

AGUJEROS DE GUSANO ROTATORIOS

Índice general

<i>Lista de figuras</i>	IV
<i>Agradecimientos</i>	VI
<i>Introducción</i>	1
<i>1.. Agujeros de Gusano</i>	4
1.1. Puente de Einstein-Rosen	4
1.1.1. Puente Neutro	4
1.1.2. Puente Casi-cargado	5
1.1.3. Puente General	6
1.2. Agujeros de Gusano Transitables	7
1.2.1. Construcción de un Agujero de Gusano Transitable	8
1.2.2. Agujero de Gusano de Morris-Thorne	9
1.2.2.1. Tensor de Energía-Momento	11
1.2.2.2. Condiciones de Energía	12
1.2.2.3. Fuerzas de Marea	14
1.2.2.4. Análisis Geodésico	17
1.2.2.5. Sombra	23
<i>2.. Agujeros de Gusano Rotatorios</i>	27
2.1. Construcción del Agujero de Gusano Transitable Rotatorio	27
2.1.1. Métrica	27
2.1.2. Garganta	28
2.2. Violación de la Condición Nula de la Energía	30
2.3. Condiciones de Transitabilidad	32
2.4. Análisis Geodésico y Sombra	33
<i>3.. Agujeros de Gusano Cilíndricos</i>	37
3.1. Agujeros de Gusano Cilíndricos Estáticos	37
3.2. Agujeros de Gusano Cilíndricos Rotatorios	40
<i>4.. Agujero de Gusano tipo Kerr</i>	44
4.1. Agujero de Gusano Tipo Kerr Estático	44
4.1.1. Métrica	45
4.1.2. Singularidad	46
4.1.3. Análisis Geodésico	47

4.1.4. Geometría	50
4.1.5. Sombra	51
4.2. Agujero de Gusano Tipo Kerr Estacionario	54
4.2.1. Métrica	54
4.2.2. Geometría	57
4.2.3. Análisis Geodésico	59
4.2.4. Condiciones de Energía	63
4.2.5. Condiciones de Transitabilidad	64
4.2.6. Sombra	67
5.. Agujero de Gusano Cilíndrico Sin Violación de Condiciones de Energía	70
5.1. Métrica	70
5.2. Geometría	72
5.3. Condiciones de Energía	73
5.4. Condiciones de Transitabilidad	75
5.5. Análisis Geodésico	76
5.6. Sombra	81
Conclusiones	84
Bibliografía	86

Índice de figuras

1.1.	El ángulo φ se graficó sobre la distancia $b = b_0/\sqrt{l^2 + b_0^2}$, $l \geq 0$. El tamaño de la garganta es $b_0 = 2$ y el observador se encuentra localizado en $l_i = 6$ ($b_i = 0,316$). La línea punteada separa los puntos finales $l_f \geq l_i$ y la línea sólida separa a los ángulos iniciales $\xi \leq \pi/2$. La línea de puntos y rayas tiene $\xi = (7\pi)/9$ y está compuesta por $\varphi_{\triangleleft}^-(b < b_i)$, $\varphi_{\triangleleft}^+(\varphi > \varphi_{min})$ y $\bar{\varphi}_{\triangleleft}^+(\varphi < \varphi_{min})$ Tomada de [1].	22
1.2.	Sombra del agujero de gusano de Morris-Thorne para diferentes valores de b_0 y θ_0 . Línea sólida $b_0 = 2$, $\theta = \pi/3$. Línea rayada $b_0 = 1$, $\theta = \pi/4$. Línea punteada $b_0 = 3$, $\theta = \pi/6$	25
2.1.	Sombra de un agujero de gusano rotatorio (línea sólida) y un hoyo negro de Kerr (línea punteada) para diferentes parámetros de rotación y ángulos de inclinación. Con $M = 1$. Tomado de [2].	35
4.1.	Sombra del agujero de gusano de tipo Kerr estático en la aproximación de campo débil para $b_0 = 100$, $k_1 = 0,1$ y ángulos de inclinación θ	53
a.	$\theta = \frac{\pi}{6}$	53
b.	$\theta = \frac{\pi}{4}$	53
c.	$\theta = \frac{\pi}{3}$	53
d.	$\theta = \frac{\pi}{2}$	53
e.	$\theta = \frac{2\pi}{3}$	53
f.	$\theta = \frac{8\pi}{9}$	53
4.2.	Función f con $l_1 = 1,0$, $l_0 = 1,1$, $a = 0,1$, $k_1 = 0,11$ para diferentes valores de θ ($\theta = 0$ línea punteada, $\theta = \pi/2$ línea sólida y $\theta = \pi/4$ línea discontinua). La función tiene un mínimo en 0.859 cuando $\theta = 0$	56
4.3.	K con $l_1 = 1$, $l_0 = 1,1$, $a = 0,1$, $k_1 = 0,11$ para diferentes θ . Lejos de la singularidad $K = 1$	58
4.4.	$R = \sqrt{\Delta_1/f}$ con $l_1 = 1$, $l_0 = 1,1$, $a = 1$, $k_1 = 1$, para diferentes valores de θ . La función R es bien comportada en todas partes, incluido el equador, ($\theta = \frac{\pi}{2}$ línea sólida).	59
4.5.	Garganta del agujero de gusano para $\theta = 0$. Con $l_1 = 1$, $l_0 = 1,5$, $a = 0,1$ y $k_1 = 0,11$. Debido a que la métrica es axialmente simétrica la forma de la garganta para diferentes valores de θ será diferente.	60

4.6.	La función z para $\theta = \pi$. La garganta se encuentra en $l = l_1$. Con $l_1 = 1$, $l_0 = 1,5$, $a = 0,1$ y $k_1 = 0,11$. La condición de ensanchamiento se satisface, es decir que $z > 0$ cerca de la garganta.	61
4.7.	Geodésica en coordenadas polares con diferentes valores iniciales para θ , tomando $l_1 = 1$, $l_0 = 1,1$, $a = 0,1$, $k_1 = 0,11$, $E = 1,0$ y $L = 0,5$. Las cruces representan la singularidad, es decir $l = l_1$, $\theta = \pi/2$.	63
4.8.	$T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\mu^{\hat{\alpha}}\mu^{\hat{\beta}}$ para $\mu = e_{\hat{t}} + e_{\hat{r}}$ con (4.72). Tomando $l_1 = 1$, $l_0 = 1,5$, $a = 0,1$ y $k = 0,11$. Se observa la violación de la NEC.	64
4.9.	Las fuerzas de marea para (4.1), están dadas por (4.77), (4.78) y (4.79). Con $l_1 = 1$, $l_0 = 1,5$, $a = 0,1$, $k_1 = 0,11$. En términos de la tetrad (4.72).	65
4.10.	Tomando $l_1 = 1$, $l_0 = 1,5$, $a = 0,1$, $k_1 = 0,11$. Fuerzas de marea para $\theta = 0$. La línea sólida representa $ R_{\hat{t}\hat{t}\hat{t}\hat{t}} $.	66
4.11.	Sombra del agujero de gusano cilíndrico con $\theta = \frac{\pi}{2}$.	69
4.12.	Sombra del agujero de gusano cilíndrico, para $r_0 = 1000$, $k_1 =$ $0,1$, $a = 0,01$ y ángulos de inclinación θ .	69
a.	$\theta = \frac{\pi}{6}$	69
b.	$\theta = \frac{\pi}{4}$	69
c.	$\theta = \frac{2\pi}{3}$	69
d.	$\theta = \frac{8\pi}{9}$	69
5.1.	Tipos de geodésicas en el plano $y = 0$. La coordenada ϕ está gra- ficada en términos de x .	78
a.	<i>Órbita de Reconocimiento</i> . La geodésica es desviada des- pués de alcanzar su máximo acercamiento x_{max} .	78
b.	<i>Órbita Crítica</i> . La geodésica se aproxima asintóticamente a x_{max} .	78
5.2.	Geodésicas cruzando la garganta del agujero de gusano localizada en $x = 0$. El radio de la garganta es $L = 10$ y se considera que el viajero inicia su trayectoria en $(y_0, x_0 = 25)$. Se tomaron lo valores $\mathcal{E} = 10$, $\mathcal{L} = 5$ y $a = 0,1$, para diferentes valores de α .	80
5.3.	Sombra del agujero de gusano cilíndrico con $\theta = \frac{\pi}{2}$.	82
5.4.	Sombra del agujero de gusano cilíndrico en la aproximación de rotación lenta para $L = 100$, $a = 0,1$ y diferentes ángulos de inclinación θ .	83
a.	$\theta = \frac{\pi}{6}$	83
b.	$\theta = \frac{\pi}{4}$	83
c.	$\theta = \frac{\pi}{3}$	83
d.	$\theta = \frac{8\pi}{9}$	83

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) y al Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN) por el apoyo brindado para la realización de esta tesis. Además de los apoyos otorgados mediante los proyectos CB-2009-01, no. 132400, CB-2011, no. 166212, y I0101/131/07 C-234/07.

Se agradece también al “Laboratorio de Super-Cómputo Astrofísico (La-SumA) del Cinvestav” y al cluster Xihcoatl del Cinvestav por los cálculos numéricos que fueron realizados en las instalaciones. A la Universidad Autónoma de México por permitirnos hacer uso del cluster Kan-Balam y al Instituto Avanzado de Cosmología (IAC) por su colaboración.

INTRODUCCIÓN

Desde el inicio de la civilización, la posibilidad de realizar viajes interestelares ha poblado la imaginación de los hombres; siendo la base de innumerables relatos fantásticos. En la actualidad, los relatos de ciencia ficción están llenos de personajes heroicos que se aventuran a cruzar uno de los tantos puentes que les permiten viajar a regiones lejanas del Universo y hacer contacto con seres de inteligencia superior y salvar la raza humana; como en *Contact* de Carl Sagan o más recientemente en *Interstellar*, película que contó con el apoyo de Matt Visser para su realización.

En la literatura científica, se encuentra la primera mención de dichos puentes interestelares en 1916, siendo Ludwig Flamm el primero en mencionar que el Universo puede estar interconectado por medio de asas o túneles [3]. Más tarde, en 1935 Albert Einstein y Nathan Rosen estudian por primera vez las implicaciones que la existencia de dichos túneles, ahora llamados puentes, conlleva [4].

El término *wormhole* -agujero de gusano- fue introducido hasta finales de los años 50's por John A. Wheeler y Charles W. Misner [5, 6] para describir a los túneles a los que hacía referencia Flamm y las soluciones halladas por Einstein y Rosen. Citando a John A. Wheeler:

«Este análisis nos fuerza a considerar situaciones... donde existe un flujo de líneas de fuerza, a lo cual los topólogos llamarían *asa* de un espacio múltiplemente conexo y que los físicos más sugerentemente nombrarían *agujero de gusano*.»

No obstante, la idea de los agujeros de gusano ya había sido teorizada en 1921 por el matemático alemán Hermann Weyl en su análisis de la masa en términos de la energía del campo electromagnético [7].

En los años 70's diversas soluciones de tipo agujero de gusano fueron estudiadas [8, 9, 10]. Sin embargo no es hasta los años 80's cuando el astrónomo Carl Sagan, quien se encontraba trabajando en su novela *Contacto* pide ayuda a su amigo el físico Kip Thorne para diseñar un mecanismo realista que permita a la protagonista de su historia viajar grandes distancias cósmicas instantáneamente. Con lo cual, la solución propuesta por Ellis, en 1973, [9] fue interpretada como el mecanismo buscado por Sagan. Fue este nuevo interés en los agujeros de gusano lo que en 1988 hizo posible la publicación del trabajo de los físicos Michael S. Morris y Kip S. Thorne, en donde se dan por primera vez las ca-

racterísticas que un espacio-tiempo debe de satisfacer para describir un agujero de gusano que permita crear un atajo entre dos regiones distantes del universo y que además pueda ser atravesado, es decir un *agujero de gusano transitable* [11]; y además se habla de la necesidad de dichas construcciones de violar las condiciones de energía. Mientras que en [8, 9, 10] se había mencionado la necesidad de cambiar el signo de la parte cinética del campo escalar para mantener la estabilidad del sistema.

Actualmente la investigación de agujeros de gusano ha tomado nuevos matices con la inclusión del estudio de soluciones estacionarias que presentan rotación [12, 13, 14, 15]; agujeros de gusano cuya geometría está soportada por materia *phantom*¹ como en [17, 18, 19, 20], con materia de tipo *ghost*² en trabajos como [21, 22, 23, 24, 25]; agujeros de gusano que satisfagan la condición nula de la energía [26, 27, 28, 29], agujeros de gusano con singularidades [30, 31, 22, 29, 26, 14], entre otros.

En el presente trabajo se estudiarán dos tipos de agujeros de gusano. Un agujero de gusano de tipo Kerr, el cual es un agujero de gusano rotatorio con simetría axial que además presenta una singularidad de anillo desnuda en los límites de la garganta y tiene como fuente un campo escalar con un cambio de signo en el término cinético; y un agujero de gusano cilíndrico que rota y que también presenta la singularidad de anillo desnuda alrededor de la garganta, y que puede tener como fuente un campo escalar -dilatónico o *ghost*- acoplado con un campo electromagnético, el cual satisface la condición nula de la energía. Además, ambos son transitables, al ser sus fuerzas de marea pequeñas en ciertas regiones del espacio. Para el agujero de gusano de tipo Kerr se analiza, además una característica peculiar de su geometría, ya que la garganta del mismo viste a las singularidad de anillo desnuda, de manera similar que en la conjetura de censura cósmica de Penrose [32] el horizonte de eventos en un agujero negro. Para cada uno de éstos se calculó la sombra que proyectan, tomando una aproximación para que ambos resultaran separables.

