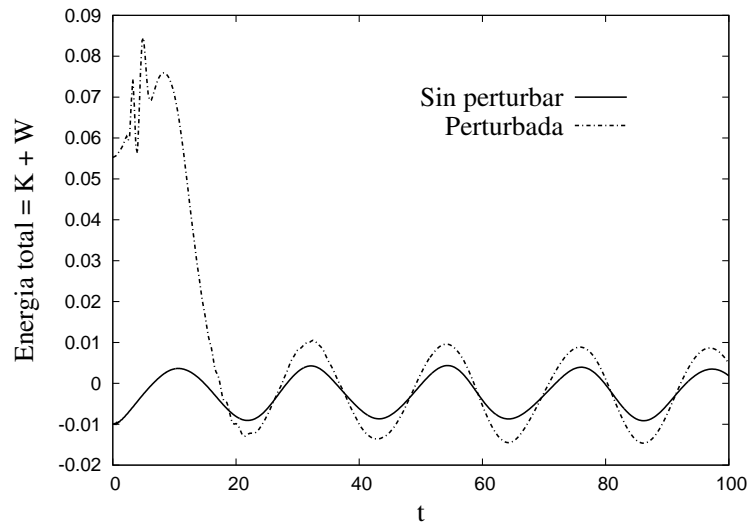


Figura 4.4: Se muestra la evolución de la energía total. Aparentemente el sistema está sobrecalentado en un principio pero después de un cierto tiempo recupera la energía de la configuración inicial

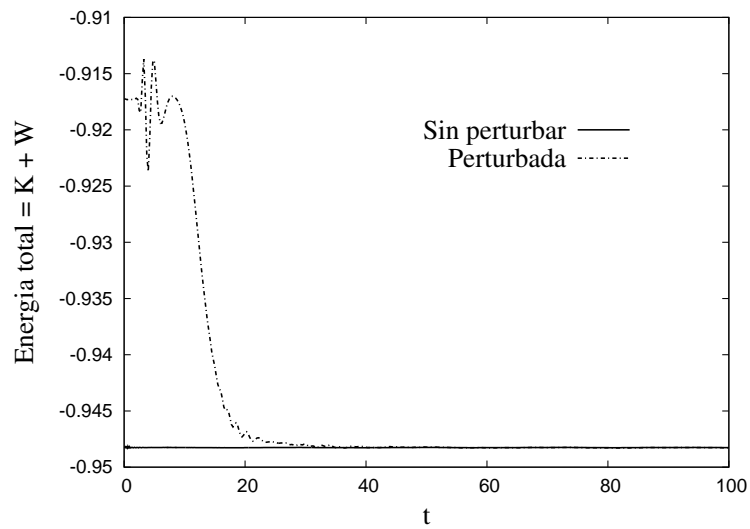


Figura 4.5: Relación virial para la configuración.

de oscilación  $f = \beta/2\pi$  de un estado base perturbado  $\psi_{perturbed}$  cuya perturbación es lineal y radial y que el sistema inicial está evolucionando a dicho estado perturbado. Esto es debido a que aun para tiempos largos de evolución numérica el estado inicial a lo más puede tender a un estado perturbado ya que la aproximación de las ecuaciones al discretizarlas introducen una perturbación intrínseca al sistema. *ii*) Una vez conocida  $f$  se puede calcular el parámetro de rescalamiento  $\lambda$  que relaciona  $\psi_{perturbed}$  y el estado base con  $\hat{\psi}(\mathbf{x}, 0) = 1$ . Usando la relación para  $t$  dada por (3.9) el parámetro de rescalamiento es calculado como  $\lambda = (f/\hat{f})^{1/2}$ ; *iii*) Conociendo  $\lambda$  se pueden calcular de manera directa las cantidades para el estado base cuyo estado perturbado es  $\psi_{perturbed}$ . Debido a que no estamos resolviendo el sistema continuo de ecuaciones, lo que podemos esperar es que las cantidades físicas para  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , como su densidad central  $\rho_c^\psi$  y su masa  $M_\psi$ , converjan a los del estado base cuya configuración perturbada corresponda al  $\psi_{perturbed}$ . *iv*) También es necesario checar que el estado final de  $\psi$  es una configuración con simetría esférica. Definimos entonces la función elipticidad como la diferencia integrada entre  $\rho_z^\psi = \rho(0, z, t)$  y  $\rho_x^\psi = \rho(x, 0, t)$  medida desde el centro de masa de la configuración. Se observó para todas las configuraciones iniciales con simetría axial que después de un cierto tiempo la elipticidad del sistema se relajaba y tendía a cero en el límite continuo. *v*) Finalmente se verificó que todas las configuraciones iniciales tendieran a estados virializados.

A continuación describiremos la evolución de una configuración inicial que consiste en un estado base más una perturbación con simetría axial. Siguiendo el procedimiento anteriormente descrito, se encuentra el estado base al cual tiende la configuración inicial. La configuración inicial está dada por

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_{ground} + \sum_{l=0}^2 a_l Y_l^0 \quad (4.6)$$

donde  $a_l = A_l \exp[-r^2/\sigma_l^2]$  es una gaussiana con  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$  centrada en el origen, con  $\sigma_l$  y amplitud real  $A_l$ . Realizamos varias corridas para diferentes  $A_l$  y  $\sigma_l$ , aquí presentaremos sólo una representativa. En todos los casos el resultado es que el sistema completo evolucionó hacia un estado base con masa considerablemente más grande que la del respectivo  $\psi_{ground}$  pero menor que la de la configuración inicial de manera que emite campo escalar durante la evolución.

Este comportamiento atractor de los estados base fue mostrado en el caso de configuraciones iniciales con simetría esférica en [21] y fue mostrado en [22] por primera vez para el caso de configuraciones iniciales no esféricas. Los resultados que se presentan aquí son los de la evolución de una configuración inicial para la cual  $\psi_{ground}(\mathbf{0}, 0) = 2$ ,  $l = 1$ ,  $A_l = 1$  y  $\sigma_l = 2$ . La masa inicial agregada al sistema es del orden del  $\sim 3\%$  de la masa original para el estado base y es considerablemente mayor que en el caso de la perturbación no esférica anterior. En éste caso, a diferencia del anterior, en el que la configuración inicial evolucionó al estado base que se perturbó, el sistema evoluciona a un estado base con mayor masa que el original perturbado. Se encuentra entonces que parte del campo escalar de la perturbación se fusiona al  $\psi_{ground}$  y parte es emitido durante la evolución.

La evolución fue llevada a cabo en un dominio numérico con  $x \in [0, 12]$ ,  $z \in [-12, 12]$  y resoluciones  $\Delta x = \Delta z = 0,1$  y  $\Delta x = \Delta z = 0,15$ . La frecuencia fundamental resultó ser de  $f = 0,0983$ , lo cual implica un parámetro de reescalamiento de  $\lambda = 1,462$ . La densidad central y la masa del estado  $\psi_\lambda$  asociada con éste  $\lambda$  específico son  $M_\lambda = 3,014$  y  $\rho_c^\lambda = 4,563$ . En la Figura 4.6, se muestra el valor de la masa  $M_\psi$  contra la densidad central  $\rho_c^\psi$  del estado  $\psi$  para las dos diferentes resoluciones anteriormente especificadas. La línea sólida es la rama de todos los estados base y se construye como se indica en la última sección del capítulo anterior. La cruz sobre la rama corresponde al estado base con  $M_\lambda = 3,014$  y  $\rho_c^\lambda = 4,563$ .

La convergencia de las cantidades  $M_\psi$  and  $\rho_c^\psi$  también se muestra en la Figura 4.6. La convergencia es de segundo orden y las estrellas indican la configuración hacia la que el sistema se aproxima al relajarse para cada resolución. Un análisis de convergencia revela que ésta es de segundo orden hacia la configuración marcada con la cruz. En la Figura Fig. 4.7, se muestra que la función elipticidad se relaja y la configuración tiende a una configuración esférica axialmente simétrica.

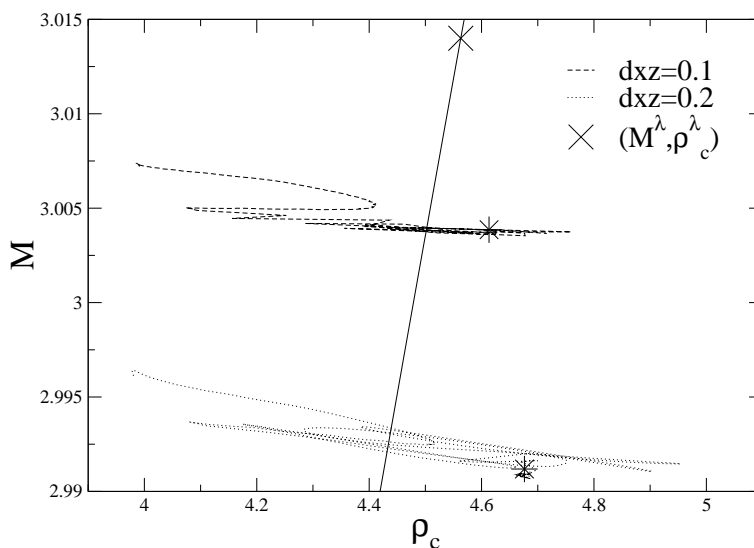


Figura 4.6: Evolución de la masa de la configuración inicial contra la densidad central especificada en el texto. Las resoluciones que se usan son  $\Delta x = \Delta z = 0,1$  (puntos) y  $\Delta x = \Delta z = 0,15$  (líneas cortadas). La línea sólida representa la rama de estados base esféricos. Las estrellas marcan los valores a los que tienden la masa y la densidad central en las distintas corridas. Considerando que los cálculos numéricos son convergentes a segundo orden, de estas dos corridas con distintas resoluciones, se infiere que la configuración en el límite continuo es la que está marcada con la cruz.