El trabajo se divide de la siguiente manera: En el Capítulo 1 se ve una breve introducción a los agujeros de gusano, comenzando con los puentes de Einstein-Rosen para terminar con la construcción de un agujero de gusano transitable de Morris-Thorne y lo que esto implica. En el Capítulo 2 se presentan los agujeros de gusano rotatorios, su construcción, propiedades geométricas, condiciones de energía y de transitabilidad, y su sombra. Los agujeros de gusano cilíndricos y sus propiedades se introducen en el Capítulo 3. Con lo anterior se culmina la sección introductoria. En lo que resta del trabajo se presenta el material original de esta tesis. En el capítulo 4 se comienza con el análisis de la solución presentada en [14, 25], que es un agujero de gusano de tipo Kerr y se divide en dos secciones. La primera Sección 4.1 analiza la parte estática de la solución;

¹ Forma de energía oscura, que satisface la ecuación de estado $\omega < -1$. Y que puede ser un componente dominante en el Universo [16]

² Es decir, aquella que requiere un cambio de signo en el término cinético

demostrando de manera analítica que ninguna geodésica puede alcanzar la singularidad de anillo debido a la presencia de la garganta del agujero de gusano; también, al tomar como aproximación que el campo es débil, se muestra la silueta que se observaría desde el infinito. En la segunda Sección 4.2 se estudian las propiedades geométricas de la solución estacionaria, sus condiciones de energía y transitabilidad, también se da un pequeño análisis geodésico de la misma. Finalmente, en el Capítulo 5 se presenta un agujero de gusano cilíndrico con un campo electromagnético acoplado a una campo escalar, que puede ser dilatónico o *ghost* que tiene como principal característica el hecho de que satisface las condiciones de energía débil y nula, además de poseer como las dos soluciones anteriores una singularidad de anillo desnuda que envuelve a la garganta. Se muestran las geodésicas considerando que el agujero de gusano rota lentamente, lo que permite graficar la sombra que el mismo produce.

1. AGUJEROS DE GUSANO

Fue Ludwig Flamm en 1916 [3] quien notó que nuestro Universo puede no ser simplemente conexo: pueden existir asas o túneles -los cuales ahora son conocidos como *agujeros de gusano*- en la topología del espacio-tiempo que unen regiones lejanas del Universo o incluso que conecten dos universos completamente distintos. Sin embargo no fue hasta 1935 que su estudio formal comenzó con Einstein y Rosen tratando de dar una explicación de las partículas en términos de campos [4].

1.1. Puente de Einstein-Rosen

En 1935, Albert Einstein y Nathan Rosen en su trabajo *The particle problem in General Relativity* [4] estudiaron la posibilidad de excluir las singularidades en una teoría atomista de la materia y la electricidad sin usar otras variables salvo $g_{\mu\nu}$ y ϕ_μ , para la teoría general de la relatividad y la teoría de Maxwell respectivamente. Las partículas eran ahora representadas como un puente entre dos hojas idénticas del espacio físico. Considerando dos tipos específicos de puentes: neutros y casi-cargados [33, 34].

1.1.1. Puente Neutro

Solución de Schwarzschild El puente de Einstein-Rosen neutro corresponde a la solución de Schwarzschild tras un cambio de coordenadas de modo que la singularidad “desaparezca”¹. La solución de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.1)$$

con $r > 2m$, $\theta \in (0, \pi)$ y $\phi \in (0, 2\pi)$. En $r = 2m$ el término g_{11} es infinito.

Tomando $u^2 = r - 2m$ en (1.1)

$$ds^2 = - \frac{u^2}{u^2 + 2m} dt^2 + 4(u^2 + 2m) du^2 + (u^2 + 2m)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.2)$$

¹ Recordando que en aquel entonces las singularidades físicas y de coordenadas no se habían distinguido.

con $u \in (-\infty, \infty)$, con lo que r va de $-\infty$ a $2m$ y de $2m$ a ∞ , descartando la región $r \in [0, 2m)$.

Lo anterior se interpreta como la existencia de dos regiones asintóticamente planas del espacio 4-dimensional en $u = \pm\infty$ conectadas por un puente en $u = 0$. Si se toma u constante, el área del puente es $A(u) = 4\pi(u^2 + 2m)^2$, con área mínima en $u = 0$. Este mínimo en el área corresponde con el área de la garganta del puente $A(0) = 16\pi m^2$. La región cercana a $u = 0$ es el “agujero de gusano”. Es importante notar que $m > 0$ ya que es necesaria la existencia del horizonte para que el cambio de coordenadas funcione.

Einstein y Rosen concluyeron que este puente corresponde a una partícula elemental electricamente neutra y que una partícula con energía negativa no puede ser representado como un puente.

1.1.2. Puente Casi-cargado

Solución de Reissner-Nordström Modificada Comenzando con la solución de Reissner-Nordström en coordenadas de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.3)$$

donde Q es la carga y M la masa de un hoyo negro electricamente cargado.

Para poder construir el “puente” Einstein y Rosen intercambiaron el signo en el tensor de energía momento

$$T_{ik} = \frac{1}{4} g_{ik} \phi_{\alpha\beta} \phi^{\alpha\beta} - \phi_{i\alpha} \phi_k^\alpha \quad (1.4)$$

de modo que la densidad de energía en el campo electromagnético fuera negativa. Con este cambio la geometría no corresponde del todo a Reissner-Nordström. De nuevo en coordenadas de Schwarzschild la geometría modificada de Reissner-Nordström es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\epsilon^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\epsilon^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.5)$$

donde ahora ϵ representa la carga eléctrica. Tomando $M = 0$ la solución anterior se reduce a

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\epsilon^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\epsilon^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.6)$$

utilizando el cambio de variable $u^2 = r^2 - \epsilon^2/2$,

$$ds^2 = - \frac{u^2}{u^2 + \epsilon^2/2} dt^2 + du^2 + (u^2 + \epsilon^2/2)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.7)$$

esta geometría representa un objeto casi-cargado sin masa con densidad de energía negativa en todas partes. Es interesante notar la presencia de un horizonte en $u = 0$, cuando $r = \epsilon$. Einstein y Rosen deseaban interpretar este objeto como el electrón.

1.1.3. Puente General

Construcción del Puente General Para construir un puente como los mencionados antes es necesario comenzar con una geometría con simetría arbitraria que posea un horizonte de eventos. Sin pérdida de generalidad se puede escribir

$$ds^2 = -e^{-\phi(r)} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.8)$$

con el horizonte de eventos en $r = r_H$ donde r_H está definido por la ecuación

$$b(r_H) = r_H. \quad (1.9)$$

Sustituyendo $u^2 = r - r_H$ en (1.8) se obtiene

$$ds^2 = -e^{-\phi(u^2+r_H)} \left(1 - \frac{b(u^2+r_H)}{u^2+r_H}\right) dt^2 + 4 \frac{(u^2+r_H)}{u^2+r_H - b(u^2+r_H)} u^2 du^2 + (u^2+r_H)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.10)$$

cerca de $u = 0$ el puente conecta dos regiones asintóticamente planas $u = \pm\infty$. Además, cerca de la garganta/horizonte $u \approx 0$ y $r \approx r_H$ con lo cual de (1.10) se tiene

$$ds^2 = -e^{-\phi(r_H)} \frac{1 - b'(r_H)}{r_H} u^2 dt^2 + 4 \frac{u^2 + r_H}{1 - b'(r_H)} du^2 + (u^2 + r_H)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.11)$$

definiendo las constantes

$$A^2 = -e^{-\phi(r_H)} \frac{1 - b'(r_H)}{r_H}$$

$$B^2 = \frac{4}{1 - b'(r_H)}$$

la métrica (1.11) se reduce a lo obtenido para los puentes neutros y casi-cargados. Se puede observar que la existencia del horizonte de eventos es indispensable para construir un puente.

La construcción de los puentes de Einstein-Rosen corresponde únicamente a la elección de un cambio adecuado de coordenadas por lo cual no es seguro cruzar el puente, es decir no son transitables. Como menciona Matt Visser en [33]

Si descubre un puente de Einstein-Rosen, no trate de cruzarlo, usted morirá. Morirá tan seguro como al entrar en un hoyo negro. Morirá porque está entrando en un hoyo negro. La coordenada u no es una coordenada apropiada en el horizonte. Al tratar de cruzar el horizonte de $u = +\epsilon$ a $u = -\epsilon$ lo enviará de la carta de u directamente a la singularidad.

Por lo cual es recomendable mantenerse alejado de los puentes de Rosen-Einstein.

1.2. Agujeros de Gusano Transitables

No fue hasta 1987, después de 52 años del primer estudio de los puentes de Einstein-Rosen, -los cuales no son transitables- que Morris y Thorne en *Wormholes in spacetime and their use in interstellar travel: A tool for teaching general relativity* [11] sientan las bases para el estudio de los agujeros de gusano como objetos que permitan el viaje intergaláctico, estableciendo una serie de criterios para la construcción de los que serán llamados *agujeros de gusano transitables*.

Se iniciará con la definición general de un agujero de gusano, el cual se entiende como una construcción teórica que representa un atajo que une dos puntos del Universo. Formalmente un agujero de gusano se define como

Definición 1. *Un agujero de gusano es una región compacta del espacio-tiempo con una frontera topológicamente simple pero un interior topológicamente no trivial.*

Los agujeros de gusano pueden ser² (casi-)permanentes y transitorios dependiendo de su tiempo de existencia, a su vez cada uno de ellos puede conectar dos universos diferentes (*interuniversal*) o dos regiones distintas de un mismo universo (*intrauniversal*). Además de poder ser *microscópicos* o *macroscópicos* de acuerdo con sus dimensiones.

Por razones prácticas, los llamados *agujeros de gusano transitables* resultan más interesantes, ya que son aquellos que permiten realizar viajes interestelares. Éstos sólo pueden ser (casi-)permanentes y macroscópicos, inter o intraversales. Es decir, son objetos 3-dimensionales que existen por un periodo finito no nulo de tiempo y con dimensiones considerables.

1.2.1. Construcción de un Agujero de Gusano Transitable

Morris y Thorne [11] inician el estudio de los agujeros de gusano transitables adoptando una actitud *ingenieril* para su construcción; pidiendo que la solución a considerar posea las propiedades que se desean. De lo visto en el capítulo anterior lo mínimo que se debe exigir es que no exista un horizonte de eventos o por lo menos sea posible cruzar el agujero de gusano sin necesidad de pasar a través de él.

Criterios para la construcción de un agujero de gusano transitable Los requisitos que deben de cumplirse para que una solución sea un agujero de gusano transitable son:

- C.1** La métrica debe de ser de preferencia esféricamente simétrica y estática (para simplificar los cálculos).
- C.2** La solución debe de obedecer las ecuaciones de Einstein en todas partes.
- C.3** La solución debe de tener una garganta que conecte dos regiones del espacio-tiempo asintóticamente planas.
- C.4** No debe de existir un horizonte de eventos, ya que evita que se pueda viajar de ida y vuelta a través del agujero de gusano.
- C.5** Las fuerzas de marea al atravesar el agujero de gusano deben de ser pequeñas.
- C.6** El tiempo propio necesario para cruzar a través del agujero de gusano deben de ser finitas, al igual que el tiempo medido por un observador externo.

² Se consideran únicamente agujeros de gusano *Lorentzianos* -residen en una variedad Riemanniana- ya que en ellos, a diferencia de los *Euclidianos* -variedad Euclidiana-, se pueden estudiar efectos físicos reales.

- C.7** La materia y los campos que generan la curvatura del agujero de gusano deben de tener un tensor de energía y momento razonable.
- C.8** La solución debe de ser estable ante perturbaciones.
- C.9** Debe de ser posible “crear” el agujero de gusano. La masa y tiempo necesarios para su construcción debe de ser menor a la masa y edad del Universo respectivamente.

Los criterios básicos **C.1** a **C.4** son las propiedades generales que debe poseer un agujero de gusano, los criterios prácticos **C.5** a **C.7** son necesarios para que un humano pueda hacer uso del agujero de gusano sin enfrentar una muerte segura, es decir que el agujero de gusano sea transitable. Además **C.7** permite la construcción del agujero de gusano con materiales físicos reales (permitidos por las leyes físicas conocidas).

1.2.2. Agujero de Gusano de Morris-Thorne

Solución de Morris-Thorne Considerando la propiedad **C.1** la métrica debe de ser estática y esféricamente simétrica. Sin pérdida de generalidad la métrica a considerar es de la forma

$$ds^2 = -e^{2\Phi(l)} dt^2 + dl^2 + r(l)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1.12)$$

con $t \in (-\infty, \infty)$, $l \in (-\infty, \infty)$, $\theta \in (0, \pi)$ y $\varphi \in (0, 2\pi)$.

De la propiedad **C.4** es necesario que $\Phi(l)$ sea finita en todas partes, esto con el fin de evitar la existencia de horizontes de eventos en la solución.

Como el espacio-tiempo debe de ser asintóticamente plano en $l \rightarrow \pm\infty$, por **C.3**, es necesario que $r(l) \approx |l| + O(1)$, esto implica

$$\lim_{l \rightarrow \pm\infty} \frac{r(l)}{|l|} = 1, \quad (1.13)$$

además, para que la solución sea asintóticamente plana se requiere que

$$\lim_{l \rightarrow \pm\infty} \Phi(l) = \Phi_0 \quad (1.14)$$

sea finito.

El radio de la garganta del agujero de gusano se define como

$$r_0 = \min\{r(l)\},$$

por simplicidad se supone que el límite es único y está aislado.

Sin pérdida de generalidad, es posible suponer que la garganta se encuentre en $l = 0$. Se requiere además que las funciones Φ y r sean al menos dos veces diferenciables en l .

Lo anterior proporciona los requisitos mínimos necesarios para construir un agujero de gusano *teóricamente* transitable³. A estos requisitos es deseable incluir la simetría entre las regiones asintóticas; además de analizar el comportamiento de las funciones Φ y b en la garganta del agujero debido a la valiosa información que proporcionan.

Tomando las coordenadas de Schwarzschild y reparametrizando la dependencia de la métrica es posible simplificar los resultados anteriores. Usando la distancia radial propia como

$$l(r) = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - b_{\pm}(r')/r'}} \quad (1.15)$$

de (1.12) se tiene

$$ds^2 = -e^{2\Phi_{\pm}(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b_{\pm}(r)/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1.16)$$

donde Φ es la *función de corrimiento al rojo* determina el corrimiento gravitacional y b es la *función de forma* determina la forma espacial del agujero de gusano. Como se menciono antes Φ y b están constriñidas por las propiedades **C.3** y **C.4**.

Ahora se tienen dos espacio-tiempos unidos en r_0 cada uno con $r \in [r_0, \infty)$ y con sus propias funciones de corrimiento al rojo y de forma, por lo cual $\Phi(l)$ se ha reemplazado por las funciones $\Phi_+(r)$ y $\Phi_-(r)$ y $b(l)$ por $b_+(r)$ y $b_-(r)$, donde el dominio de las funciones originales ha sido partido a la mitad.

La función r tiene un significado geométrico especial, $2\pi r$ es la circunferencia de un círculo centrado en la garganta del agujero de gusano, así r es igual a la coordenada radial en el espacio del encaje. Es una función no-monótona, ya que presenta un mínimo en la garganta del agujero de gusano.

Como la garganta del agujero de gusano es el mínimo de $r(l)$ se tiene

$$\left. \frac{dr}{dl} \right|_{r_0} = 0 \quad \text{con lo cual} \quad \left. \frac{dl}{dr} \right|_{r_0} \rightarrow \infty \quad (1.17)$$

de (1.15) se tiene $b_{\pm}(r_0) = r_0$, recordando que las regiones asintóticas están

³ Para crear un agujero de gusano *realista* es necesario tomar en cuenta las fuerzas de marea al cruzar la garganta y la estabilidad de la solución.

unidas en la garganta r_0 . Mientras que lejos de la garganta $b_{\pm}(r) < r$.

Como $r(l)$ tiene un mínimo en la garganta y crece al alejarse de ésta, se tiene que

$$\exists r_* \quad |\forall r \in (r_0, r_*), \quad \frac{d^2 r}{dl^2} > 0. \quad (1.18)$$

Aunque en principio r_* puede ser tan grande como $+\infty$ es común que se encuentre cerca de la garganta r_0 . Usando (1.12) se obtiene

$$\frac{d^2 r}{dl^2} = \frac{dr}{dl} \frac{d}{dr} \left(\frac{dr}{dl} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{dr}{dl} \right)^2 = \frac{b - rb'}{2r^2} \quad (1.19)$$

de donde se deduce

$$\exists r_* \quad | \quad \forall r \in (r_0, r_*), \quad b' > \frac{b}{r}. \quad (1.20)$$

Al ser r_0 un mínimo se tiene $d^2 r/dl^2|_{r_0} \geq 0$ y de (1.20) $b'_{\pm}(r_0) \leq 1$. Condiciones similares son válidas para Φ , lo cual implica que en la garganta $\Phi_-(r_0) = \Phi_+(r_0)$, que a pesar de no ser un criterio se toma por conveniencia.

1.2.2.1. Tensor de Energía-Momento

Para satisfacer la condición **C.2** la solución debe de obedecer las ecuaciones de Einstein en todas partes, por ello es necesario calcular los tensores de Riemann y Einstein para la métrica.

Tomando una base de vectores ortonormales en el marco de referencia propio para observadores en reposo⁴,

$$\begin{aligned} e_{\hat{t}} &= e^{-\varphi} e_t, & e_{\hat{r}} &= (1 - b/r)^{1/2} e_r, \\ e_{\hat{\theta}} &= r^{-1} e_{\theta}, & e_{\hat{\varphi}} &= (r \sin \theta)^{-1} e_{\varphi}, \end{aligned}$$

se tiene que las componentes no nulas del tensor de Einstein son [11, 34, 33]

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = b'/r, \quad (1.21)$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = -b/r^3 + 2(1 - b/r)\Phi'/r,$$

$$\begin{aligned} G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} &= G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = (1 - b/r) \left(\Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r - b)} \Phi' \right) \\ &+ (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r - b)} \end{aligned} \quad (1.22)$$

⁴ Con $e_t = c^{-1} \partial/\partial t$ y $e_a = \partial/\partial x^a$ y la prima denota derivación con respecto a r .

Denotando las componentes del tensor de energía-momento como

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho(r)c^2, \quad T_{\hat{r}\hat{r}} = -p_r(r), \quad T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = p(r), \quad (1.23)$$

donde $\rho(r)$ es la densidad total de masa-energía; $p_r(r)$ es la tensión por unidad de área en la dirección radial y $p(r)$ es la presión en las direcciones laterales⁵.

De (1.21) y (1.23) y haciendo uso de $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 8\pi Gc^{-4}T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ se tiene

$$b' = 8\pi Gc^{-2}r^2\rho, \quad (1.24)$$

$$\Phi' = (-8\pi Gc^4 p_r r^3 + b)/[(2r(r-b))], \quad (1.25)$$

$$p'_r = (\rho c^2 - p_r)\Phi' - 2(p + p_r)/r \quad (1.26)$$

la función 1.28 se interpreta como la ecuación del equilibrio hidrostático para el material cruzando el agujero de gusano.

En las ecuaciones anteriores, Φ , b , ρ , p_r y p son desconocidas. En este caso, como se requiere que se cumplan los criterio de construcción, se desea tener control sobre las funciones de forma y corrimiento al rojo; mientras que las relaciones entre ρ , p_r y p se determinaran por medio de las anteriores y las ecuaciones de campo. Reescribiendo (1.24)-(1.26)

$$\rho = b'/(8\pi Gc^{-2}r^2), \quad (1.27)$$

$$p_r = [b/r - 2(r-b)\Phi']/(8\pi Gc^{-4}r^2), \quad (1.28)$$

$$p = (r/2)[(\rho c^2 - p_r)\Phi' - p'_r] - p_r$$

De esta forma al fijar b y Φ se obtiene ρ , p_r y p .

1.2.2.2. Condiciones de Energía

Del criterio **C.7** la materia de de construcción del agujero de gusano debe de ser consistente con las leyes físicas actuales. Lo anterior se refleja el tensor de energía momento y sus condiciones de energía⁶.

⁵ La primera con unidades g/cm³ y las segundas con din/cm².

⁶ Ver [35].

Condición Débil de Energía La condición débil de la energía dice que la densidad de energía T_{00} es positiva en cualquier sistema de referencia [35, 36].

Definición 2. *La condición débil de energía establece que para cualquier vector temporal v^μ*

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0. \quad (1.29)$$

En términos de las presiones principales

$$\rho \geq 0 \quad \text{y} \quad \forall j, \quad \rho + p_j \geq 0 \quad (1.30)$$

Morris y Thorne [11] señalan que al pedir el ensanchamiento de la garganta del agujero de gusano ocasiona que la tensión en la garganta p_{r_0} sea tan grande que exceda la densidad total de masa-energía $\rho_0 c^2$, haciendo necesario el uso de materia exótica⁷ en la construcción del agujero de gusano. Matemáticamente el ensanchamiento de la garganta implica $\frac{d^2 r}{dz^2} > 0$ en o cerca de la garganta, $r = r_0$. De la condición anterior y (1.19) se tiene $b'(r_0) < 1$. Y finalmente, de (1.27) en la garganta, se obtiene

$$\rho(r_0) \equiv \rho_0 < \frac{1}{8\pi c^2 G r_0^2} \quad (1.31)$$

mientras que de (1.28)

$$p_r(r_0) \equiv \tau_0 = \frac{1}{8\pi G c^4 r_0^2} \quad (1.32)$$

de donde se tiene

$$p_{r_0} > \rho_0 c^2. \quad (1.33)$$

De este modo un observador moviéndose radialmente por la garganta verá que su tensor de energía-momento

$$T_{\hat{0}\hat{0}} = \gamma^2(T_{\hat{t}\hat{t}} \mp 2(v/c)^2 T_{\hat{t}\hat{r}} + (v/c)^2 T_{\hat{r}\hat{r}}) \quad (1.34)$$

$$= \gamma^2(\rho_0 c^2 - (v/c)^2 p_{r_0}) = \gamma^2(\rho_0 c^2 - p_{r_0}) + \tau_0 \quad (1.35)$$

tiene una densidad negativa de masa-energía (para γ suficientemente grande), lo cual es una violación directa a la condición débil de energía.

⁷ Es decir, materia que satisface $p_r > \rho c^2 > 0$

Condición Nula de Energía De lo anterior se observa que uno de los aspectos más importantes en la teoría de los agujeros de gusanos transitables es la violación de las condiciones de energía⁸. Ya que surge, precisamente de imponer la condición de ensanchamiento en la garganta del agujero de gusano.

La condición nula de energía es la más débil de las condiciones de energía y anteriormente se pensaba que toda materia físicamente razonable debía cumplirla, hasta que se descubrió que ciertos efectos cuánticos la violaban [39]. Y se define como

Definición 3. *La condición nula de energía establece que para cualquier vector nulo k^μ*

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0. \quad (1.36)$$

En términos de las presiones principales

$$\forall j, \quad \rho + p_j \geq 0 \quad (1.37)$$

Físicamente establece que si un observador atraviesa una curva nula medirá una densidad de energía positiva. Efectivamente, dice que la masa-energía y la presión en una dirección dada no pueden ser negativas a la vez y si una de ellas lo es, debe de serlo de modo que su valor absoluto sea menor al de aquella que es positiva, es decir no se puede minar indefinidamente a un sistema de energía por medio de un flujo negativo de momentos [40].

De la ecuación (1.33) se observa que la condición nula de energía no se satisface en la garganta y por lo tanto es necesaria materia exótica para construirlo.

1.2.2.3. Fuerzas de Marea

Del criterio **C.5** para que un viajero interestelar pueda hacer uso de un agujero de gusano es necesario considerar los efectos que las fuerzas gravitacionales causaran sobre el viajero al cruzarlo.

Considerando que el viajero inicialmente se hallaba en reposo en una base espacial en $l = -l_1$ en el universo inferior y viaja radialmente a través de la garganta para terminar su viaje en reposo en $l = l_2$ del universo superior; se toma $v(r)$ como su velocidad medida por un observador estático y se define

⁸ En [37, 38] se prueba la necesidad de la violación de la condición nula de energía desde un punto de vista geométrico, al utilizar las congruencias de las geodésicas para definir la garganta del agujero de gusano.

$\gamma \equiv (1 - (v/c)^2)^{-1/2}$ de la manera usual. En términos de la distancia recorrida dl , el radio recorrido dr , el tiempo dt y el tiempo propio $d\tau_T$ medido por el viajero, se tiene

$$v = \frac{dl}{e^\Phi dt} = \mp \frac{dr}{(1 - b/r)^{1/2} e^\Phi dt}, \quad (1.38)$$

$$v\gamma = \frac{v}{(1 - (v/c)^2)^{-1/2}} = \frac{dl}{d\tau_T} = \mp \frac{dr}{(1 - b/r)^{1/2} d\tau_T} \quad (1.39)$$

El signo negativo (-) corresponde a la primera parte del viaje en el universo inferior, mientras que el positivo (+) a la segunda parte del viaje en el universo superior.

Como el viaje inicia y termina en reposo,

$$v = 0 \quad \text{en} \quad l = -l_1 \quad \text{y} \quad l = l_2 \quad (1.40)$$

$$v > 0 \quad \text{en} \quad -l_1 < l < l_2 \quad (1.41)$$

los puntos l_1 y l_2 se encuentran lejos de la garganta para evitar que los efectos gravitacionales del agujero de gusano deban de ser demasiado pequeños en ellos.

En particular,

- la geometría del espacio debe de ser casi plana, es decir $\frac{b}{r} \ll 1$,
- el corrimiento al rojo gravitacional de las señales que se envían de las estaciones espaciales hacia el infinito deben de ser pequeñas,

$$e^{-\Phi} - 1 \approx -\Phi \ll 1. \quad (1.42)$$

- la aceleración debida a la gravedad medida en las estaciones,

$$g = -\left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \Phi' c^2 \quad (1.43)$$

tiene que ser de orden menor o igual a $g=980 \text{ cm/s}^2$.

Resumiendo lo anterior

$$\frac{b}{r} \ll 1, \quad |\Phi| \ll 1, \quad |c^2 \Phi'| \leq g \quad \text{en} \quad l = -l_1 \quad \text{y} \quad l = l_2 \quad (1.44)$$

Como en las estaciones se tiene $|\Phi| \ll 1$, su tiempo propio corresponde con el tiempo coordinado t . De **C.5** y **C.6** para que el viaje resulte posible y cómodo para el viajero se necesita

- El viaje completo no debe de requerir más de un año. Medido tanto por el viajero como por las estaciones. Es decir

$$\Delta\tau_1 = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dl}{\gamma v} \leq 1 \text{ año}, \quad (1.45)$$

$$\Delta t = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dl}{ve^\Phi} \leq 1 \text{ año}. \quad (1.46)$$

$$(1.47)$$

- La aceleración que sienta el viajero no debe exceder por mucho g .
- Las aceleraciones de marea $\Delta\mathbf{a}$ que existan entre las distintas partes del cuerpo del viajero tampoco deben de exceder g .