Como punto final en este capítulo se mostrarán los resultados obtenidos al evolucionar

una configuración inicial axialsimétrica que no resulta de una perturbación a un estado base. La configuración inicial es de la forma

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=0}^3 A_l \exp[-r^2/\sigma_l^2] Y_l^0 \quad (4.7)$$

donde  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ ,  $\sigma_l$  es el ancho de la gaussiana y  $A_l$  una amplitud real. Varias corridas se hicieron para diferentes valores de  $A_l$  y  $\sigma_l$ . Aquí se presentan los resultados para una configuración inicial con  $A_0 = 9,0$ ,  $A_1 = A_2 = A_3 = 1,0$  y  $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1,5$ . La evolución se llevó a cabo en una red numérica para la cual  $x \in [0, 12]$ ,  $z \in [-12, 12]$  y con resoluciones  $\Delta x = \Delta z = 0,1$  and  $\Delta x = \Delta z = 0,15$ . Para ésta configuración se encontró la frecuencia fundamental de  $f = 0,128$  lo cual implica un parámetro de reescalamiento  $\lambda = 1,669$ . El valor central de la densidad y masa del estado base  $\phi_\lambda$  asociado con ésta específica  $\lambda$  son  $M_\lambda = 3,441$  y  $\rho_c^\lambda = 7,75$  respectivamente, la intersección de dichos valores está marcado con una cruz en la Figura 4.8. También en ésta figura se muestra la evolución de la la masa  $M_\psi$  contra la densidad central  $\rho_c^\psi$  del estado  $\psi$  para las dos resoluciones del dominio numérico previamente especificadas. La línea sólida es la rama de todas las configuraciones de estados base. Los asteriscos son las configuraciones a las que el sistema se aproxima para las distintas resoluciones y asumiendo que los algoritmos empleados en los códigos numéricos tienen convergencia de segundo orden la configuración marcada con la cruz es a la que dichas configuraciones convergen a segundo orden. En la Figura 4.9 se muestra que el sistema evoluciona a una configuración esférica y virializada. .

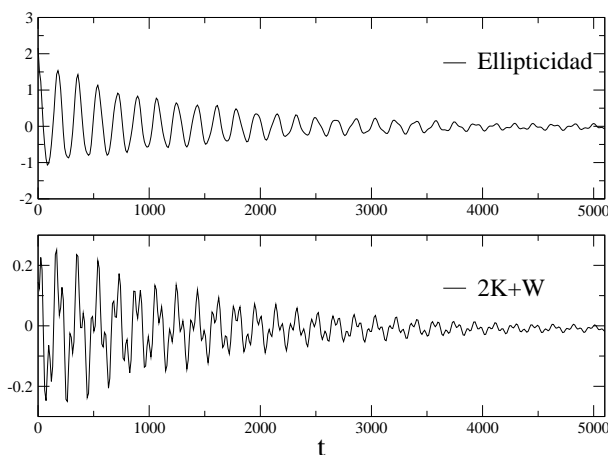


Figura 4.7: Evolución de la relación virial  $2K + W$  y la Elipticidad. Después de un tiempo, la configuración inicial axialsimétrica evoluciona hacia una configuración con simetría esférica y virializada. Las amplitudes de oscilación de la elipticidad y de la cantidad  $2K + W$  se hacen más pequeñas conforme el tiempo avanza y tienden a cero.

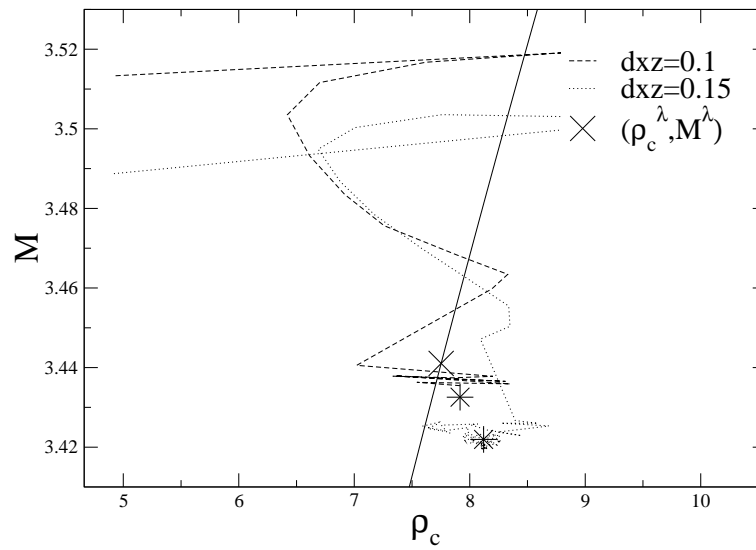


Figura 4.8: Evolución de la densidad central y la masa para la configuración inicial especificada en el texto. Usamos resoluciones de  $\Delta x = \Delta z = 0,1$  (líneas cortadas) y  $\Delta x = \Delta z = 0,15$  (puntos). La línea sólida representa estados base con simetría esférica. Las estrellas marcan los valores a los que tienden la masa y la densidad central en las distintas corridas. Considerando que los cálculos numéricos son convergentes a segundo orden, de estas dos corridas con distintas resoluciones, se infiere que la configuración en el límite continuo es la que está marcada con la cruz.

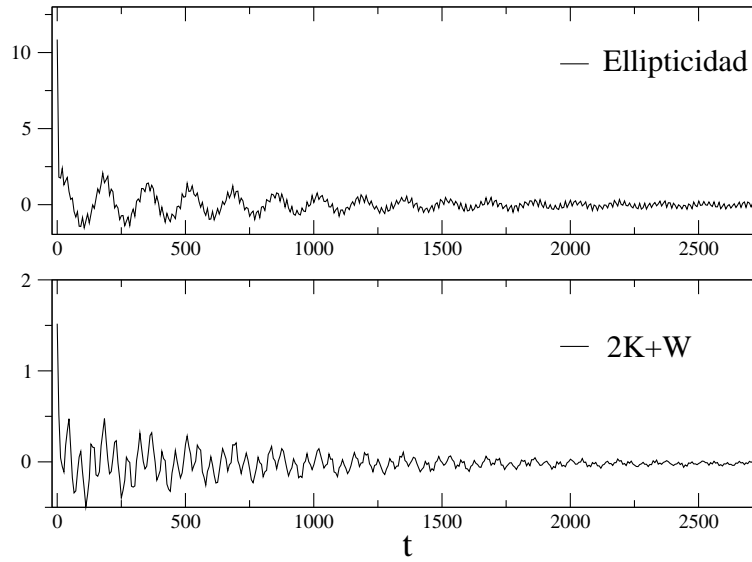


Figura 4.9: Monitoreo de la elipticidad y la relación virial  $2K + W$ . Se concluye que la configuración inicial tiende a una configuración con simetría esférica y virializada.





# Capítulo 5

## Choques frontales

En este capítulo se estudia el caso de interacciones frontales entre configuraciones de campo escalar en el estado base. El código numérico que se emplea es básicamente el mismo que el del capítulo anterior puesto que para estudiar interacciones frontales de configuraciones esféricas es suficiente contar con un espacio axialsimétrico. En la primera sección se describe cómo se construyen en general las configuraciones iniciales que se evolucionan mientras que en la segunda y última sección se muestran los resultados de la evolución para distintas configuraciones específicas.

### 5.1. Configuraciones iniciales

Las configuraciones iniciales se construyen a partir de estados base como los que se encontraron en el capítulo 3 de la siguiente manera: *i)* se interpola la función de onda  $\psi_1$  de uno de los estados base en la red axialsimétrica de manera que su centro se encuentre en  $(0, z_0)$  *ii)* se interpola también en la red la otra configuración de equilibrio  $\psi_2$  pero en éste caso se centra en el punto  $(0, -z_0)$ , *iii)* se resuelve la ecuación de Poisson para esta configuración. Tenemos entonces el dato inicial correspondiente a dos configuraciones de equilibrio en el estado base. En la Figura 5.1 se muestra el perfil de densidad de dos distintos datos iniciales a evolucionar uno de ellos consiste de dos estados base con amplitud central 1 y separados de centro a centro una distancia de 20 y el otro de los mismos estados base pero separados una distancia de 30.

Es necesario tener especial cuidado cuando  $\Lambda$  es distinto de cero porque en este caso la ecuación de Schrödinger es no lineal de manera que la superposición de funciones de onda que son solución al sistema SP por separado no son solución de la ecuación no lineal. Con el fin de disminuir el efecto de interferencia inicial de  $\psi_1$  con  $\psi_2$ , descrita por  $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle$ , demandamos que esta cantidad sea del orden de precisión de los cálculos numéricos, es decir que sean a los más del orden de precisión de la interpolación de los datos en la red axial. Un ejemplo del término de interferencia para las configuraciones iniciales del la

Figura 5.1 se muestra en la Figura 5.2. En el caso en el que los estados base se encuentran separados de centro a centro una distancia de 20 la interferencia es del orden de  $1e - 8$  mientras que cuando se encuentran a una distancia de 30 la interferencia es del orden de  $1e - 14$ .

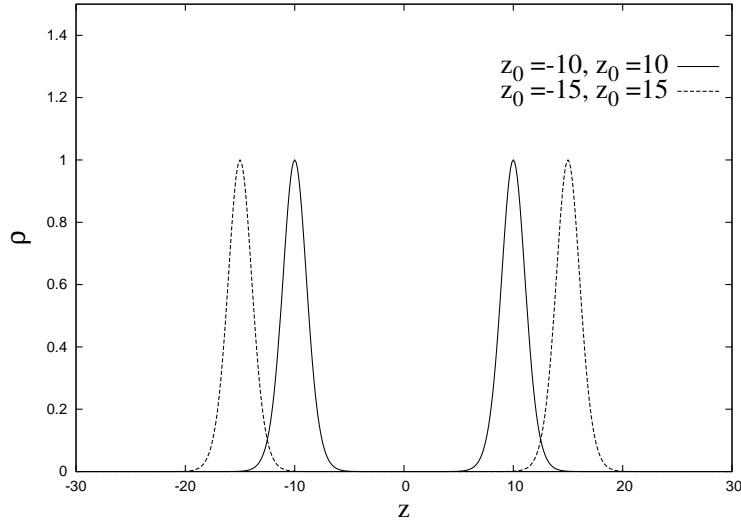


Figura 5.1: perfiles de densidad de dos configuraciones iniciales que corresponden a estados base con amplitud central 1 con diferentes separaciones de centro a centro, en uno de los datos iniciales esta distancia es de 20 mientras que en el otro es de 30. El momento inicial de ambos datos iniciales es de  $p_z = 3,0$ .