Para analizar lo que estas condiciones anteriores implican, es necesario estudiar las aceleraciones que siente el viajero. Para ello se introduce una base ortonormal para su sistema de referencia $e_{\hat{0}'}, e_{\hat{1}'}, e_{\hat{2}'}, e_{\hat{3}'}$. En términos de la base ortonormal de los observadores estáticos $e_{\hat{t}}, e_{\hat{r}}, e_{\hat{\theta}}, e_{\hat{\varphi}}$, la base ortonormal está dada por

$$\begin{aligned} e_{\hat{0}'} &= \mathbf{u} = \gamma(e_{\hat{t}} \mp v/ce_{\hat{r}}), \\ e_{\hat{1}'} &= \mp\gamma(e_{\hat{r}} + v/ce_{\hat{t}}), \\ e_{\hat{2}'} &= e_{\hat{\theta}}, \\ e_{\hat{3}'} &= e_{\hat{\varphi}}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Donde u es la 4-velocidad del viajero y $e_{\hat{1}'}$ apunta en la dirección del viaje. La 4-aceleración que el cuerpo del viajero siente es

$$a^{\hat{\alpha}'} = u^{\hat{\alpha}'}_{;\hat{\beta}'} u^{\hat{\beta}'} c^2. \quad (1.49)$$

Como ésta siempre es ortogonal a la 4-velocidad,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot e_{\hat{0}'} = a_{\hat{0}'} = -a^{\hat{0}'} = 0. \quad (1.50)$$

Además el movimiento es radial, por lo tanto su aceleración también debe de serlo. Ésto implica $e_{\hat{2}'} = e_{\hat{3}'} = 0$, con lo cual

$$\mathbf{a} = ae_{\hat{1}'},$$

con a la magnitud de la aceleración. La manera más sencilla de calcular a es considerar u_α una función que depende de la posición del viajero r , para evaluar

$$a_t/c^2 = u_{t;\alpha} = u_{t,r}u^r - \Gamma_{\alpha t \beta}u^\alpha u^\beta \quad (1.51)$$

en el sistema coordenado (ct, r, θ, ϕ) . Se nota que $a_t = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_t = (ae_{\hat{1}'}) \cdot e_t = -\gamma(v/c)e^\Phi a$. El resultado es

$$a = \mp(1 - \frac{b}{r})^{1/2}e^\Phi(\gamma e^\Phi)'c^2 = e^{-\Phi} \frac{d}{dt}(\gamma e^\Phi)c^2. \quad (1.52)$$

Pidiendo que el viajero no sienta alguna aceleración mayor a g , entonces

$$\left| e^{-\Phi} \frac{d}{dt}(\gamma e^\Phi) \right| \leq \frac{g}{c^2} \approx \frac{1}{0,97 \text{ 1año}}. \quad (1.53)$$

Se analizaran ahora, las fuerzas de marea gravitacionales que experimenta el viajero. Se denota por ξ el vector de separación entre dos partes del cuerpo del viajero, por ejemplo entre sus pies y su cabeza; éste vector es puramente espacial en el marco de referencia del viajero, es decir $\xi \cdot \mathbf{u} = -\xi^{\hat{0}'} = 0$. Por lo tanto su aceleración de marea está dada por

$$\Delta a^{\hat{\alpha}'} = -c^2 R_{\hat{\beta}' \hat{\gamma}' \hat{\delta}'}^{\hat{\alpha}'} u^{\hat{\beta}'} \xi^{\hat{\gamma}'} u^{\hat{\delta}'} \quad (1.54)$$

ya que $u^{\hat{\alpha}'} = \delta_{\hat{0}'}^{\hat{\alpha}'}$ y $\xi^{\hat{0}'} = 0$ en el marco de referencia del viajero y como el tensor de Riemann es antisimétrico en sus dos primeros índices, $\Delta a^{\hat{\alpha}'}$ es completamente espacial y sus componentes están dados por

$$\Delta a^{\hat{j}'} = -c^2 R_{\hat{0}' \hat{k}' \hat{0}'}^{\hat{j}'} \xi^{\hat{k}'} = -c^2 R_{\hat{j}' \hat{0}' \hat{k}'}^{\hat{j}'} \xi^{\hat{k}'}. \quad (1.55)$$

1.2.2.4. Análisis Geodésico

Para determinar las geodésicas del espacio de Morris-Thorne, siguiendo el análisis realizado en [1], se aplicará el formalismo lagrangiano [41]. Tomando el lagrangiano

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu, \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (1.56)$$

Además, se sabe que $\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) = \kappa c^2$; donde $\kappa = 0$ para geodésicas nulas y $\kappa = -1$ para temporales.

Como (1.12) con $\Phi(l) = 0$ y $r^2(l) = l^2 + b_0^2$, es esféricamente simétrico, basta con considerar geodésicas en el plano $\theta = \pi/2$, con esto (1.56) queda como

$$\mathcal{L} = -c^2\dot{t}^2 + \dot{l}^2 + (l^2 + b_0^2)\dot{\varphi}^2, \quad (1.57)$$

con dos constantes de movimiento E y L dadas por

$$E = c^2\dot{t} \quad y \quad L = (l^2 + b_0^2)\dot{\varphi}, \quad (1.58)$$

con lo anterior, se tiene que (1.57) es

$$\dot{l}^2 = \frac{E^2}{c^2} - \frac{L^2}{l^2 + b_0^2} + \kappa c^2. \quad (1.59)$$

En general, para geodésicas arbitrarias se tiene $l = l(\varphi)$. Y están definidas por la ecuación diferencial

$$\left(\frac{dl}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\kappa c^2 + E/c^2}{L^2}(l^2 + b_0^2)^2 - (l^2 + b_0^2), \quad (1.60)$$

tomando el cambio de variable⁹ $r = \sqrt{(l^2 + b_0^2)}$ la ecuación anterior toma la forma

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = (r^2 - b_0^2) \left(\frac{\kappa c^2 + E/c^2}{L^2}r^2 - 1\right) \quad (1.61)$$

realizando una nueva sustitución $r = b_0/(a\rho)$ donde

$$a = \frac{b_0\sqrt{\kappa c^2 + E^2/c^2}}{L} = \frac{b_0}{\sin \xi \sqrt{b_0^2 + l_i^2}}, \quad (1.62)$$

donde l_i y $\xi \in (0, \pi)$ son la posición y el ángulo inicial respectivamente, entonces (1.61) es

⁹ Se ha elegido el signo (+) para la coordenada r . Pero para cubrir el espacio completo son necesarias dos cartas: una para representar la región $l \geq 0$ y otra para $l < 0$. Al regresar a las coordenadas originales es necesario conocer la posición inicial para poder elegir la carta adecuada.

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = (1 - a^2\rho^2)(1 - \rho^2), \quad (1.63)$$

que es independiente del parámetro κ .

Como $b_0 > 0$ para geodésicas no radiales se tiene $a > 0$. Definiendo el ángulo crítico, cuando la geodésica se aproxima a la garganta asintóticamente, como

$$\xi_{crit} = \arcsin \frac{b_0}{\sqrt{l_i^2 + b_0^2}}, \quad (1.64)$$

se tiene

$$a = \begin{cases} < 1, & \xi_{crit} < \xi < \pi \\ = 1, & \xi_{crit} = \xi \\ > 1, & \xi < \xi_{crit} \quad \text{o} \quad \xi > \pi - \xi_{crit} \end{cases} \quad (1.65)$$

Como r , b_0 y a son estrictamente positivos, ρ también lo es. Mientras que de la ecuación de balance

$$\dot{l}^2 + V_{eff} = \frac{E^2}{c^2} \quad \text{con} \quad V_{eff} = -\kappa c^2 + \frac{L^2}{l^2 + b_0^2}, \quad (1.66)$$

y la condición $\dot{l}^2 \geq 0$ se tiene $\rho \leq 1$.

De lo anterior, se tienen los siguientes casos:

Caso 1 Si $a < 1$, todas las geodésicas se mantienen en el Universo en el que comenzaron. La ecuación (1.63) es una integral elíptica de primer orden [42]

$$\varphi = \pm \int_{\rho_i}^{\rho} \frac{d\rho'}{\sqrt{(1 - a^2\rho'^2)(a - \rho'^2)}} \quad (1.67)$$

donde la integral está dada por la función integral elíptica \mathcal{F}

$$\varphi = \pm [\mathcal{F}(\rho, a) - \mathcal{F}(\rho_i, a)], \quad (1.68)$$

la elección del signo depende de si la geodésica se acerca al agujero de gusano ($dl < 0$, signo +) o si tiende a infinito ($dl > 0$, signo -). Las raíces en (1.67) desaparecen para $l = 0$ y $l_{min} = ((l_i^2 + b_0^2) \sin^2 \xi - b_0^2)^{1/2}$, pero la intergral sigue siendo finita. Sólo basta con tomar dos ramas de la solución.

Para $\xi \leq \pi/2$ con $l \geq l_i$ se tiene

$$\varphi_{\triangleleft}^- = \mathcal{F}(\rho_i, a) - \mathcal{F}(\rho, a), \quad (1.69)$$

si $\xi > \pi/2$, se tiene sólo una solución con $l \geq l_{min}$. En el caso $l > l_i$ se tiene

$$\varphi_{\triangleleft}^+ = 2\mathcal{K}(a) - \mathcal{F}(\rho_i, a) - \mathcal{F}(\rho, a), \quad (1.70)$$

con \mathcal{K} es la función integral elíptica completa de primera especie [42]. Por otra parte, para el caso $l < l_i$

$$\bar{\varphi}_{\triangleleft}^+ = \mathcal{F}(\rho, a) - \mathcal{F}(\rho_i, a). \quad (1.71)$$

El ángulo de máximo acercamiento se tiene cuando $l = l_{min}$ y está dado como

$$\varphi_{min} = \mathcal{K}(a) - \mathcal{F}(\rho_i, a). \quad (1.72)$$

La función inversa para \mathcal{F} está dada por la función elíptica de Jacobi denotada por $\text{sn} = \mathcal{F}^{-1}$. Al aplicarla a (1.68)

$$\rho = \frac{-\text{sn}(\varphi, a) \cos \xi \sqrt{1 - b_i^2} + \sin \xi \text{cn}(\varphi, a) \text{dn}(\varphi, a)}{1 - b_i^2 \text{sn}^2(\varphi, a)}, \quad (1.73)$$

con $b_i = b_0/\sqrt{b_0^2 + l_i^2}$ y $\text{cn} = \sqrt{1 - \text{sn}^2}$, $\text{dn} = \sqrt{1 - a^2 \text{sn}^2}$. En términos de la coordenada l , se obtiene la ecuación orbital

$$l = l_{\triangleleft}(\varphi) = \text{sign}(l_i) b_0 \sqrt{\frac{1}{a^2 \rho^2} - 1}. \quad (1.74)$$

Como $a > 1$, la geodésica no cambia de universo, por lo cual la posición inicial l_i determina exclusivamente el signo de l .

Si $l \rightarrow \infty$ ($\rho \rightarrow 0$), el ángulo azimutal φ toma su valor máximo en

$$\varphi_{\triangleleft max} = \begin{cases} \mathcal{F}(\sin \xi, a), & \xi < \pi/2 \\ 2\mathcal{K}(a) - \mathcal{F}(\sin \xi, a), & \xi \geq \pi/2 \end{cases} \quad (1.75)$$

Caso 2 Si $a > 1$, las geodésicas cruzan la garganta o retroceden al infinito. Para ambos casos se usará el valor $\alpha = 1/a$ y la integral (1.63) se transforma en

$$\frac{\varphi}{\alpha} = \pm \int_{\rho_i/\alpha}^{\rho/\alpha} \frac{d\rho'}{\sqrt{(1 - \rho'^2)(1 - \alpha^2 \rho'^2)}}, \quad (1.76)$$

donde de nuevo, se tienen funciones integrales elípticas de primera especie

$$a\varphi = \pm [\mathcal{F}(a\rho, \alpha) - \mathcal{F}(b_i, \alpha)]. \quad (1.77)$$

Para las geodésicas que van a infinito, $\xi < \pi/2$, el ángulo azimutal es

$$\varphi_{\triangleright}^- = \alpha [\mathcal{F}(b_i, \alpha) - \mathcal{F}(b_f, \alpha)], \quad (1.78)$$

con $b_f = b_0/\sqrt{b_0^2 + l_f^2}$. Si la geodésica se aproxima a la garganta pero no la cruza -se mantiene en el mismo universo que el observador- se tiene

$$\varphi_{\triangleright}^+ = \alpha [\mathcal{F}(b_f, \alpha) - \mathcal{F}(b_i, \alpha)]. \quad (1.79)$$

Si la geodésica cruza la garganta, el ángulo es

$$\hat{\varphi}_{\triangleright}^+ = \alpha [2\mathcal{K}(\alpha) - \mathcal{F}(b_i, \alpha) - \mathcal{F}(b_f, \alpha)], \quad (1.80)$$

mientras que aquellas geodésicas que retroceden después de acercarse a la garganta tienen un ángulo máximo

$$\varphi_{\triangleright max} = \alpha \mathcal{F}(b_i, \alpha), \quad (1.81)$$

para $l \rightarrow \infty$, las geodésicas que se acercan a la garganta, la cruzan con un ángulo

$$\varphi_{throat} = \alpha [\mathcal{K}(\alpha) - \mathcal{F}(b_i, \alpha)]. \quad (1.82)$$

En el límite $l \rightarrow -\infty$

$$\varphi_{\triangleright max}^* = \alpha [2\mathcal{K}(\alpha) - \mathcal{F}(b_i, \alpha)], \quad (1.83)$$

ahora, la coordenada l es

$$l_{\triangleright}(\varphi) = \text{sign}(\varphi_{throat} - \varphi) \text{sign}(l_i) b_0 \sqrt{\frac{1}{a^2 \rho^2} - 1}. \quad (1.84)$$

Caso 3 En el caso límite $a = 1$, (1.63) se reduce a

$$\varphi_{crit}^{\pm} = \frac{1}{2} \ln \frac{(b_i \mp 1)(\rho \pm 1)}{(b_i \pm 1)(\rho \mp 1)}, \quad (1.85)$$

donde el signo superior corresponde a $\xi > \pi/2$ y $l \leq l_i$. La ecuación orbital está dada por

$$l_{crit}^{\pm} = b_0 \sqrt{\frac{1}{\rho_{crit}^{\pm}} - 1}, \quad (1.86)$$

con $\rho_{crit}^{\pm} = [\pm \sinh \varphi \cosh \varphi (1 - b_i^2) + b_i] / (\cosh^2 \varphi - b_i^2 \sinh^2 \varphi)$. En este caso, la geodésica comienza su trayectoria con $\xi = \xi_{crit}$ (signo inferior) y retrocede a infinito, o comienza con $\xi = \pi - \xi_{crit}$ y se aproxima asintóticamente a la garganta (signo superior). Para $\xi = \pi - \xi_{crit}$, el ángulo φ crece ilimitadamente, mientras que para $\xi = \xi_{crit}$ el ángulo máximo es

$$\varphi_{max}^* = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + b_i}{1 - b_i}, \quad (1.87)$$

que se obtiene de tomar $\rho = 0$ en (1.85).

Los resultados anteriores se muestran en la figura 1.1.

1.2.2.5. Sombra

Al calcular la *Sombra* para un agujero de gusano, o cualquier otro objeto estelar, la idea es obtener la forma aparente de dicho objeto: su silueta. Para ello se considera un agujero de gusano conectando dos regiones del espacio-tiempo. Se ilumina uno de los extremos del agujero de gusano con una fuente de luz, mientras que en el otro extremo no es encuentra presente ninguna fuente de luz en una vecindad de la garganta. En la primera región los fotones se propagan en general en dos tipos de órbitas: órbitas perdiéndose en el agujero de gusano y cruzando la garganta (*órbitas de captura*), y órbitas que son dispersadas lejos de él hacia el infinito. Si se sitúa un observador lejos del agujero de gusano en la primera región considerada; éste sólo podrá detectar los fotones dispersados (*órbitas dispersadas*), en tanto que los fotones que entraron en la garganta formarán una mancha oscura para el observador; es decir una sombra. [43, 2, 44, 45]

La frontera de la sombra del agujero de gusano se determina al hallar las órbitas inestables de radio constante [44]. Las órbitas inestables¹⁰ de radio constante son aquellas que separan a las órbitas capturadas y a las dispersadas y se determinan por

¹⁰ Además, se pide que ξ y η sean tales que se tengan soluciones válidas para la ecuación de movimiento en θ .

$$\mathcal{R}(r^*) = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial r}(r^*) = 0, \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial r^2}(r^*) \geq 0, \quad (1.88)$$

donde \mathcal{R} es la función que determina la ecuación de movimiento radial¹¹ y r^* es la raíz real más grande de \mathcal{R} .