Otro ingrediente importante del dato inicial a evolucionar es el momento en dirección  $z$  que los estados base tengan inicialmente. En el capítulo 2 vimos que la densidad de momento lineal está dada por la expresión

$$p_i = \frac{i}{2}(\psi^* \partial_i \psi - \psi \partial_i \psi^*) \quad (5.1)$$

entonces multiplicando el estado base  $\psi_1 = e^{iyt} \phi(r)$  por una función  $e^{ip_z z}$   $\psi_1 \rightarrow \psi_1 e^{ip_z z}$  generaremos una configuración con momento inicial distinto de cero que se mueve en sentido de izquierda a derecha sobre el eje  $z$ ; la configuración  $\psi_2 \rightarrow \psi_2 e^{-ip_z z}$  se moverá entonces en dirección contraria a la primera. Es claro que aun con  $p_z = 0$ , las configuraciones se atraerán una a otra debido a la gravedad y se superpondrán en algún instante. Sin embargo el hecho de tener momento inicial distinto de cero hará que lo hagan en un tiempo menor.

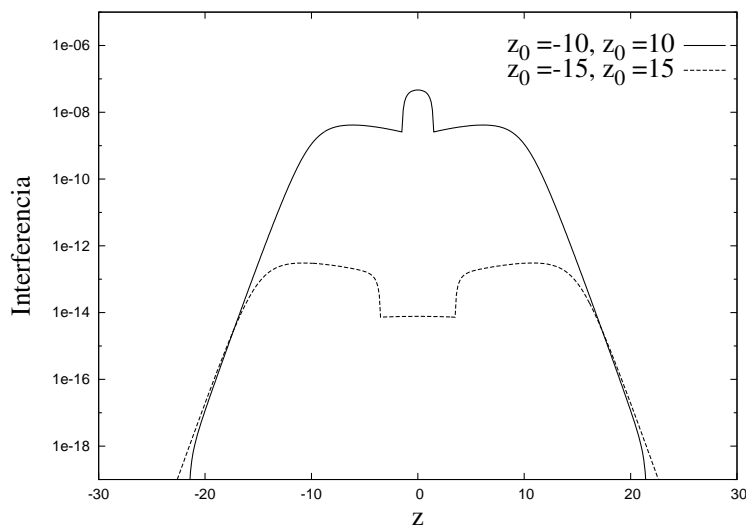


Figura 5.2: Se muestra la interferencia  $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle$  para los dos datos iniciales cuyas densidades se muestran en la Figura 5.1.

## 5.2. Colisiones

El primer escenario que consideraremos es el que corresponde a la colisión frontal de estados base con masas iguales. En la figura 5.3 se muestran las instantáneas de los perfiles de densidad a lo largo del eje  $z$  para la configuración inicial con  $p_z = 3,0$  y  $z_0 = 15$  en el caso cuando  $\Lambda = 0$ . Lo que se encuentra es que las dos configuraciones se mueven una hacia otra acelerándose debido al potencial gravitacional entre ellas y eventualmente se superponen, es en este momento cuando un patrón de interferencia se forma, después de un tiempo una configuración se mueve hacia la izquierda y otra hacia la derecha. La interpretación de ésto es que las configuraciones iniciales se traspasan una a la otra. Es claro que el perfil de densidad de ambos objetos se distorsiona a medida que se encuentran más próximos, esto no es difícil de explicar si consideramos la idea de que un estado base está constituido por partículas (no autointeractuantes en el caso cuando  $\Lambda = 0$ ) que se atraen unas a otras por medio del potencial gravitacional que se ejerce entre ellas. Se tiene entonces que los estados base son configuraciones no rígidas; entonces la parte del estado base que se encuentra más cerca del otro estado base, “sentirá” una fuerza gravitacional atractiva mayor que la parte más alejada, sufrirá una aceleración mayor provocando la distorsión del perfil de densidad. Después de traspasarse, las distribuciones se aproximan a la frontera (localizada en  $z = \pm 30$ ) y la densidad de probabilidad es absorbida por la esponja por lo que la integral de  $M$  cae a cero. En la Figura 5.4 se muestra el patrón de interferencia que se forma alrededor al tiempo  $t \sim 5$ .

Otro experimento numérico que se llevó a cabo, fué la evolución de un dato inicial

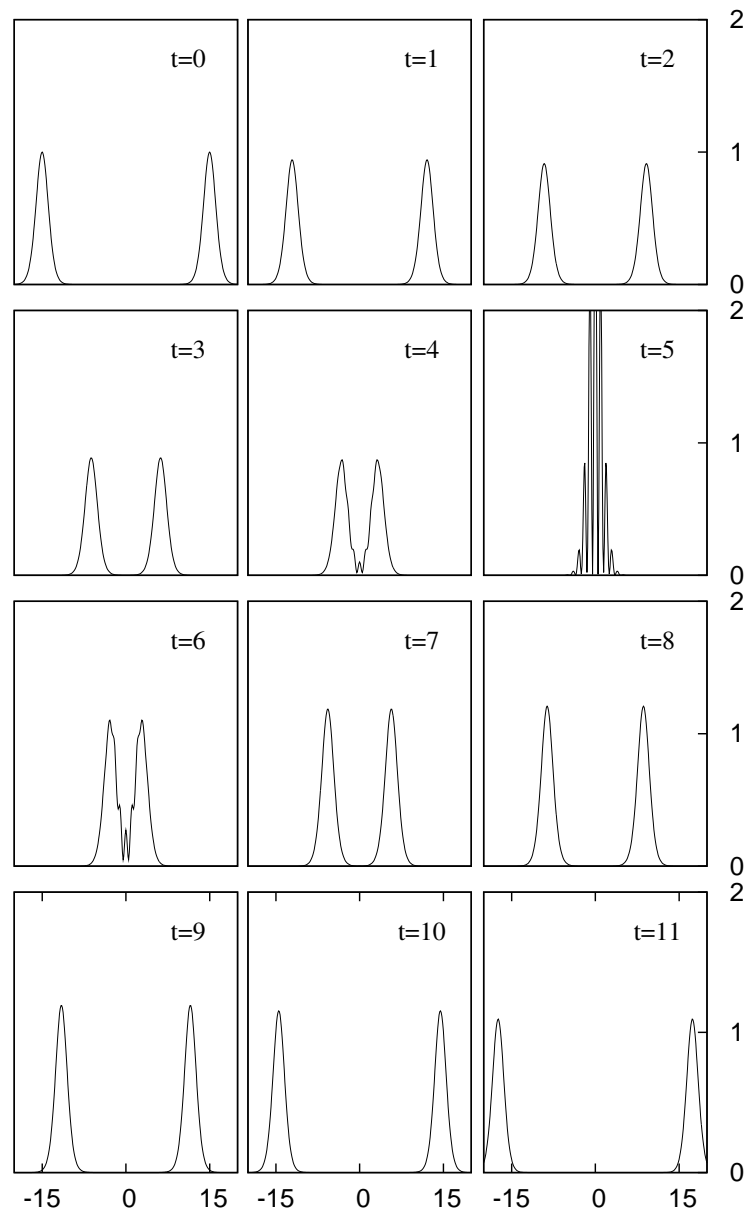


Figura 5.3: Instantáneas de la evolución de la densidad de probabilidad de dos estados base con amplitud central 1,  $\Lambda = 0$ ,  $p_z = 3,0$  y  $z_0 = 15$ . Los dos estados se aproximan, mientras la distancia entre sus máximos disminuye los perfiles se distorsionan, en el momento en el que se superponen se forma un patrón de interferencia, el cual se muestra en la Figura 5.4. Tiempo después los estados se traspan. La energía  $E$  de esta configuración es todo el tiempo positiva de donde se deduce que el estado no está ligado. Después de un tiempo de permanecer superpuestos los estados se separan hasta que alcanzan la frontera donde son absorbidos por la esponja. El dominio numérico utilizado es  $x \in [0, 30]$ ,  $z \in [-30, 30]$  con resolución  $\Delta x = \Delta z = 0,125$ .

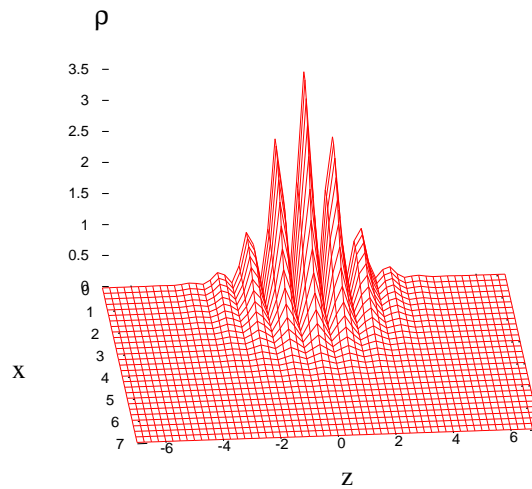


Figura 5.4: Patrón de interferencia formado durante la colisión de dos configuraciones con  $\Lambda = 0$ ,  $z_0 = 15$ ,  $p_z = 3,0$ . Las instantáneas de la densidad de esta configuración se muestran en la Figura 5.3. Dado que los perfiles de densidad se deforman aún antes de que los objetos colisionen no podemos decir que estos objetos son solitones y a lo más es posible decir que el comportamiento es solitónico.

consistente de dos estados iniciales con la misma masa y amplitud central igual a uno, con momento inicial  $p_z$  igual a cero y  $\Lambda = 0$ . En este caso lo que se encontró fue que ambas configuraciones se aproximaron al centro de masas, esto es, al centro del dominio numérico y a diferencia del caso anterior no se separaron nuevamente. A partir de que se fusionaron continuaron la evolución como una de las configuraciones iniciales que mostramos en el capítulo anterior para un sola configuración inicial. Después de un tiempo, las amplitudes centrales de las configuraciones evolucionaron y formaron una sola bola, cuya masa se estabilizó en torno a una constante y lo mismo sucedió con la energía. Se midió la relación virial y se encontró que el sistema evoluciona a un estado virializado. La amplitud de la densidad central también empezó a oscilar alrededor de un valor fijo. Las instantáneas de la evolución de la densidad se muestran en la Figura 5.5. Los valores de la densidad central, la masa, la energía y la relación virial se muestran en la Figura 5.6.

Una diferencia importante entre las configuraciones que se evolucionaron en el primer caso, donde los estados base se traspasan y éste, es el signo de la Energía total, en el primer caso la energía  $E$  siempre fue positiva mientras que en el segundo la energía fue negativa. Concluimos entonces que estos son ejemplos de evoluciones para sistemas no ligados y ligados.

Se analizaron más casos encontrando que no todas las configuraciones iniciales construidas presentaron el mismo comportamiento, de hecho se encontró que el valor total de la energía  $E = K + W + I$  puede ser tomado como criterio para decidir si los estados base

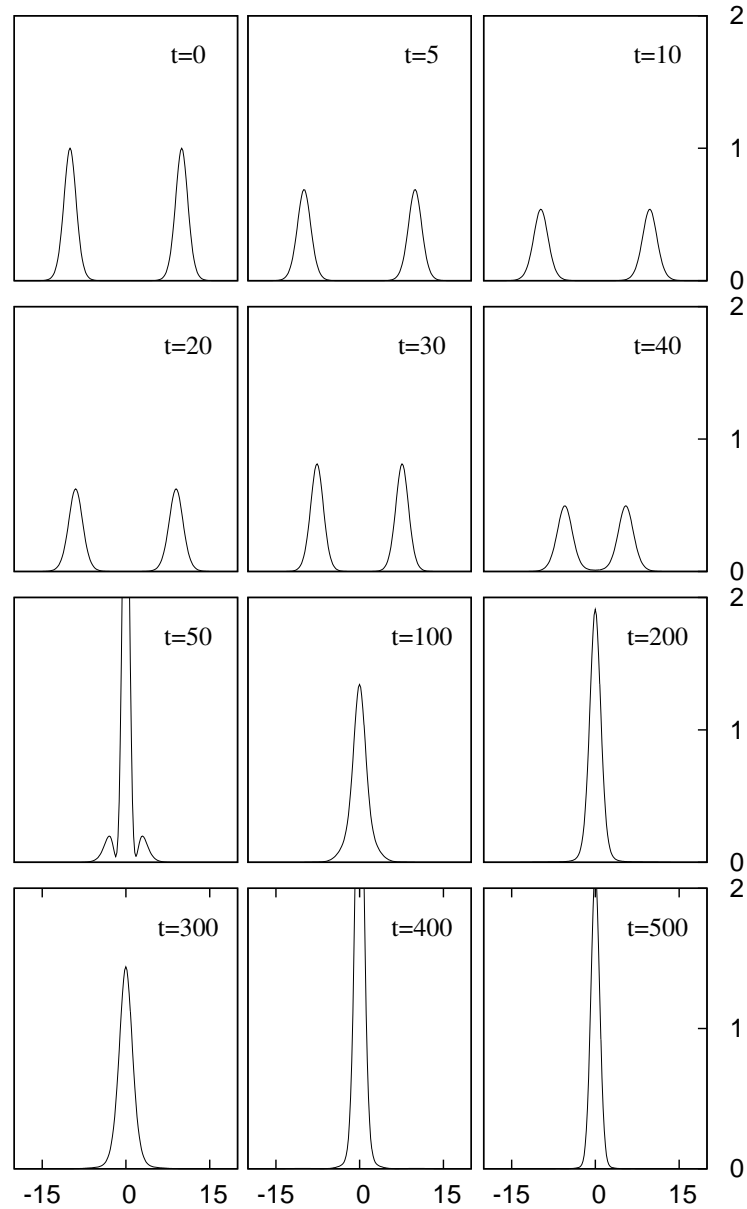


Figura 5.5: Instantáneas de la evolución de la densidad de probabilidad de dos estados base con amplitud central 1,  $\Lambda = 0$ ,  $p_z = 0,0$  y  $z_0 = 10$ . Los dos estados se aproximan, y se fusionan en el centro de la malla, y forman un solo objeto. El dominio numérico utilizado es  $x \in [0, 30]$ ,  $z \in [-30, 30]$  con resolución  $\Delta x = \Delta z = 0,1$ .

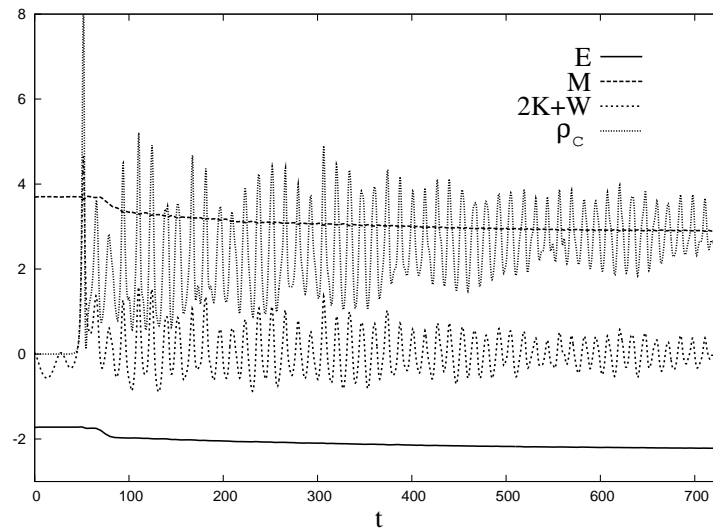


Figura 5.6: Se muestra la densidad central, el Número de partículas, la Energía  $E$  y la relación virial  $2E+K$  para la evolución de una configuración inicial consistente en dos estados base con amplitud central 1,  $\Lambda = 0$ ,  $p_z = 0,0$  y  $z_0 = 10$ . El sistema se comporta como un estado perturbado que tiende a una configuración de estado base. El dominio numérico utilizado es  $x \in [0, 30]$ ,  $z \in [-30, 30]$  con resolución  $\Delta x = \Delta z = 0,1$ .

se traspasan uno al otro o se fusionan formando una sola configuración esférica final. En la Figura 5.7 se muestran las energías totales para diferentes tipos de configuraciones iniciales. En la figura 5.7 las energías corresponden a configuraciones iniciales con  $\Lambda = 0$ . Dos casos particulares resaltan. El primero cuando  $p_z = 1,0$ , para ese caso la energía total inicial es grande y positiva y el sistema se comporta como el descrito anteriormente con  $p_z = 3,0$ , es decir, se traspasan las bolas iniciales. La energía es siempre positiva y se aproxima a cero porque las configuraciones salen del dominio numérico. El segundo caso es para el que  $p_z = 0$ , la energía total siempre es negativa y la configuración final a la que se aproxima el sistema es la de una sola configuración. Acerca de los casos en la misma gráfica con  $p_z = 0,75, 0,71, 0,7$  no es claro, dentro del tiempo que toman las corridas, el estado final al que la configuración inicial evoluciona, lo único que se puede observar es que los perfiles de densidad se distorsionan fuertemente debido a la colisión.

Con este tipo de ejemplos en los que las configuraciones iniciales están formadas por dos estados base con masa igual no es posible determinar si los estados base, cuando no terminan formando un solo objeto autogravitante, se traspasan uno al otro y conservan el sentido de su movimiento a lo largo de la dirección  $z$ . Esto se debe a la simetría que presentan dichas configuraciones iniciales: tanto la masa como el momento lineal en los dos semiplanos  $z > 0$  y  $z < 0$  conservan los mismos valores para todo  $t$  de la evolución. Es necesario entonces romper ésta simetría considerando configuraciones iniciales que comprendan estados base con distintas masas.

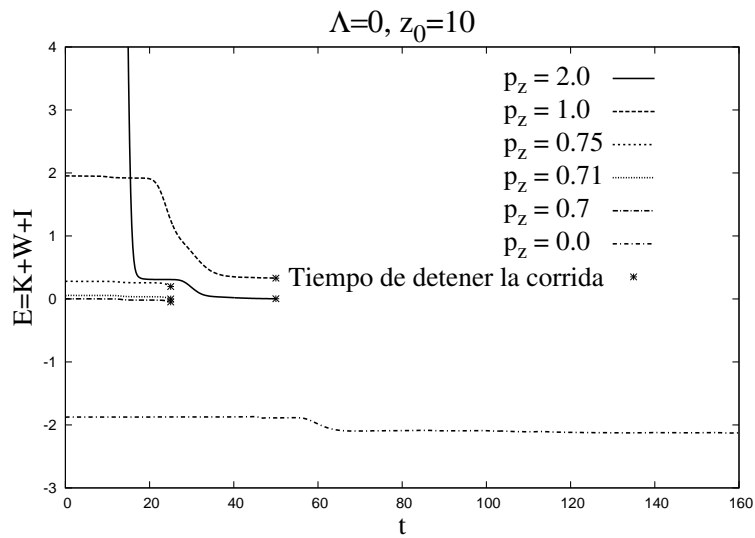


Figura 5.7: Energía total  $E = K + W + I$  para diferentes parámetros iniciales, todas con  $\Lambda = 0$  and  $z_0 = 10$ . Las configuraciones con  $p_z = 2,0, 1,0$  empiezan a evolucionar con valores totales de la energía grandes y positivos y muestran comportamiento solitónico; la energía total tiende a cero una vez que los perfiles de densidad llegan a las fronteras del dominio numérico. La configuración con  $p_z = 0$  permanece con energía total negativa de manera que el sistema es acotado, los dos estados base se fusionan y permanecen así.



Los casos con masas distintas tienen la ventaja de que permiten distinguir las configuraciones por sus momentos lineales en la dirección  $z$ . En la Figura 5.8 se muestran las instantáneas de la evolución de una configuración inicial con energía inicial positiva y  $\Lambda = 0,2$  y cuyos estados base tienen distintas masas y por tanto las magnitudes de sus momentos son también distintos, se usan  $p_z = 3,0$  y  $z_0 = 15$ . Se nota claramente que los estados base se traspasan uno al otro aun cuando su perfil de densidad se distorsiona ligeramente.

En la Figura 5.10 se muestra la transferencia de masa del semiplano  $z > 0$  al  $z < 0$  y viceversa. Es claro que la masa se transfiere de un lado al otro de una manera muy eficiente. También se muestra el valor del momento lineal en la dirección  $z$  en ambos semiplanos, también es claro que los momentos se transfieren.

Como resultado final mostraré un estudio más detallado de la evolución de una configuración inicial que presenta energía total negativa. En la Figura 5.5 se muestra el perfil de densidad a lo largo de la dirección  $z$  para una colisión en la que  $\Lambda = 0$ ,  $z_0 = 10$  and  $p_z = 0$ , esto es, solo la fuerza gravitacional determina la dinámica del sistema. Es posible ver que los estados base se fusionan en una sola configuración autogravitante y que el máximo de su densidad permanece en el centro de masas de la configuración inicial. A medida que transcurre el tiempo la amplitud de oscilación de la densidad central se hace más pequeña tendiendo a estabilizarse al rededor de un valor central y tanto la masa como la energía total tienden a un valor fijo. La relación virial partiendo del valor cero toma un valor máximo en el momento en el que la densidad central también lo hace.