Como las trayectorias de los fotones son independientes de la longitud de onda de éstos. Podemos decir que están, en general, determinadas por los parámetros de impacto ξ y η , y un nuevo parámetro afín $\tilde{\lambda}$. Con objeto de eliminar la dependencia de E de las ecuaciones geodésicas. Los parámetros de impacto se definen como

$$\xi = \frac{cL}{E}, \quad \eta = \frac{c^2 Q}{E^2} \quad \text{con} \quad \tilde{\lambda} = \frac{E\lambda}{c}, \quad (1.89)$$

donde E , L y Q son las constantes de movimiento asociadas a las cantidades conservadas del espacio-tiempo. Estando E asociada a la energía, L al momento angular y Q a la constante de Carter [46], de ser necesaria. Mientras que λ es el parámetro afín original. Y definen la frontera de la sombra en el espacio (ξ, η) .

En realidad, el observador que se encuentra en infinito verá una proyección del espacio de parámetros de impacto en lo que se llama el *cielo del observador*. Es decir, el plano que pasa por el agujero de gusano y que es normal a la línea que lo conecta con el observador (la línea de visión). Las coordenadas en este plano están denotadas por α y β , y son conocidas como *coordenadas celestiales*. Las coordenadas celestiales denotan la posición aparente de la imagen. En términos de las ecuaciones geodésicas como

$$\alpha = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-r^2 \sin \theta_0 \frac{d\varphi}{dr} \right),$$

$$\beta = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \frac{d\theta}{dr} \quad (1.90)$$

con θ_0 es el ángulo de inclinación, el ángulo entre el eje φ y la línea de visión del observador.

Aplicando el formalismo de Hamilton-Jacobi para la solución de Morris-Thorne (1.56), en términos $r^2 = l^2 + b_0^2$, las ecuaciones de movimiento son

$$r^4 \dot{l}^2 = (r^2 - b_0^2)(r^2 - \eta) = \mathcal{R}(r), \quad (1.91)$$

$$r^4 \dot{\theta}^2 = \eta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta}. \quad (1.92)$$

¹¹ Entendiendo que las ecuaciones geodésicas están dadas por $\dot{r}^2 = \mathcal{R}(r)$, etc.

De lo anterior, es posible encontrar las órbitas esféricas inestables y definir una relación entre los parámetros de impacto. De (1.91), (1.92) y (1.88) los parámetros de impacto quedan definidos como

$$r^2 = b_0^2 = \eta \quad \text{con} \quad \xi^2 \leq b_0^2 \sin^2 \theta_0. \quad (1.93)$$

Además, haciendo uso de (1.90), (1.91) y (1.92) se obtienen las coordenadas celestiales

$$\alpha = -\frac{\xi}{\sin \theta_0},$$

$$\beta = \sqrt{\eta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta_0}}, \quad (1.94)$$

con lo cual queda definida la silueta de la sombra para el agujero de gusano de Morris-Thorne.

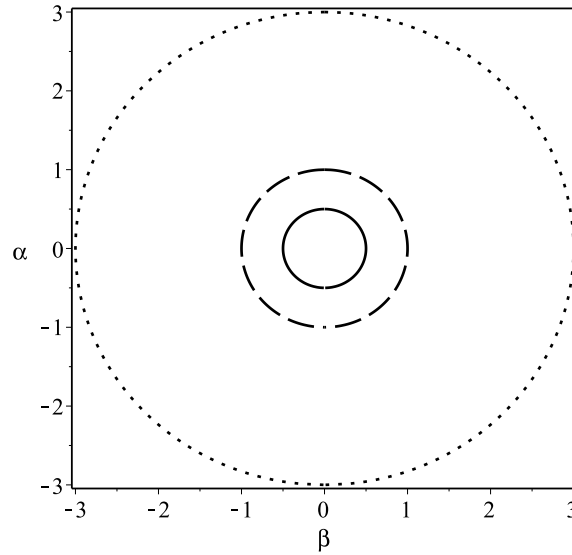


Fig. 1.2: Sombra del agujero de gusano de Morris-Thorne para diferentes valores de b_0 y θ_0 . Línea sólida $b_0 = 2$, $\theta = \pi/3$. Línea rayada $b_0 = 1$, $\theta = \pi/4$. Línea punteada $b_0 = 3$, $\theta = \pi/6$.

En la figura 1.2 se observa la imagen aparente de la solución de Morris-Thorne vista por un observador en infinito, en términos del momento angular

del agujero de gusano y la inclinación del ángulo desde que la mira el observador.

2. AGUJEROS DE GUSANO ROTATORIOS

Como se vió en el capítulo anterior, un agujero de gusano transitable¹ son aquellos que a diferencia de los puentes de Einstein-Rosen [4], por definición permiten el viaje -ida y vuelta- de humanos. Morris y Thorne emplean, en su análisis de los agujeros de gusano transitables, un enfoque que ellos llaman *ingenieril* ya que en primer lugar especifican las características que los agujeros de gusano deben de satisfacer para ser transitables y después, de las ecuaciones de Einstein deducen el tipo de materia que se requiere para su construcción; lo cual hace posible obtener una gran cantidad de información acerca de los mismos.

En 1998, Edward Teo propone una generalización del agujero de gusano de Morris-Thorne al construir un agujero de gusano transitable estacionario y axialmente simétrico; describiendo lo que físicamente sería un agujero de gusano transitable rotatorio. Para su construcción utiliza el mismo enfoque *ingenieril* empleado 10 años antes por Morris y Thorne [12].

2.1. Construcción del Agujero de Gusano Transitable Rotatorio

En lo que sigue se utilizará el método empleado por Edward Teo en [12] y Peter K. F. Kuhfittig en [13] para la construcción de un agujero de gusano transitable rotatorio.

2.1.1. Métrica

El espacio-tiempo a considerar debe ser estacionario y axialmente simétrico; es decir, debe poseer un vector de Killing $\xi^a \equiv (\partial/\partial t)^a$, el cual genere traslaciones temporales invariantes y $\eta^a \equiv (\partial/\partial \varphi)^a$ que genere las rotaciones invariantes con respecto a la coordenada angular φ . De los trabajos de Papapetrou y Carter [47, 48, 49] la métrica estacionaria y con simetría axial más general se escribe como

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dt d\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + g_{ij}dx^i dx^j, \quad (2.1)$$

donde los índices $i, j = 1, 2$ determinan las coordenadas restantes. La métrica (2.1) está determinada hasta una transformación de las coordenadas (x^1, x^2) ,

¹ Introducidos por Morris y Thorne en 1988.

dependiendo del problema en que se trabaje. En coordenadas polares esféricas, con $g_{22} = g_{\varphi\varphi}/\sin^2(\theta)$ [50], con lo anterior (2.1) se reescribe como

$$ds^2 = -e^{2\lambda(r,\theta)}dt^2 + e^{2\mu(r,\theta)}dr^2 + r^2K^2(r,\theta) \left[d\theta^2 - \sin^2\theta (d\varphi - \omega(r,\theta)dt)^2 \right], \quad (2.2)$$

con $K(r,\theta)$ una función adimensional positiva, de modo que rK determina la distancia radial propia R medida en (r,θ) desde el origen [13], es decir

$$R \equiv rK(r,\theta), \quad R_{,r} > 0. \quad (2.3)$$

en otras palabras, $2\pi R \sin\theta$ es la circunferencia propia del círculo a través de $(r,\theta)^2$. La función ω es la velocidad angular $d\varphi/dt$ adquirida por una partícula que cae libremente desde el infinito al punto (r,θ) , que da origen al efecto de Lens-Thirring³ en relatividad general. En [53] “velocidad angular relativa al marco de referencia en reposo asintótico”

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{u^\varphi}{u^t}. \quad (2.4)$$

El discriminante de la métrica (2.2) es

$$D^2 \equiv -g_{tt}g_{\varphi\varphi} + g_{t\varphi}^2 = (e^\lambda R \sin\theta)^2, \quad (2.5)$$

de [47], (2.2) no tiene un horizonte de eventos. Además para garantizar que el espacio-tiempo no sea singular en el eje de rotación $\theta = 0, \pi$, se impone que las derivadas de las funciones; λ , μ , K y ω ; con respecto a θ sean cero en el eje de rotación.

2.1.2. Garganta

De momento no se ha dicho nada acerca de la función de forma. Recordando que la geometría del agujero de gusano se describe por medio del de encaje de la métrica en un espacio euclidiano 3-dimensional para un tiempo fijo y para un valor determinado⁴ de θ . Lo anterior resulta en una superficie de revolución paramétrica de la forma

$$f(r,\theta) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z(r, \theta_0)), \quad (2.6)$$

² Esta forma de la métrica permite el estudio de los procesos físicos de una manera más sencilla; y en un principio fue usada por Hartle [51, 52] en el estudio de estrellas relativistas rotatorias.

³ Es el efecto de arrastre giratorio de los marcos inerciales.

⁴ En este caso se toma el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$.

donde la función $z(r, \theta_0)$ está fija en el ángulo θ_0 . De nuevo se interpreta que dicha superficie conecta dos regiones asintóticamente planas, que representan los dos universos que el agujero de gusano une. La coordenada radial decrece de $+\infty$ en el universo *superior* hasta un valor mínimo r_0 en la garganta y de nuevo crece hasta $+\infty$ en el universo *inferior*.

Como el diagrama de encaje debe de tener una tangente vertical en la garganta para cualquier valor de θ , se tiene

$$\lim_{r \rightarrow r_0^+} \frac{dz}{dr} = +\infty, \quad (2.7)$$

mientras que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dz}{dr} = 0, \quad (2.8)$$

por el hecho de requerir que los espacios que une sean asintóticamente planos. De (2.2), se asume además que para cualquier θ fija, $\mu(r, \theta)$ tenga también una asíntota vertical en $r = r_0$, es decir

$$\lim_{r \rightarrow r_0^+} \mu(r, \theta) = +\infty. \quad (2.9)$$

También se pide que μ y λ sea dos veces diferenciable en r y en θ ; asimismo μ debe de ser estrictamente decreciente en r con

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mu = 0. \quad (2.10)$$

Todo lo anterior se satisface al tomar $z = z(r, \theta)$ para θ fija tal que

$$\frac{dz}{dr} = \sqrt{e^{2\mu} - 1} \quad (2.11)$$

para el universo superior. Más aún,

$$\frac{d^2z}{dr^2} < 0, \quad (2.12)$$

cerca de la garganta -ya que $d\mu(r, \theta_0)/dr < 0$ - como lo pide la condición de ensanchamiento de la garganta en [11]. Con ésto, la función de forma está definida por

$$e^{2\mu} = \left(1 - \frac{b(r, \theta)}{r}\right). \quad (2.13)$$

de donde se sigue que

$$b(r, \theta) = r (1 - e^{-2\mu}). \quad (2.14)$$

Finalmente, en la garganta, b debe de ser independiente de θ . Es fácil probar que

$$\left. \frac{\partial b}{\partial \theta} \right|_{r=r_0} = 0. \quad (2.15)$$

Recordando que es posible, como en el caso de Morris-Thorne, definir una nueva coordenada radial l como

$$\frac{dl}{dr} = \pm \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1/2}, \quad (2.16)$$

que está bien definida a lo largo de la garganta, en una vecindad inmediata. Así, (2.2) se reescribe como

$$ds^2 = -e^{2\lambda(l, \theta)} dt^2 + dl^2 + r(l)^2 K^2(l, \theta) \left[d\theta^2 - \sin^2 \theta (d\varphi - \omega(l, \theta) dt)^2 \right], \quad (2.17)$$

esta métrica conecta suavemente las dos regiones asintóticamente planas a lo largo de la garganta, a diferencia de (2.2) que es singular en la garganta.

Para finalizar, la métrica canónica para un agujero de gusano transitible, estacionario y con simetría axial puede escribirse como

$$ds^2 = -e^{2\lambda(r, \theta)} dt^2 + \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 K^2(r, \theta) \left[d\theta^2 - \sin^2 \theta (d\varphi - \omega(r, \theta) dt)^2 \right], \quad (2.18)$$

El espacio-tiempo (2.18) tendrá, en general, un tensor de energía-momento con componentes T_{tt} , $T_{t\varphi}$ y $T_{\varphi\varphi}$, así como T_{ij} . Y en donde $T_{t\varphi}$ caracteriza la rotación de la distribución de materia.

2.2. Violación de la Condición Nula de la Energía

Del capítulo anterior, se sabe que para un agujero de gusano estático, esféricamente simétrico, resulta que la materia que se requiere para sustentarlo tiene una tensión radial p_r en la garganta que excede su densidad de masa-energía ρ [11]. Lo cual resulta también cierto en el caso de un agujero de gusano como el

descrito por (2.18).