Para ilustrar el significado físico de los resultados de la Figura 5.5 asumiremos que la masa de los estados base de la configuración inicial es del orden  $M \sim 10^{11} M_\odot$  y que la masa del boson es  $m = 10^{-23} \text{eV}$ ; estos valores nos fijan el valor de  $\epsilon$  de manera que la separación inicial entre los estados base es del orden de  $\sim 3,52 \text{kpc}$  y el tiempo en el que la densidad es máxima es  $t_{collision} \sim 52,5 \sim 8,3 \times 10^6 \text{yr}$ . La velocidad relativa máxima antes de la colisión es de  $v \sim 830 \text{km/s}$ . Estos parámetros corresponden a escalas galácticas, y en principio las escalas de tiempo son una predicción de este modelo.

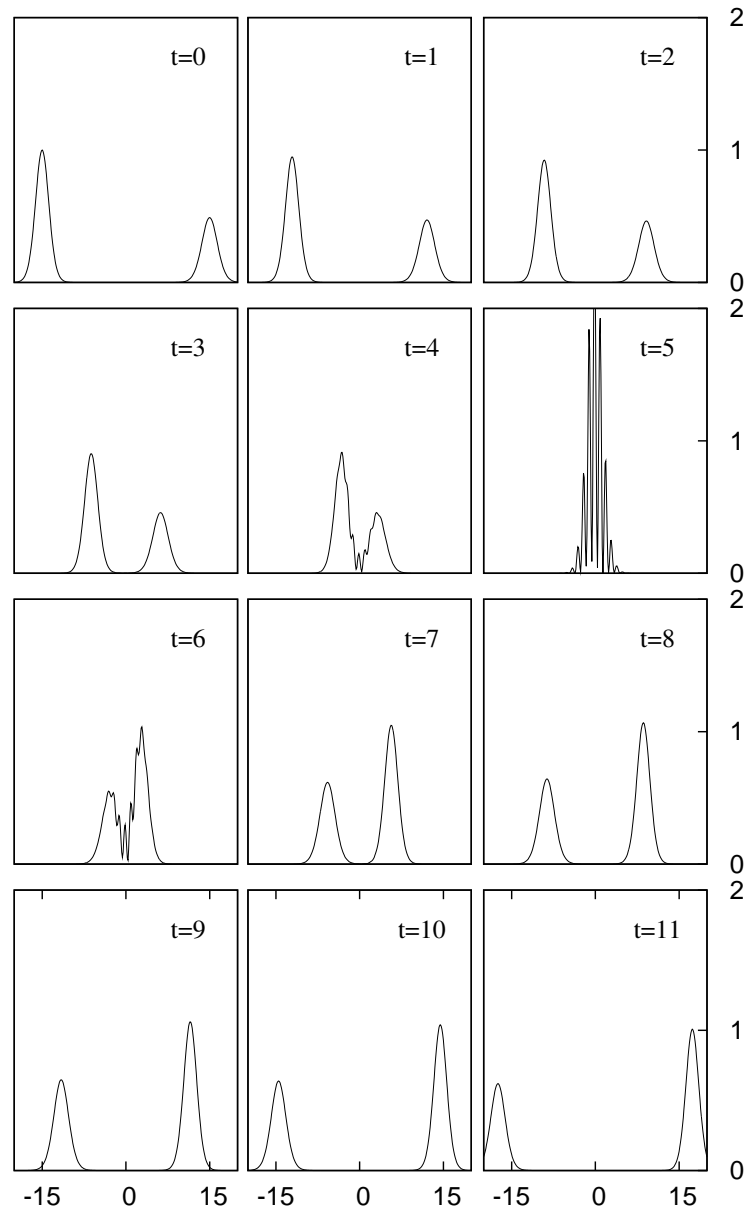


Figura 5.8: Instantáneas de la densidad de probabilidad para la interacción de dos estados base con masas distintas y  $\Lambda = 0,2$ ,  $p_z = 3,0$  y  $z_0 = 15$ . Las configuraciones muestran comportamiento solitónico en el sentido de que se traspasan. Su energía es siempre positiva  $E \sim 35$ , hasta que las densidades llegan a las fronteras del dominio numérico. El dominio numérico es  $x \in [0, 30]$  and  $z \in [-30, 30]$  con resolución  $\Delta x = \Delta z = 0,125$ .

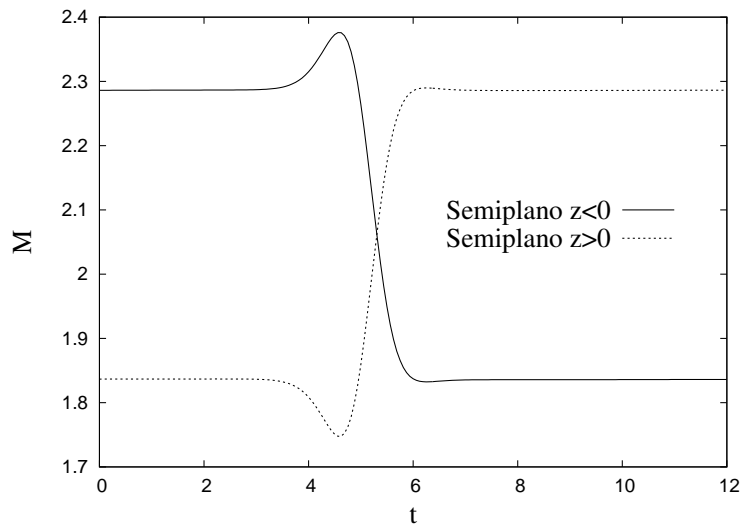


Figura 5.9: Se muestra la transferencia de partículas de los semiplanos  $z < 0$  al  $z > 0$  y viceversa. La masa en cada semiplano también es mostrada. la configuración inicial consistió en dos estados base con  $\Lambda = 0,2$ , valores centrales respectivos  $\psi(0, 0) = 1, 0,7$  y masas  $M = 2,437, 1,9383$ . El momento inicial fue de  $p_z = 3,0$ .

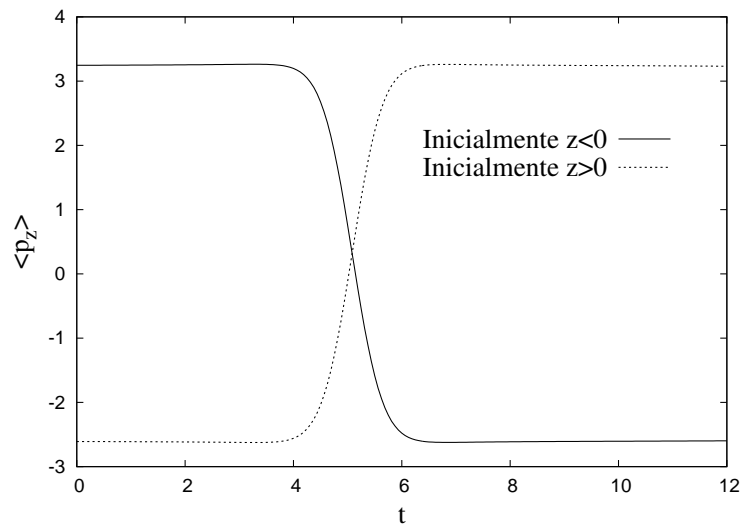


Figura 5.10: Se muestra la transferencia de momento para las evolución del dato inicial de la Figura anterior.



# Capítulo 6

## Estrellas de Bosones relativistas

Con la experiencia adquirida en la solución del sistema SP dependiente del tiempo, se explora en este capítulo la evolución de estrellas de bosones (EB) totalmente relativistas de la sección 1.3. Es decir, se resuelve el sistema de ecuaciones dependiente del tiempo usando métodos numéricos nuevamente. Se prueba que en efecto, las configuraciones de equilibrio tienen ramas estable e inestable, como se menciona al principio de este trabajo y que la inestabilidad es de dos tipos, como sugiere la Figura 1.3. Hasta donde conocemos, este es el primer trabajo que presenta los dos tipos de inestabilidad para EB de manera formal.

### 6.1. Evolución del espacio-tiempo

Dado que consideramos la evolución del sistema EKG y no solamente construimos las configuraciones de equilibrio, es necesario relajar la métrica que describe al espacio-tiempo. Elegimos las coordenadas de Schwarzschild, pero esta vez se permite que las funciones métricas dependan del tiempo:

$$ds^2 = -\alpha(r, t)^2 dt^2 + a(r, t)^2 dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (6.1)$$

donde se ha mantenido la coordenada radial por simplicidad. Usando este nuevo elemento de línea es conveniente separar las partes real e imaginaria del campo escalar  $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ . Con el fin de tener una implementación sencilla de las ecuaciones de evolución, es conveniente definir variables de primer orden para el campo escalar:  $\pi_i = \frac{a}{\alpha} \partial_t \phi_i$  y  $\psi_i = \partial_r \phi_i$ , para cada  $i = 1, 2$ . Con estas nuevas variables y para la métrica (6.1), la ecuación de Klein-Gordon se traduce en el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden en  $r$  y  $t$ :

$$\begin{aligned}
\partial_t \phi_1 &= \frac{\alpha}{a} \pi_1, \\
\partial_t \phi_2 &= \frac{\alpha}{a} \pi_2, \\
\partial_t \psi_1 &= \partial_r \left( \frac{\alpha}{a} \pi_1 \right), \\
\partial_t \psi_2 &= \partial_r \left( \frac{\alpha}{a} \pi_2 \right), \\
\partial_t \pi_1 &= \frac{1}{r^2} \partial_r \left( r^2 \frac{\alpha}{a} \psi_1 \right) - a \alpha \frac{dV}{d|\phi|^2} \phi_2.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

En términos de estas variables de primer orden las ecuaciones de Einstein son

$$\frac{\partial_r a}{a} = \frac{1 - a^2}{2r} + \frac{r}{2} [\pi_1^2 + \pi_2^2 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + a^2 V] \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial_r \alpha}{\alpha} = \frac{a^2 - 1}{r} + \frac{a'}{a} - r a^2 V \tag{6.4}$$

$$\partial_t a = \alpha r [\psi_1 \pi_1 + \psi_2 \pi_2]. \tag{6.5}$$

Estas ecuaciones corresponden a: la constricción Hamiltoniana, la condición de foliación y la constricción de momento respectivamente. Claramente, este sistema de ecuaciones está sobredeterminado y es necesario escoger dos de las tres ecuaciones como el conjunto a ser resuelto. En este caso se elige no resolver la constricción de momento (6.5) durante la evolución, y se decidió usarla solamente para monitorear la precisión de los cálculos numéricos. Por tanto, el algoritmo para la evolución consiste en:

- usar (6.2) para evolucionar el sistema,
- después resolver (6.5) y
- usar los nuevos valores de las funciones métricas para evolucionar nuevamente.

Para conseguir esta evolución utilizamos una aproximación en diferencias finitas de segundo orden, como la descrita en el Capítulo 4, pero esta vez, vale notar que solamente hay una coordenada espacial, lo que permite implementar un código mas sencillo que el descrito en las secciones previas, pero útil para el caso esférico en condiciones de gravedad fuerte.

Las condiciones de frontera para el campo escalar son las de onda esférica saliente en un espacio-tiempo de Schwarzschild, que en su forma de ecuación diferencial se lee:

$$\partial_r \pi_i + \partial_t \pi_i + \pi_i / r = 0, \quad \psi_i = -\pi_i - \phi_i / r, \tag{6.6}$$

para cada  $i = 1, 2$ . O sea, las partes real e imaginaria del campo escalar se consideran ondas salientes por separado. Esta es una condición de frontera muy simple que con certeza se puede mejorar, pero que ha bastado para el presente estudio. Lo único que se pidió a la condición de frontera ha sido que preserve la convergencia de segundo orden de los cálculos numéricos y que esto ocurra para varios escalas de tiempo de cruce de una señal a lo largo del dominio numérico.

## 6.2. Los tres posibles destinos de las Estrellas de Bosones

Con la finalidad de mostrar los tres tipos de comportamiento de las estrellas de bosones, construimos un gráfico semejante al de la Figura 1.3, pero esta vez indicando los comportamientos esperados en cada rama de las familias de soluciones. Este nuevo gráfico se muestra en la Figura 6.1.

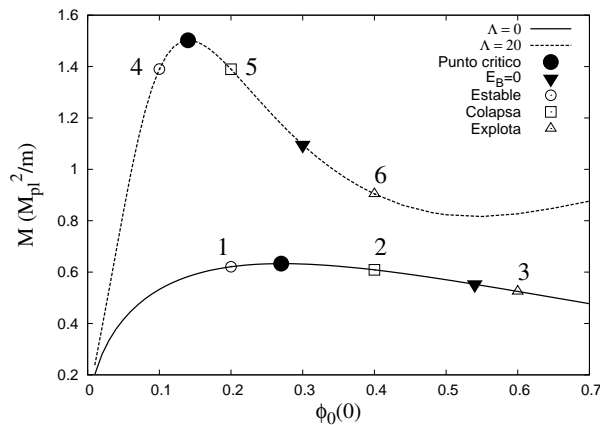


Figura 6.1: Familias de configuraciones de equilibrio para dos valores de  $\Lambda$ . Las configuraciones a la izquierda del máximo son configuraciones estables, como las configuraciones indicadas con círculos blancos. Las configuraciones entre los círculos negros y los triángulos negros se colapsan para formar hoyos negros, como las configuraciones indicadas con un cuadrado blanco. Las configuraciones como los triángulos blancos explotan.

Los estados que estudiamos son representativos y se muestran en la Tabla 6.1. Además estas configuraciones particulares están indicadas en la Figura 6.1 con círculos, cuadrados y triángulos blancos. Las configuraciones inestables se perturban con una capa gaussiana de campo escalar con la misma fase que el que compone a la estrella de bosones y cada una de las configuraciones reaccionará de una manera característica. La perturbación se aplica de la siguiente manera: se aplica un perfil gaussiano a  $\phi_1$  ( $\phi_1 \rightarrow \phi_1 + \text{gaussiana}$ ), y se resuelven la constricción Hamiltoniana y la condición de foliación; esto garantiza que el dato inicial satisface las ecuaciones de Einstein; entonces se procede a evolucionar el sistema mediante el proceso mencionado arriba.

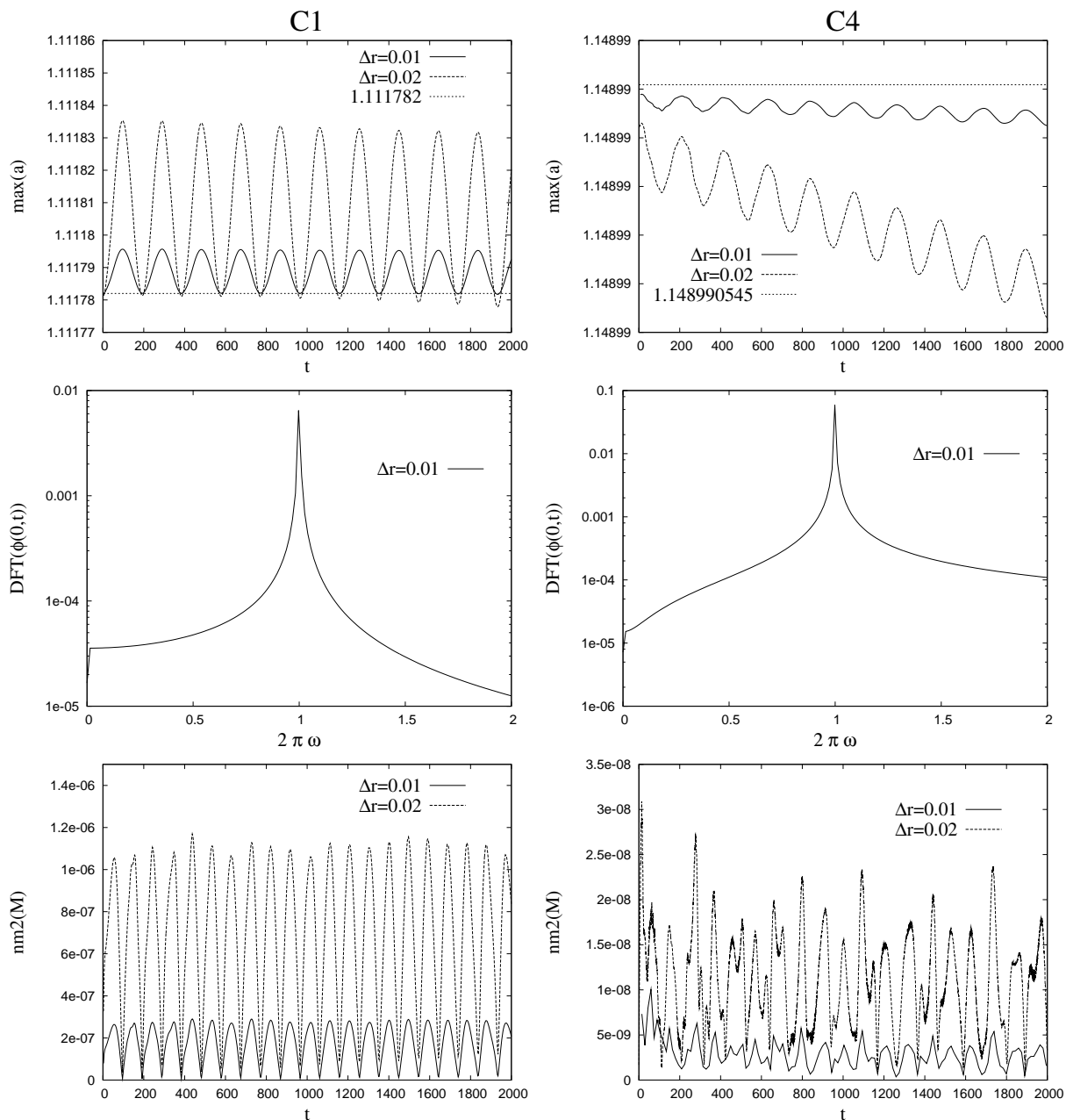


Figura 6.2: (Arriba) Convergencia de segundo orden de  $\max(a)$  para las configuraciones 1 y 4. La línea constante indica el valor de  $\max(a)$  al tiempo inicial, que es el valor que se supone debe preservar a lo largo de la evolución. La convergencia de segundo orden a dicho valor es un buen indicador de que la evolución aporta resultados consistentes con lo esperado. (En medio) Transformada de Fourier del valor central de  $\phi_1$  para las mismas configuraciones. El pico aparece al valor  $\omega = \frac{1}{2\pi}$ . Esto indica que el campo escalar oscila con la frecuencia correcta según las unidades reescaladas. (Abajo) Convergencia de segundo orden de la norma euclidiana de la constricción de momento (6.5) a cero; el objeto de esta gráfica es mostrar que la constricción de momento (que es una ecuación que no se ha resuelto durante la evolución) converge al valor correcto: cero. Para conseguir estas gráficas se usaron dos resoluciones distintas, como demanda una prueba de convergencia.