Si como en [11] se considera un vector nulo radial de la forma $k^\alpha = (\sqrt{-g^{tt}}, \pm\sqrt{g^{rr}}, 0, 0)$ con $g_{tt} < 0$ en todas partes, se observa que lo último no es siempre cierto en un sistema con rotación. Por lo cual una elección más natural resulta ser [12]

$$k^\alpha = \left(e^{-\lambda}, -e^{-\mu/2}, 0, \omega e^{-\lambda} \right), \quad (2.19)$$

donde $e^{-\lambda}$ siempre es positivo. En la región asintótica $k^\alpha = (1, -1, 0, 0)$, con lo cual representa la 4-velocidad de una partícula (nula) con dirección radial entrante. Pero que adquiere una velocidad angular diferente de cero ω mientras se acerca a la garganta, ésto debido al arrastre causado por el agujero de gusano. De un pequeño cálculo se obtiene

$$\begin{aligned} R_{ab}k^ak^b &= e^{-\mu}\mu_{,r}\frac{(rK)_{,r}}{rK} - \frac{1}{2}(\omega_{,\theta})^2 \sin^2 \theta e^{-2\lambda} \\ &\quad - \frac{1}{4}\left(\frac{\mu_{,\theta}}{rK}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{(\mu_{,\theta} \sin \theta)_{,\theta}}{(rK)^2 \sin \theta} - \frac{e^{-\lambda}(e^{-\lambda}\lambda_{,\theta} \sin \theta)_{,\theta}}{(rK)^2 \sin \theta}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

y la condición de ensanchamiento implica

$$e^{-\mu}\mu_{,r} = \frac{1}{r^2}(b_{,r}r - b) < 0. \quad (2.21)$$

Más aún, se sabe que $R = rK$ es una función monotonamente creciente de r ; así el primer término de la mano derecha de (2.20) es negativo definido. El segundo término es, obviamente negativo. Solo falta probar que los términos restantes sean también negativos, de modo que de la Definición 3 se tenga la violación de la condición nula de la energía.

Para eso, tales términos se reescriben como

$$\frac{1}{(rK)^2} \left[(f_1^2 - f_2^2) + \frac{(f \sin \theta_{,\theta})}{\sin \theta} \right], \quad (2.22)$$

con

$$f_1 \equiv (\ln N)_{,\theta}, \quad f_2 \equiv \frac{1}{2}\mu_{,\theta}, \quad f \equiv f_1 - f_2. \quad (2.23)$$

De las condiciones impuestas en λ y μ se tiene que f es cero en el eje de simetría, es decir en $\theta = 0, \pi$. Ahora se supone que $f < 0$ en algún punto $\theta \in (0, \pi)$; por continuidad existe un intervalo en $(0, \pi)$ tal que $f \sin \theta < 0$ y $(f \sin \theta)_{,\theta} < 0$. Lo cual implica que $f_1^2 < f_2^2$ y por lo tanto (2.22) es negativo en

dicho intervalo.

Por otro lado suponiendo que $f \geq 0$ en todo $[0, 1]$. Se tiene que $f \rightarrow 0$ y $(f \sin \theta)_{,\theta} \rightarrow 0^-$, mientras $\theta \rightarrow \pi$. De la primera aseveración se tiene que el primer término en (2.22) es cero en este límite, mientras que de la segunda se ve que el segundo término en (2.22) es negativo en el límite. Con lo cual se ha demostrado que el lado derecho de (2.20) es negativo en algún punto en la garganta, por lo cual de la Definición 3 se tiene la violación de la condición nula de la energía.

De lo anterior, también se demostró que $R_{ab}k^ak^b$ es positivo en algún punto en la garganta, con lo cual es posible mover la materia exótica que constituye al agujero de gusano, a diferencia del caso estático, de modo que un viajero pueda evitarla y viajar a través del mismo⁵.

2.3. Condiciones de Transitabilidad

Otra de las ventajas que ofrece un agujero de gusano estacionario es que disminuye las fuerzas de marea ejercidas sobre un viajero al cruzar la garganta del agujero de gusano. Para estudiarlas, se considerará un observador que va cayendo radialmente hacia el agujero de gusano. Tomando la misma base ortogonal (1.48) se tiene que las magnitudes de las fuerzas de marea, siguiendo el mismo análisis que en el capítulo anterior, son

Fuerzas de Marea Radiales

$$|R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'}| = \left| e^{-2\mu}[\lambda_{,rr} - \lambda_{,r}\mu_{,r} + (\lambda_{,r})^2] - \frac{3}{4}(Kr)^2(\omega_{,r})^2 e^{-2(\lambda+\mu)} \sin^2 \theta + \frac{1}{(Kr)^2} \lambda_{,\theta\mu,\theta} \right| \quad (2.24)$$

a diferencia del caso estático donde sólo el primer término sobrevive; es precisamente el segundo término, que contiene la velocidad angular, el que reduce el tamaño de $|R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'}|$, ya que el primer término de (2.24) es positivo cerca de la garganta, el segundo término dentro de [] contiene el factor $(r - r_0)^2$ en el denominador. Por la misma razón el primer término es mayor que el valor absoluto del segundo (cerca de la garganta). Ya que el segundo término es negativo, se reduce el tamaño neto de la aceleración en la dirección radial [13].

Como el espacio-tiempo no es esféricamente simétrico es importante considerar la dirección desde la cual se acercara el viajero; imponiendo que éste último se acerque a la garganta desde el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ con lo que $\lambda_{,\theta} = 0$, de nuevo reduciendo la aceleración que experimenta.

⁵ Sin olvidar que la violación de la condición nula de la energía sigue estando presente en cualquier agujero de gusano que satisfaga sus condiciones de construcción, como se demuestra en [37].

Fuerzas de Marea Laterales Examinando únicamente el primer término debido a que se pidió que la nave en que se viaja se detenga en la garganta, se tiene

$$\begin{aligned} |R_{\hat{2}'\hat{0}'\hat{2}'\hat{0}'}| &= \left| \frac{1}{r} e^{-2\mu} \lambda_{,r} + \frac{1}{(Kr)^2} [\lambda_{,\theta\theta} + (\lambda_{,\theta})^2] - \frac{1}{K^3 r^2} K_{,\theta} \lambda_{,\theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{K} e^{-2\mu} \frac{1}{K} K_{,r} \lambda_{,r} - \frac{3}{4} (\omega_{,\theta})^2 e^{-2\lambda} \sin^2 \theta \right| \end{aligned} \quad (2.25)$$

como en el caso anterior, para la métrica estática sólo sobrevive el primer término. Pidiendo que el viajero se aproxime a la garganta por el plano ecuatorial, los siguiente tres términos son cero, mientras que el último término se anula debido que antes se había pedido que $\omega_{,\theta} = 0$ en $\theta = \pi/2$. Mientras que el cuarto término es negativo y por nuestra elección de K se tiene

$$\left| \frac{e^{-2\mu}}{K} K_{,r} \lambda_{,r} \right| < \left| \frac{e^{-2\mu}}{r} \lambda_{,r} \right|, \quad (2.26)$$

lo que resulta en una reducción en el tamaño de las fuerzas de marea laterales en θ .

Para las fuerzas de marea restantes, es decir, en la dirección ϕ se tiene

$$\begin{aligned} |R_{\hat{3}'\hat{0}'\hat{3}'\hat{0}'}| &= \left| \frac{1}{r} e^{-2\mu} \lambda_{,r} + \frac{e^{-2\mu}}{K} K_{,r} + \frac{(Kr)^2}{4} e^{-2(\mu+\lambda)} (\omega_{,r})^2 \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(Kr)^2} \lambda_{,\theta} \cot \theta + \frac{1}{K^3 r^2} K_{,\theta} \lambda_{,\theta} + \frac{1}{4} (\omega_{,\theta})^2 e^{-2\lambda} \sin^2 \theta \right| \end{aligned} \quad (2.27)$$

En este caso, el resultado final es difícil de cuantificar, debido a que el tercer término es positivo, aunque pequeño por la función exponencial, y puede ser el caso que resulte de un mayor tamaño que en el caso estático.

2.4. Análisis Geodésico y Sombra

En general, el movimiento geodésico en espacio-tiempos estacionarios y con simetría axial admite dos constantes de movimiento: la energía de la partícula E y su momento angular sobre el eje de simetría. Si se tiene otra cantidad conservada, es posible hallarla utilizando el formalismo de Hamilton-Jacobi. Ya que la ecuación definida por éste será separable. Dicha constante recibe el nombre de constante de Carter [46].

Tomando la métrica para el agujero de gusano rotatorio (2.2) y se considera que todas las funciones que la describen dependen sólo de la coordenada radial, la ecuación de Hamilton-Jacobi es separable.

Considerando únicamente las trayectorias de fotones [2], las ecuaciones de movimiento para (2.2) son

$$\begin{aligned}
e^{\mu-\lambda}\dot{r} &= \sqrt{\mathcal{R}(r)}, \\
r^2 K^2 \dot{\theta} &= \sqrt{\Theta(\theta)}, \\
e^{-2\lambda}\dot{\phi} &= \omega(E - \omega L) + \frac{e^{-\lambda}L}{r^2 K^2 \sin^2 \theta}, \\
e^{-2\lambda}\dot{t} &= E - \omega L,
\end{aligned} \tag{2.28}$$

y las funciones $\mathcal{R}(r)$ y $\Theta(\theta)$ están dadas por

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(r) &= (E - \omega L)^2 - Q \frac{e^{-2\lambda}}{r^2 K^2}, \\
\Theta(\theta) &= Q - \frac{L^2}{\sin^2 \theta}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

En términos de (1.89) con $c = 1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(r) &= (1 - \omega\xi)^2 - \eta \frac{e^{-2\lambda}}{r^2 K^2}, \\
\Theta(\theta) &= \eta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Para determinar las órbitas críticas, analizaremos la ecuación geodésica radial. Expresándola como un ecuación de balance de energía [2, 1], se tiene

$$\dot{r}^2 + V_{eff} = 1, \quad V_{eff} = 1 - e^{2\lambda-2\mu}\mathcal{R}(r) \tag{2.31}$$

donde el potencial efectivo V_{eff} depende de los parámetros de impacto (1.89). La órbita crítica, es decir, aquella órbita que se encuentra en el límite entre las órbitas de escape y las de caída, es esférica e inestable. Una pequeña perturbación en los parámetros de impacto puede convertirla en una órbita de escape o de caída.

La posición de las órbitas críticas se determina en términos del máximo del potencial efectivo⁶

$$V_{eff} = 1, \quad \frac{dV_{eff}}{dr} = 0, \quad \frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} \leq 0. \tag{2.32}$$

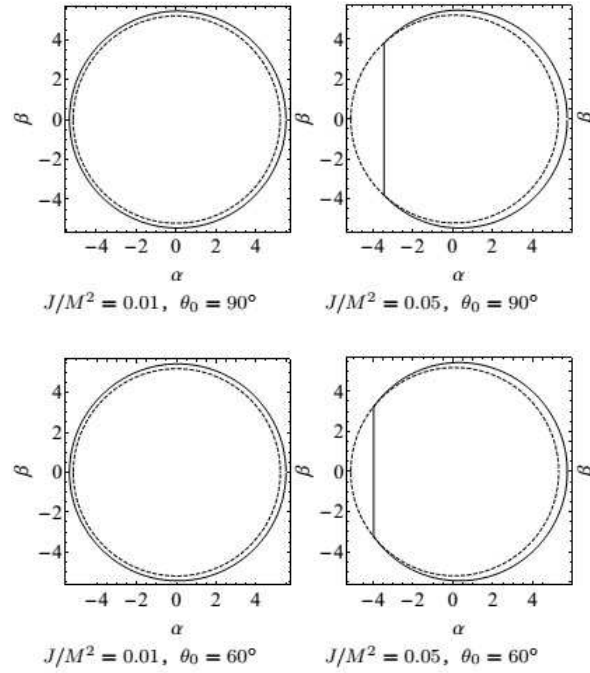


Fig. 2.1: Sombra de un agujero de gusano rotatorio (línea sólida) y un hoyo negro de Kerr (línea punteada) para diferentes parámetros de rotación y ángulos de inclinación. Con $M = 1$. Tomado de [2].

De dichas condiciones se obtienen dos relaciones algebraicas para los parámetros de impacto y la posición radial de la órbita. De las cuales se puede definir una relación entre los parámetros de impacto del estilo $\eta(\xi)$, la cual debe de cumplirse en la frontera de la sombra. Es conveniente escribir tales relaciones de forma paramétrica en términos de r . Para (2.2) las relaciones entre los parámetros de impacto son

$$\begin{aligned} \eta &= r^2 K^2 e^{2\lambda} (1 - \omega \xi)^2, \\ \xi &= \frac{\Sigma}{\Sigma \omega - \omega'} \quad \text{con} \quad \Sigma = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \ln \frac{e^{-2\lambda}}{r^2 K^2}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

y además ξ y η deben ser tales que $\Theta(\theta) \geq 0$.

Considerando las ecuaciones geodésicas (2.28) y las coordenadas celestiales (1.90) se tiene

⁶ Equivalentemente, se determinan por el mínimo de la función $\mathcal{R}(r)$.

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{\xi}{\sin \theta_0}, \\ \beta &= \sqrt{\eta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta}}.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Al sustituir los parámetros de impacto (2.33) en las ecuaciones anteriores se obtiene la frontera de la sombra; su imagen aparente de acuerdo con un observador en infinito.

Definiendo las funciones de (2.2) como $\lambda = r_0/r$, $e^{-2\mu} = 1 - b/r$, $K = 1$ y $\omega = (2J)/r^3$; la solución queda parametrizada en términos de r_0 que corresponde a la masa del agujero de gusano M y J que es su momento angular. Tomando $r_0 = M = 1$, en la figura 2.1 se muestra la sombra que produce tal agujero de gusano para diferentes J y θ_0 [2].

3. AGUJEROS DE GUSANO CILÍNDRICOS

La existencia de agujeros de gusano transitables requiere la existencia de materia exótica o materia de tipo phantom; es decir materia que viole la condición nula de la energía [33, 11, 37, 54, 55, 56]. Sin embargo, esta conclusión se obtiene al considerar a los agujeros de gusano como objetos 2-dimensionales compactos, con un área mínima finita (garganta). Es decir, al observar un agujero de gusano desde el exterior no dista mucho de lucir como una estrella o un hoyo negro. Lo anterior está expuesto en el teorema de Hochberg-Visser [37, 38]. Sin embargo, si se ignora que los agujeros de gusano sean objetos compactos y se asume poseen una simetría cilíndrica [26]; en lugar de tener una estructura similar a la de una estrella se tendrán objetos que se extienden indefinidamente en una dirección dada, como por ejemplo: cuerdas cósmicas¹. Desde mediados de los 90's se inicio el estudio de los agujeros de gusano con simetría cilíndrica con los trabajos de Clément, Kuhfittig y Bronnikov, entre otros [57, 58].