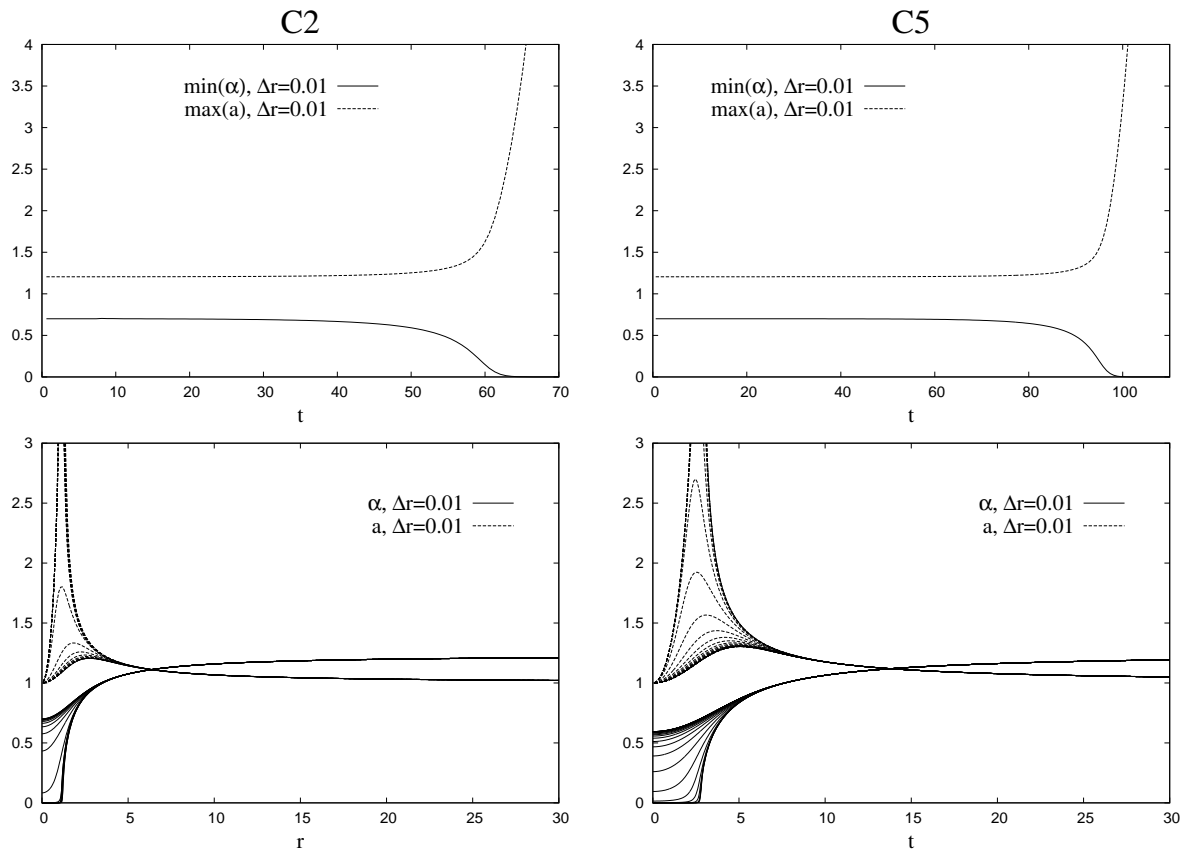


Figura 6.3: (Arriba) Máximo de  $a$  y mínimo de  $\alpha$  para las configuraciones C2 y C5. Se muestra el colapso del lapso a cero y la divergencia de  $a$ , lo cual indica la formación de un hoyo negro según las coordenadas que se usaron. (Abajo)  $a$  y  $\alpha$  para distintos tiempos, donde se puede apreciar el proceso de colapso. La resolución usada está indicada en los gráficos y el dominio espacial es  $r \in [0, 30]$ .

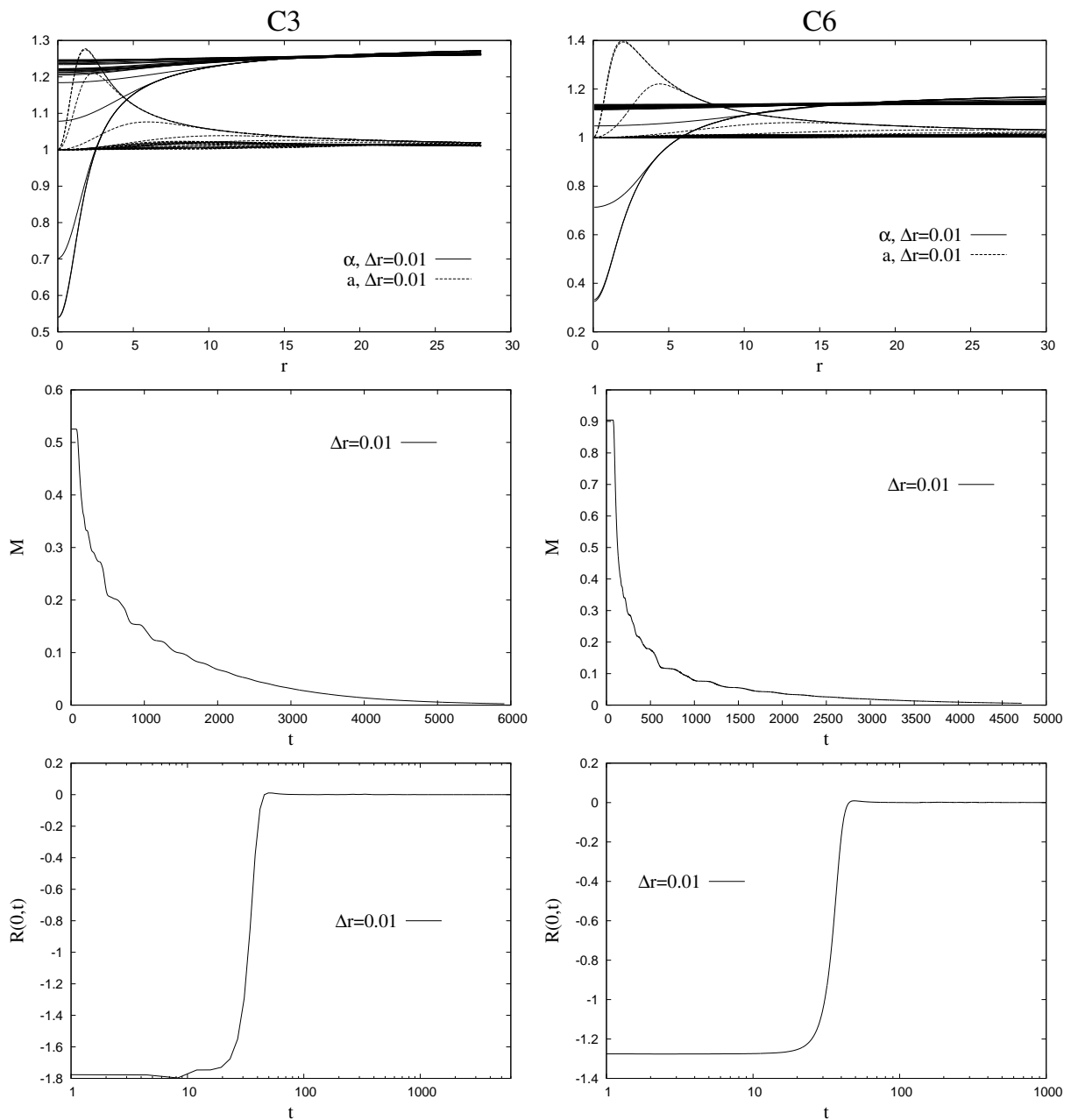


Figura 6.4: (Arriba)  $a$  y  $\alpha$  para distintos valores del tiempo para las configuraciones C3 y C6. Claramente, la métrica evoluciona hacia una métrica plana en coordenadas esféricas. (En medio) Masa vs tiempo. Estas gráficas indican que la masa está saliendo del dominio numérico y está siendo emitida hacia el infinito espacial (no sabemos exactamente la velocidad de propagación del campo escalar). (Abajo) Valor central del escalar de Ricci, el cual tiende a cero, lo cual indica que en efecto la curvatura está correspondiendo a la de un espacio-tiempo plano de manera independiente a la elección de coordenadas. La resolución usada y el dominio numérico son los que aparecen en las gráficas.

Label	$M$	$M_{pert}$	%	$r_{95}$	$r_0$	A
C1	0.620882		0.	7.66		
C2	0.608758	0.60937	0.1	4.84	6.	0.0008
C3	0.5248	0.52537	0.1086	3.68	5.	0.0012
C4	1.390156		0.	12.27		
C5	1.389544	1.39101	0.105	7.62	9.	0.0008
C6	0.9043	0.905234	0.103	5.66	7.	0.0008

Cuadro 6.1: Configuraciones usadas para presentar los tres distintos tipos de comportamiento. Las propiedades de la capa gaussiana que actúa como perturbación, y la magnitud de la perturbación también se indican.

La teoría predice que: las configuraciones 1 y 4 deben permanecer estables; las configuraciones 2 y 5 deben colapsar y formar hoyos negros; finalmente, las configuraciones 3 y 6 deben explotar y dispersarse.

### 6.2.1. Destino 1: configuraciones estables

La prueba consiste en mostrar que la hipótesis básica en la construcción de Estrellas de Bosones, es decir, la dependencia temporal armónica del campo escalar y la independencia temporal de la geometría del espacio-tiempo. Las configuraciones elegidas para esta prueba son -como se mencionó arriba- las 1 y 4, marcadas con círculos blancos en la Figura. 6.1.

En la parte alta de la Figura 6.2 se muestra el máximo de la función métrica  $a$ . Debido al error de discretización, las configuraciones están siendo perturbadas permanentemente, y por tanto la métrica aparece oscilando en el tiempo. Lo importante por tanto es mostrar que la amplitud de estas oscilaciones converge a cero conforme la resolución aumenta, es decir, conforme uno se aproxima al límite continuo. Esto es equivalente a pedir que el máximo de  $a$  converja al valor de la solución analítica, pero como no contamos con tal, pedimos por lo menos que converja al valor calculado cuando se construyó la Estrella de Bosones. Estas oscilaciones han sido incluso interpretadas como oscilaciones de modos cuasinormales, que son usualmente calculados para estrellas de fluidos perfectos. Dado que al usar dos resoluciones (una el doble de la otra) la amplitud obtenida cuando se usa la resolución baja es cuatro veces mayor que cuando se usa la alta resolución, concluimos que la convergencia es de segundo orden.

Una vez probado que la geometría converge a un estado de independencia temporal (obtenida a través del monitoreo de  $\max(a)$ ), la prueba de fuego consiste en mostrar que el campo escalar está realmente oscilando con la frecuencia correcta. En la parte media de la Figura 6.2 se presenta la transformada de Fourier del valor central de  $\phi_1$ . El resultado indica que la frecuencia de oscilación del campo escalar corresponde al valor propio calculado al momento de construir la solución de Estrella de Bosones (recordar que el tiempo ha sido reescalado  $\tilde{t} = \omega t$ ; en estas unidades, la frecuencia es  $\omega = 1/2\pi$ ).

Por completitud, en la parte baja de la misma Figura, se muestra la convergencia de segundo orden de la constricción de momento, para lo cual se han usado dos resoluciones.

A estas configuraciones estables no se aplica una perturbación explícita pues consideramos de mayor importancia, determinar si el campo escalar oscila con la frecuencia correcta, pues esto indica que el código numérico ha sido implementado correctamente. Sin embargo se hicieron diversos experimentos numéricos y se verificó la estabilidad de este tipo de configuraciones bajo perturbaciones explícitas, cosa que ha sido ya bien estudiada (ver por ejemplo [9]).

### 6.2.2. Destino 2: configuraciones inestables ligadas

Estas son las configuraciones con  $E_B < 0$ , por lo que se espera que estas configuraciones colapsen. Para este segundo caso elegimos las configuraciones 2 y 5, que presentan energía de amarre negativa. En principio el error de discretización es suficiente para lograr que configuraciones de este tipo colapsen. Sin embargo, con el fin de lograr un colapso en una simulación mas corta usamos una perturbación explícita de perfil gaussiano, cuyas propiedades aparecen en la Tabla 6.1. Vale notar que la cáscara gaussiana aumenta la masa de la configuración inicial.

Los resultados de la evolución aparecen resumidos en la Figura 6.3, donde se muestran instantáneas de  $\alpha$  y de  $a$ ; de hecho el lapso colapsa a cero en la región donde se espera que está cubierta por un horizonte aparente, y la función métrica  $a$  comienza a diverger debido al uso de coordenadas de Schwarzschild. En estas coordenadas, un horizonte aparente se forma cuando el lapso es suficientemente cercano a cero. Sin embargo, es sencillo usar distintas coordenadas que permiten calcular la posición, masa y oscilaciones de un horizonte aparente. Un análisis completo de un caso, en el cual incluso el horizonte de eventos es calculado para el colapso de una configuración que colapsa se encuentra en [11].

### 6.2.3. Destino 3: configuraciones inestable no ligadas

En este caso la energía de amarre es positiva, lo que indica que no es necesario imprimir trabajo para desensamblar la configuración. Este es un caso que apenas se menciona en la literatura, y solamente se indica cuál ha de ser el comportamiento final, y parece ser que esta Tesis es el primer documento donde se estudian este tipo de configuraciones, aparte del caso aislado de [11].

En este caso se procede de la misma manera que en el caso anterior, y tambien la perturbación aumenta la masa de la configuración de equilibrio, de modo que incluso agregar masa al sistema activa la explosión de este tipo de configuraciones.

En la Figura 6.4 se muestran los resultados obtenidos de la evolución de las configuraciones C3 y C6 y lo que ocurre es lo siguiente: i) las funciones métricas  $a$  y  $\alpha$  se vuelven constantes después de un tiempo finito, ii) la función de masa decrece a cero durante una

escala de tiempo semejante, y iii) el valor central del escalar de Ricci tiende a cero también, como es de esperarse para un espacio-tiempo plano.

Cabe resaltar que agregar partículas al sistema no ha cambiado la naturaleza explosiva de este tipo de configuraciones.



# Capítulo 7

## Conclusiones y Perspectivas

La lista de resultados originales obtenidos en este trabajo de tesis, sus implicaciones y extensiones posibles aparecen a continuación.

- El formalismo Postnewtoniano fue útil para demostrar que en el límite de campo gravitacional débil y campo escalar no relativista, las ecuaciones de Einstein Klein-Gordon se reducen a las de Schrödinger-Poisson, y para definir en este régimen, sin ambigüedades, las cantidades físicas de configuraciones autogravitantes y autointeractuantes de campo escalar. Esto es importante porque dichas cantidades son las “observables” potenciales de objetos astrofísicos formados por campos escalares.
- Se demostró que, en el límite Newtoniano, los estados base son estables no solamente bajo perturbaciones radiales como se indica en [21], sino también ante perturbaciones con simetría axial. Resultaría interesante verificar este resultado en el contexto relativista y generalizar los estudios plasmados en [25].
- Otro resultado importante que se desprende de este trabajo, es que distribuciones de campo escalar arbitrarias al evolucionar terminan formando estados base. El punto anterior y éste hacen más factible que objetos del tipo de los estados base existan en la Naturaleza puesto que demuestran que serían estables ante perturbaciones menos restrictivas que las radiales y que podrían ser formados por sobredensidades de materia escalar más generales.
- El comportamiento solitónico de los estados base es una característica muy específica de los objetos formados por campos escalares y puede ser determinante para verificar su existencia. Esta característica puede ser una señal particular que aporte evidencia de que la materia oscura en el Universo es de naturaleza escalar [29].
- El patrón de interferencia formado en el choque de dos estados base también es una característica única de la dinámica de estos estados. El “lensing” gravitacional gene-

rado por este patrón podría confirmar la existencia de configuraciones autogravitantes de campo escalar.

- En el régimen relativista se analizó la estabilidad de las estrellas de bosones. Se presentó por primera vez la fisión de una estrella de bosones como una propiedad de un conjunto de soluciones de estrella de bosones con una energía de amarre con signo dado [30]. Se arguye que el mecanismo por el cual las estrellas de bosones son estables es el principio de incertidumbre, a diferencia de las estrellas de fermiones donde la presión hacia afuera es ejercida por la degeneración de los fermiones. Esta es una opinión que no ha sido mostrada con detalle y aquí damos el primer paso. Las configuraciones que explotan aportan luz en esta dirección, porque son tan compactas, o sea, tan localizadas, que en efecto, es posible pensar en que la energía cinética de esas configuraciones es enorme.
- Las líneas de estudio de estrellas de bosones más activas son las siguientes: las estrellas de bosones como fuentes de ondas gravitacionales [25], y los conjuntos binarios de estrellas de bosones [26]. Con las herramientas aprendidas en este trabajo, en combinación con las desarrolladas en [11], es posible contribuir en estas líneas de investigación. Sin embargo, es tentador determinar si las estrellas de bosones se pueden formar mediante un proceso de colapso, cuales son las condiciones de energía cinética versus potencial para que se formen, y cuales son las restricciones de estos parámetros físicos que corresponden a configuraciones explosivas que a todas luces nunca podrían formarse.



# Bibliografía

- [1] T. Matos and L. A. Urena-Lopez, *Phys. Rev. D* **63**, 063506 (2001) [arXiv:astro-ph/0006024].
- [2] F. S. Guzmán and L. A. Ureña-López. *Phys. Rev. D* **68** (2003) 024023.
- [3] S. S. McGaugh, V. C. Rubin, and E. de Block, *Astron. J.* **122**, 2831 (2001). W. J. G. de Blok, S. S. McGaugh, and V. C. Rubin, *Astron. J.* **122**, 2396 (2001). P. A. S. Blais-Ouellette, and C. Carignan, *Astron. J.* **121**, 1952 (2001). A. D. Bolato, J. D. Simon, A. Leroy, and L. Blotz, *Astrophys. J.* **565**, 238 (2002).
- [4] M. Colpi, S. L. Shapiro and I Wasserman, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1968) 2485.
- [5] M Gleiser. *Phys. Rev. D* **38** (1988) 2376. M Gleiser. *Phys. Rev. D* **39** (1989) 1257 (erratum).
- [6] T. D. Lee and Y. Pang. *Nucl. Phys. B* **315** (1989) 477.
- [7] S. H. Hawley and M. W. Choptuik, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 104024.
- [8] M Gleiser and R. Watkins. *Nucl. Phys. B* **319** (1989) 733
- [9] E. Seidel, W. Suen. *Phys. Rev. D* **42** (1990) 384.
- [10] J. Balakrishna E. Seidel and W. Suen *Phys. Rev. D* **58** (1998) 104004.
- [11] F. S. Guzmán. *Phys. Rev. D* **70** (2004) 044033
- [12] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Wetterling and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 2002.
- [13] J. M. Bardeen and T. Piran. *Phys. Rep.* **96** (1983) 205
- [14] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, 1972.
- [15] F. S. Guzmán and L. A. Ureña-López. *Phys. Rev. D* **69** (2004) 124033.

- [16] S. N. Bose, Z. Phys. **26** (1924) 178. A. Einstein, Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. (1925) 3.
- [17] L. P. Pitaevskii, Zh. Eksp. Teor. Fys., **40** (1961) 646. Sov. Phys, JETP, **13** (1961) 451.
- [18] E. P. Gross, Nouvo Cimento, **20** (1961) 454.
- [19] L. Pitaevskii and S. Stringari. *Bose-Einstein Condensation*, Oxford SP (2003).
- [20] F. S. Guzmán, *Introduction to numerical relativity through examples*. Proceedings of the VI workshop of the DGFM-SMF. Rev. Mex. Fís. in press.
- [21] F. S. Guzmán and L. A. Ureña-López. Astrophys. J. **645** (2006) 814-819.
- [22] A. Bernal and F. S. Guzmán Phys. Rev. D **74** (2006) 63504.
- [23] X. Z. Wang, Phys. Rev. **D 64**, 124009 (2001).
- [24] Stuart L. Shapiro and Saul A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley-Interscience 1983.
- [25] J. Balakrishna, R. Bondarescu, G. Daues, F. S. Guzmán, E. Seidel, Class. Quantum Grav. **23**, 2631-2652 (2006). ArXiv: gr-qc/0602078.
- [26] C. Palenzuela, I. Olabarrieta, L. Lehner, S. Liebling, Phys. Rev **D 75**, 064005 (2007). ArXiv: gr-qc/0612067.
- [27] Robert Eisberg. *Fundamentos de Física Moderna*, Editorial Limusa, 1973
- [28] S. K. Adhikari, ArXiv: cond-matt/0510526.
- [29] A. Bernal and F. S Guzmán, Phys. Rev. **D 74** (2006) 103002. ArXiv: astro-ph/0610682.
- [30] A. Bernal and F. S Guzmán, Phys. Rev. **D**, enviado.
- [31] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*. North Holland (1987).
- [32] A. Patel et al. Phys. Rev. **A** (1998) R2652.
- [33] K. C. Kulander, et al. Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 2601.
- [34] W. Chism, D-I. Choi and L. E. Reichl, Phys. Rev. **A 61** (2000) 054702.
- [35] D-I. Choi and W. Chism, Phys. Rev. **A 66** (2002) 025401.

## Artículos publicados

[1] Scalar field dark matter: Head-on interaction between two structures  
Argelia Bernal and F. Siddhartha Guzmán.  
Phys. Rev. D **74**, 103002 (2006)

[2] Scalar field dark matter: Nonspherical collapse and late time behavior  
Argelia Bernal and F. Siddhartha Guzmán.  
Phys. Rev. D **74**, 063504 (2006)

[3] Non Spherical collapse of scalar field dark matter.  
Argelia Bernal and F. Siddhartha Guzmán.  
Proceedings of the XXVIII Spanish Relativity Meeting  
AIP Conference Proceedings **841**, 441 (2006).

[4] Evolution of Axisymmetric Initial Data for the Schrödinger-Poisson System.  
A. Bernal.  
Proceedings of the Advanced Summer School in Physics 2006  
AIP Conference Proceedings **885**, 40 (2007).

## Artículos por publicarse

[1] The three dynamical fates of Boson Stars  
Argelia Bernal and F. Siddhartha Guzmán.  
Enviado a Phys. Rev. D.