3.1. Agujeros de Gusano Cilíndricos Estáticos

En 2009 Kirill A. Bronnikov y José P. S. Lemos definen, en su trabajo *Cylindrical Wormholes* [59], un agujero de gusano cilíndrico estático como

Definición 4. *La métrica*

$$ds^2 = -e^{2\gamma(u)}dt^2 + e^{2\alpha(u)}du^2 + e^{2\xi(u)}dz^2 + e^{2\beta(u)}d\varphi^2, \quad (3.1)$$

describe la geometría de un agujero de gusano si el radio circular $r(u) = e^{\beta(u)}$ tiene un mínimo $r(u_0) > 0$ para algún $u = u_0$, si, en ambos lados del mínimo, $r(u)$ crece a valores mucho mayores que $r(u_0)$ y, en algún intervalo de u que contenga a u_0 , las cuatro funciones de métrica son suaves y están bien definidas².

¹ Los agujeros de gusano rotatorios con simetría cilíndrica pueden incluso existir sin necesidad de materia exótica e incluso en el vacío.

² Lo que garantiza la ausencia de horizontes.

El cilindro $u = u_0$ será entonces llamado garganta.

Esta definición de agujero de gusano no es del todo rigurosa, al no especificar concretamente como debe crecer $r(u)$ alrededor del mínimo; sin embargo la definición de la garganta como un mínimo es exacta.

También es posible definir un agujero de gusano cilíndrico de manera análoga al caso esférico, usando la función de área $a(u)$ de superficies 2-dimensionales cilíndricas con t y u constantes ³.

Definición 5. En un espacio-tiempo con la métrica (3.1), una a -garganta es un cilindro $u = u_1$ donde la función

$$a(u) = e^{\beta+\xi}, \quad (3.2)$$

tiene un mínimo regular.

Para conocer la geometría y la materia que componen un agujero de gusano cilíndrico estático, se deben de conocer sus componentes no nulas del tensor de Ricci. Para la métrica (3.1) éstas son

$$\begin{aligned} R_t^t &= -e^{-2\alpha} [\gamma'' + \gamma'(\gamma' - \alpha' + \beta' + \xi')] \\ R_u^u &= -e^{-2\alpha} [\gamma'' + \xi'' + \beta'' + (\gamma')^2 + (\xi')^2 + (\beta')^2 - \alpha'(\gamma' + \xi' + \beta')] \\ R_z^z &= -e^{-2\alpha} [\xi'' + \xi'(\gamma' - \alpha' + \beta' + \xi')] \\ R_\phi^\phi &= -e^{-2\alpha} [\beta'' + \beta'(\gamma' - \alpha' + \beta' + \xi')] \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde la prima denota d/du . Además del tensor de Einstein se tiene que

$$G_u^u = e^{-2\alpha} (\gamma'\xi' + \beta'\gamma' + \beta'\xi') \quad (3.4)$$

y se reescriben las ecuaciones de Einstein como

$$R_\nu^\mu = \kappa \left(T_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu T_\zeta^\zeta \right), \quad (3.5)$$

con $\kappa = 8\pi G$. Las ecuaciones anteriores fueron escritas con una coordenada u arbitraria; cuando ésta se define como la coordenada radial armónica; es decir como $\alpha = \beta + \gamma + \xi$ [60]; en las expresiones R_t^t , R_z^z y R_ϕ^ϕ desaparecen la derivadas

³ Su área es infinita pero al identificar puntos en el eje z se hace finita; convirtiendo una simetría cilíndrica en una toroidal.

de primer orden.

Tomando el tensor de energía momento como $T_\nu^\mu = \text{diag}(\rho, -p_u, -p_z, -p_\phi)$, donde ρ es la densidad de masa-energía y p_i son las presiones de cualquier origen físico en sus respectivas direcciones, como se definió en capítulos anteriores. Haciendo uso de las ecuaciones de Einstein y tomando en cuenta que la r -garganta se encuentra en un mínimo de $r(u) = e^\beta$ se tiene⁴

$$\beta' = 0 \quad \text{y} \quad \beta'' > 0, \quad (3.6)$$

de lo anterior que $R_\phi^\phi < 0$; y de (3.5) para la componente (3,3), se llega a la condición para la r -garganta

$$T_t^t + T_u^u + T_z^z - T_\phi^\phi = \rho - p_u - p_z + p_\phi < 0. \quad (3.7)$$

De la Definición 5, en $u = u_1$ se tiene $\beta' + \xi' = 0$ y $\beta'' + \xi'' > 0$. El mínimo ocurre para cualquier coordenada admisible u , en particular en términos de la coordenada radial armónica.

Usando (3.3) y (3.5) en términos de la coordenada radial armónica, se encuentra que $\beta'' + \xi'' > 0$ implica

$$R_z^z + R_\phi^\phi < 0 \Rightarrow T_t^t + T_u^u = \rho - p_u \geq 0. \quad (3.8)$$

Además, al sustituir $\beta' + \xi' = 0$ en (3.4)

$$G_u^u = e^{-2\alpha} \beta' \xi' = -e^{-2\alpha} (\beta')^2 \leq 0 \Rightarrow p_u \leq 0. \quad (3.9)$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores

$$\rho < p_u \leq 0 \quad \text{en} \quad u = u_1. \quad (3.10)$$

Así, en (o cerca) de la a -garganta existe necesariamente una región con densidad de energía ρ negativa.

⁴ Tomando el caso genérico para mínimos, es decir $\beta'' > 0$. Cuando $\beta'' = 0$, en una vecindad de la garganta se tendrá $\beta'' > 0$ recuperando las propiedades del caso anterior.

⁵ Si $T_z^z = T_\phi^\phi$, es decir $p_z = p_\phi$, de (3.7) implica $\rho - p_r < 0$ lo que implica la violación de la condición dominante de la energía si se asume $\rho \geq 0$. En el caso general de presiones anisotrópicas (3.7) no viola necesariamente ninguna condición de energía.

De lo anterior se concluye que cerca de la garganta[26]

$$\rho - p_r - p_z + p_\phi < 0 \quad r - \text{garganta} \quad (3.11)$$

$$\rho < p_r \leq 0 \quad a - \text{garganta} \quad (3.12)$$

Una r -garganta no requiere, necesariamente, violar ninguna condición energética, mientras que para una a -garganta siempre existe una región con densidad de masa-energía ρ negativa⁶.

Sin embargo, de momento se han considerado únicamente condiciones locales en la garganta. Además se debe pedir la existencia de dos regiones asintóticamente planas en ambos lados de la garganta; en otras palabras, para dados $u = u_{\pm\infty}$ se debe de tener $r = e^\beta \rightarrow \infty$ con lo que la métrica es plana o corresponde a una cuerda cósmica. En los extremos del rango válido para u se debe de tener $\beta \rightarrow \infty$ mientras que γ y μ deben de ser finitos.

3.2. Agujeros de Gusano Cilíndricos Rotatorios

Tomando una métrica estacionaria con simetría cilíndrica y rotación de la forma

$$ds^2 = -e^{2\gamma} (dt - Ee^{-2\gamma}) + e^{2\alpha} du^2 + e^{2\mu} dz^2 + e^{2\beta} d\phi^2, \quad (3.13)$$

donde todos los coeficientes de la métrica dependen de la coordenada radial u cuyo rango de validez aún no se ha especificado; mientras que $z \in \mathcal{R}$ y $\phi \in [0, 2\pi]$. Las propiedades geométricas de las secciones espaciales $t = \text{constante}$ de (3.13) están dadas por el elemento 3-dimensional, que corresponde a los últimos tres términos de (3.13). Las definiciones para la r -garganta y a -garganta son las mismas que en la sección anterior para las funciones e^μ y e^β .

El determinante de (3.13) es

$$D^2 = e^{2\alpha+2\beta+2\gamma+2\mu}, \quad (3.14)$$

El vórtice⁷ $\omega = \sqrt{\omega^\mu \omega_\mu}$ [61, 62] con

$$\omega^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e_{m\nu} e_{\rho;\sigma}^m \quad (3.15)$$

⁶ Una a -garganta requiere $\rho < 0$, es decir, aún más materia exótica que un agujero de gusano con simetría esférica.

⁷ El vórtice define la velocidad angular de la rotación de la tetrada e_a^μ , donde los índices latinos m, n, \dots representan los índices de Lorentz [26].

en la norma $\alpha = \mu$ es

$$\omega = \frac{1}{2}(Ee^{-2\gamma})'e^{\gamma-\beta-\mu} \quad (3.16)$$

Los componentes de Ricci no nulos para (3.13), en la misma norma, son

$$\begin{aligned} R_t^t &= -\frac{1}{D} [\gamma'e^{\beta+\gamma} + E\omega e^\mu]' \\ R_u^u &= -e^{-2\mu} [\beta'' + \gamma'' + \mu'' + (\beta')^2 + (\gamma')^2 + \mu'(\beta' + \gamma')] + 2\omega^2 \\ R_z^z &= -e^{-2\mu} [\mu'' + \mu'(\beta' + \gamma')] \\ R_\phi^\phi &= -\frac{1}{D} [\beta'e^{\beta+\gamma} - E\omega e^\mu]' \\ R_t^\phi &= -\frac{1}{D} (\omega e^{2\gamma+\mu})' \\ R_\phi^t &= -\frac{1}{2D} [E^2 e^{-\gamma-\beta} (E^{-1} e^{2\beta} - E e^{-2\gamma})']' \end{aligned} \quad (3.17)$$

considerando un marco de referencia que esté rotando junto con la materia que genera el campo gravitacional, es decir, el flujo en la dirección azimutal $T_t^\phi = 0$, de $R_t^\phi = 0$ se tiene $(\omega e^{2\gamma+\mu})' = 0$ de donde

$$\omega = \omega_0 e^{-\mu-2\gamma}, \quad (3.18)$$

con ω_0 constante. Haciendo uso de (3.18) y (3.16) en

$$(E\omega e^\mu)' = 2\omega_0^2 e^{\beta-3\gamma} = 2\omega^2 e^{2\mu+\beta+\gamma} = 2\omega^2 D, \quad (3.19)$$

con ésto, la parte diagonal del tensor de Ricci se divide en: parte estática ${}_s R_\nu^\mu$ y parte rotacional ${}_\omega R_\nu^\mu$. Donde la parte rotacional está dada por

$${}_\omega R_\nu^\mu = \omega^2 \text{diag}(-2, 2, 0, 2), \quad (3.20)$$

El tensor de Einstein por su parte se descompone, similarmente, como

$$G_\nu^\mu = {}_s G_\nu^\mu + {}_\omega G_\nu^\mu \quad (3.21)$$

con

$${}_\omega G_\nu^\mu = \omega^2 \text{diag}(-3, 1, -1, 1), \quad (3.22)$$

y además, cada tensor ${}_sG_\nu^\mu$ y ${}_\omega G_\nu^\mu$ satisface, separadamente, la ley de conservación $\nabla_\alpha G^{\alpha\mu} = 0$, con respecto a la métrica estática [63, 64].

De acuerdo con las ecuaciones de Einstein, el tensor ${}_\omega G_\nu^\mu/\kappa$ actúa como un tensor de energía-momento adicional con propiedades inusuales; por ejemplo, su densidad de energía efectiva es $-3\omega/\kappa < 0$. En su presencia, se define una r -garganta como

Definición 6. *La métrica (3.13) define un agujero de gusano si su radio circular $r(u) = e^\beta$ presenta un mínimo $r(u_0) > 0$ para un $u = u_0$ dado, tal que en una vecindad del mínimo $r(u)$ sea mucho mayor que $r(u_0)$ y en un rango de u que contenga a u_0 , todas las funciones que definen la métrica sean suaves y finitas.*

El cilindro $u = u_0$ se llama r -garganta.

De manera análoga al caso estático, se obtienen las condiciones para la existencia de una r -garganta; en el mínimo de r , dado que $\beta' = 0$ y $\beta'' > 0$ implica $R_\phi^\phi - 2\omega^2 < 0$ de donde se sigue

$$\rho - p_u - p_z + p_\phi - 2\omega^2/\kappa < 0. \quad (3.23)$$

como en el caso estático, la existencia de una r -garganta no requiere la violación de ninguna condición de energía.

En correspondencia con la sección anterior, se define una a -garganta como

Definición 7. *En un espacio-tiempo con la métrica (3.13), una a -garganta es un cilindro $u = u_1$ donde la función*

$$a(u) = e^{\beta+\xi}, \quad (3.24)$$

tiene un mínimo regular.

Una configuración en la que a ambos lados del mínimo u_1 la función $a(u)$ crece de manera que $a \gg a(u_1)$ y en algún rango de u que contenga al mínimo u_1 las funciones que definen (3.13) sean suaves y finitas es llamada a -garganta.

Como se ha visto hasta ahora -para ambos casos estáticos y estacionarios- las condiciones necesarias para la existencia de agujeros de gusano con simetría cilíndrica difieren de aquellas indispensables para los agujeros de gusano con simetría esférica. Se observa, principalmente, tal diferencia en el hecho de que para construir un agujero de gusano esférico es necesario infringir la condición nula de la energía [37] mientras que los cilíndricos no requieren tal consideración. Es importante mencionar que aunque es sencillo hallar soluciones que no exijan el uso de materia exótica, tal materia es necesaria para tener espacio-tiempos asintóticamente planos [63].

Un ejemplo importante de los agujeros de gusano cilíndricos fue estudiado en [26], considerando un espacio-tiempo estático con simetría axial llamado Zipoy-Voorhees [65, 66], una familia de soluciones ⁸ que puede interpretarse como un agujero de gusano el cual presenta una singularidad de anillo. Tal configuración es llamada agujero de gusano de anillo [30]. Configuraciones similares se pueden encontrar en [31] y en lo sucesivo se presentaran dos configuraciones similares el agujero de gusano tipo Kerr [25, 14] y uno de tipo Kerr-Newmann [29].

⁸ La métrica de Zipoy-Voorhees, presenta tres familias cada una de las cuales tiende asintóticamente a una solución de Schwarzschild de masa M . En particular, para la familia $\epsilon = 1$, su masa de Schwarzschild es $-M$ y es esta familia la que se menciona en el texto.

4. AGUJERO DE GUSANO TIPO KERR

Como se menciona anteriormente es posible la existencia de agujeros de gusano que presenten singularidades en el espacio-tiempo¹. Lo cual resulta útil, al considerar que las singularidades son un ingrediente omnipresente en las soluciones de las ecuaciones de Einstein [67]. Debido a que la predictibilidad de las leyes físicas se pierde en las singularidades, ya que las ecuaciones de Einstein no son válidas en las singularidades. En lo que sigue se presenta una solución exacta a las ecuaciones de Einstein con que tienen como un campo escalar con signo contrario en su parte cinética; es decir materia *ghost* la cual posee una singularidad de anillo temporal; tal solución se puede interpretar como un agujero de gusano cuya garganta se encuentra rodeada por la singularidad de anillo. De la conjetura de censura cósmica de Roger Penrose [32] se tiene que no es posible la presencia de singularidades desnudas en un espacio-tiempo real, ya que deben de estar protegidas por un horizonte de eventos, el cual evite que observadores externos puedan verlas directamente. El agujero de gusano que se estudiará, tiene como característica esencial de que la garganta del agujero de gusano protege a la singularidad de anillo de manera análoga a la conjetura de Penrose, esta solución da una censura cósmica debida a las propiedades intrínsecas del agujero de gusano.

En lo que sigue se presentara la solución correspondiente con el agujero de gusano tipo Kerr² que representa un agujero de gusano con una singularidad desnuda de anillo la cual se encuentra rodeada por la garganta. Se analizaran primero las implicaciones de la presencia de la singularidad en el espacio-tiempo para el caso estático para después analizar las propiedades geométricas de la misma solución en el caso estacionario.

4.1. Agujero de Gusano Tipo Kerr Estático

Se comenzará analizando las propiedades del agujero de gusano de tipo Kerr estático; es decir sin rotación. La solución fue presentada en el trabajo de Tona-tiuh Matos[22] donde se encuentran una serie de soluciones para las ecuaciones de Einstein con materia *ghost*, por un método modificado de mapeos armónicos, las cuales pueden ser interpretadas como agujeros de gusano.

¹ Por ejemplo, el modelo de juguete utilizando la solución de Kerr o la métrica de Zipoy-Voorhees.

² Por la semejanza de su elemento de línea con la métrica de Kerr con $r_s/2 < \alpha$, cuando dicha solución presenta una singularidad de anillo.

4.1.1. Métrica

Tomando la segunda clase de soluciones de [22] y haciendo el cambio de variable de $r - m$ a l y definiendo $l_0^2 = \sigma^2 - m^2$; en las coordenadas de Boyer-Lindquist se tiene³

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{K}{f} dl^2 + \frac{\Delta_1}{f} [K d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2], \quad (4.1)$$

con las funciones definidas como

$$K = \frac{\Delta}{\Delta_1}, \quad f = \exp\left(-\frac{k_1}{2\Delta} \cos \theta\right) = \exp(-\lambda), \quad (4.2a)$$

$$\Delta = l^2 + l_0^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta_1 = l^2 + l_0^2, \quad (4.2b)$$

el parámetro l_0 tiene unidades de distancia, mientras que $k_1 > 0$ tiene unidades de momento angular. La función f se obtiene del hecho de que (4.1), como se menciono anteriormente, es una solución exacta de las ecuaciones de Einstein, $R_{\mu\nu} = -8\pi G \Phi_\mu \Phi_\nu$, con

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{16\pi G}} \lambda, \quad (4.3)$$

que representa el campo escalar *ghost* [22]. Además el potencial newtoniano gravitacional asociado a la métrica (4.1) está dado por $\phi_g = (1/2) \ln f$, que está, como se puede ver, directamente relacionado con el campo *ghost* en (4.3).

Primeramente se observa que la solución es asintóticamente plana. Se observa facilmente que para $|l| \gg l_0$, se tiene $\lambda \rightarrow 0$, $f \rightarrow 1$ y $\Delta, \Delta_1 \rightarrow l^2$, con lo anterior (4.1) se puede reescribir como

$$ds^2 \rightarrow -dt^2 + dl^2 + l^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.4)$$

De lo revisado anteriormente, se recordará que una configuración de agujero de gusano debe presentar dos regiones asintóticamente planas para los casos $l \rightarrow \pm\infty$, y que es justamente la garganta del agujero de gusano quien conecta ambas regiones. La garganta para esta solución sin perdida de generalidad está localizada en $l = 0$. Además, es fácil notar que las función $\Delta_1 > 0$ en todas partes, mientras que $\Delta = 0$ en $l = 0$ y $\theta = \pi/2$. Calculando el tensor de Kretschman se tiene

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} R^{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{F(l, \theta) f}{\Delta^8}, \quad (4.5)$$

donde $F(l, \theta)$ es una función tal que es cero en $l = 0$ y $\theta = \pi/2$ pero que es de orden menor que f/Δ^8 .

En general, los invariantes de (4.1), están dados por

³ Es importante notar que las unidades elegidas en lo que sigue del trabajo corresponden con $c = 1$ y $4\pi G = 1$.

$$\text{Invariants} = \frac{F_1(l, \theta)}{8k_1^2 \Delta_1^{\alpha_2} k_1^{2\alpha_3}} \frac{f^{2\alpha_3}}{\Delta^{\alpha_1}}, \quad (4.6)$$

donde de nuevo F_1 es una función que depende únicamente de l y θ que es de orden menor que $f^{2\alpha_3}/\Delta^{\alpha_1}$. Para cada invariante los exponentes α_1 , α_2 y α_3 están definidos y son positivos.

De lo anterior, se concluye que (4.1) presenta una singularidad real en $l = 0$ y $\theta = \pi/2$, debido a que el término

$$\frac{f^{2\alpha_3}}{\Delta^{\alpha_1}} \rightarrow \infty \quad (4.7)$$

hace que la función que define a los invariantes diverja en dicho punto. Es interesante notar el comportamiento direccional que presentan los invariantes bajo el límite. Tomando el escalar de Kretschmann, se observa que

$$\lim_{l=0, \theta \rightarrow (\pi/2)^-} R_{\mu\nu\sigma\rho} R^{\mu\nu\sigma\rho} = 0; \quad (4.8)$$

$$\lim_{l=0, \theta \rightarrow (\pi/2)^+} R_{\mu\nu\sigma\rho} R^{\mu\nu\sigma\rho} \rightarrow \infty \quad (4.9)$$

de donde se observa la presencia de una singularidad no regular direccional [68, 69]. Los invariantes no son, en general, continuos en el punto de la singularidad.

Considerando los términos entre [] en (4.1) como una especie de ángulo sólido modificado para nuestra simetría axial se tiene

$$d\Omega_0^2 = K d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (4.10)$$

como se observa es la función K es la responsable de modificarlo. Analizando a K se observa que es una función bien comportada en todas partes. En especial, se observa que $K(l = 0, \theta = \pi/2) = 0$ mientras que $K = 1$ para $|l| \rightarrow \infty$, de hecho, es decir a grandes distancias de la singularidad se recobra el elemento de ángulo sólido convencional.

4.1.2. Singularidad

Al realizar una análisis más profundo a los invariantes del espacio-tiempo (4.6), como se observó anteriormente la presencia de la singularidad afecta el comportamiento de la métrica, confiriendole un comportamiento poco habitual. Tomando los límites laterales para la función f cuando $l = 0$, de (4.2a) se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{l=0, \theta \rightarrow (\pi/2)^-} f &= 0, \\ \lim_{l=0, \theta \rightarrow (\pi/2)^+} f &= \infty.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Mientras que las funciones restantes que definen (4.1) son regulares en todas partes. De las ecuaciones anteriores se infiere que el espacio-tiempo es singular en la esfera $l = 0$ siempre que se aborde dicha esfera desde la hipersuperficie $\theta = \pi/2$.

Definiendo la función $f_\Delta = f^{2\alpha_3/\alpha_1}/\Delta$ y analizando su compartamiento en $l = 0$ se tiene

$$f_\Delta = \frac{f^{2\alpha_3/\alpha_1}}{\Delta} = \exp\left(-\frac{k_1\alpha_3}{l_0^2\alpha_1 \cos \theta}\right) \frac{1}{l_0^2 \cos^2 \theta}\tag{4.12}$$

de donde es posible estudiar sus límites laterales, los cuales están dados por

$$\lim_{\theta \rightarrow (\pi/2)^-} f_\Delta = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow (\pi/2)^+} f_\Delta = \infty.\tag{4.13a}$$

La singularidad está localizada en la superficie $l = 0$ únicamente al acercarse desde el hemisferio sur de la esfera, es decir, cuando $\theta > \pi/2$. Mientras que al acercarse por cualquier otro camino el espacio-tiempo es regular. En otras palabras, el escalar de Kretschmann diverge cuando $l = 0$ y $\theta \rightarrow (\pi/2)^+$.

4.1.3. Análisis Geodésico

Geodésicas nulas Debido al comportamiento inusual de los invariantes y a la presencia de la singularidad de anillo, se estudiará como es que dichos comportamientos afectan la conducta de las geodésicas nulas que se hayan cerca del punto de interés; en este caso el anillo singular.

Utilizando la formulación Hamiltoniana se tiene para el espacio-tiempo bajo consideración

$$2\mathcal{H} = -\frac{p_t^2}{f} + \frac{f p_\varphi^2}{\Delta_1 \sin^2 \theta} + \frac{f}{K} \left(p_l^2 + \frac{p_\theta^2}{\Delta_1} \right),\tag{4.14}$$

con $\mathcal{H} = 0$ a lo largo de cada geodésica nula. De la simetría axial del espacio-tiempo, se sabe que $p_t = \text{constante}$ y $p_\varphi = \text{constante}$: Mientras que los momentos restantes están definidos por medio de las ecuaciones de movimiento de

Hamilton, por la naturaleza de las funciones que conforman el elemento de línea estas ecuaciones son no-triviales y están dadas por

$$\dot{l} = \frac{f}{K} p_l, \quad \dot{\theta} = \frac{f}{\Delta} p_\theta, \quad (4.15a)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_l &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln f}{\partial l} \frac{p_l^2}{f} - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln(f/\Delta_1)}{\partial l} \frac{f}{\Delta_1 \sin^2 \theta} p_\varphi^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln(f/K)}{\partial l} \frac{f}{K} p_l^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln(f/\Delta)}{\partial l} \frac{f}{\Delta} p_\theta^2, \end{aligned} \quad (4.15b)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_\theta &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln f}{\partial \theta} \frac{p_l^2}{f} - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln(f/\sin^2 \theta)}{\partial \theta} \frac{f}{\Delta_1 \sin^2 \theta} p_\varphi^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln(f/K)}{\partial \theta} \frac{f}{K} \left(p_l^2 + \frac{p_\theta^2}{\Delta_1} \right), \end{aligned} \quad (4.15c)$$

donde, ahora la prima denota derivada con respecto al parámetro afín.

Debido a la falta de simetría en θ el momento p_θ no se conserva y en general debe de ser desviado al acercarse a la singularidad, siempre que se aproxime por el hemisferio sur de la esfera $l = 0$. Se puede decir que la singularidad está *protegida* por la discontinuidad de la función f , que por su naturaleza está íntimamente relacionada con la geometría de la garganta del agujero de gusano ya que ésta se encuentra precisamente en $l = 0$.

Como se dijo anteriormente, la región a estudiar es una vecindad de la singularidad de anillo, por lo cual se tomará la siguiente aproximación $l \ll 0$ y $\theta \sim \pi/2$.

Al tomar la aproximación a primer orden en (4.15a) y (4.15c) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{p}_l \frac{2\Delta}{f} &= F_1 l M - \frac{k_1 l}{l_0^4 \cos \theta} p_\varphi^2 - \frac{k_1 l}{l_0^2 \cos \theta} \exp\left(\frac{k_1}{l_0^2 \cos \theta}\right) p_l^2, \\ \dot{p}_\theta \frac{2\Delta}{f} &= F_2 M + \frac{k_1}{2l_0^2 \sin \theta} p_\varphi^2 + \frac{k_1}{2} \sin \theta \exp\left(\frac{k_1}{2l_0^2 \cos \theta}\right) p_l^2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde $M = p_l^2 l_0^2 + p_\theta^2$, y

$$F_1 = -\frac{k_1 - 2l_0^2 \cos \theta}{l_0^4 \cos^3 \theta}, \quad F_2 = \frac{k_1 - 4l_0^2 \cos \theta}{2l_0^2 \cos^2 \theta}. \quad (4.17)$$

Para facilitar el análisis y por simetría, se elige una dirección fija para φ , de modo que $p_\varphi = 0$, con lo anterior es posible integrar las ecuaciones (4.16) de manera exacta en el hemisferio sur $\theta = (\pi/2)^+$, es decir por la dirección que el

espacio es singular.

Para realizar la integración, se nota que $F_1 l_0^2 \sim -F_{2,\theta}$ en la aproximación (tomando $\sin \theta \approx 1$ cerca de $\theta = (\pi/2)^+$), con lo cual se tiene que tras la integración (4.16) queda como

$$\begin{aligned} p_l &= A_0 \sin(M_1 l l_0) \exp\left(\frac{1}{2} F_1 l^2\right) H, \\ p_\theta &= A_0 l_0 \cos(M_1 l l_0) \exp\left(\frac{1}{2} F_1 l^2\right) H, \end{aligned} \quad (4.18)$$

con A_0 constante, y $M_{1,\theta} = F_1 \approx -F_{2,\theta}/l_0^2$, y

$$H = \exp\left(\frac{k_1}{4l_0^2 \cos \theta}\right) \cos \theta.$$

De (4.1), tenemos que todas las geodésicas deben de satisfacer

$$-\epsilon^2 = -\frac{p_t^2}{f} + \frac{f}{\Delta} (p_l^2 l_0^2 + p_\theta^2), \quad (4.19)$$

recordando que se tomo $\varphi = \text{constante}$. Con $\epsilon^2 = 1$ para geodésicas temporales y $\epsilon^2 = 0$ para geodesicas nulas. Tomando (4.15c) y (4.18) es claro que (4.19) sólo es válida para el hemisferio sur, donde es válida la aproximación considerada, y en una vecindad de la singularidad.

Sustituyendo en (4.19), las soluciones (4.18) para una geodésica nula; se tiene

$$\frac{p_t^2 \Delta}{f^2} = A_0^2 H^2 e^{F_1 l^2}, \quad (4.20)$$

donde $f = \exp(-k_1/(2l_0^2 \cos \theta))$ y $\Delta = l_0^2 \cos^2 \theta$ en la aproximación. Finalmente, despejando l^2 de (4.20) se tiene

$$l^2 = -\frac{l_0^4 \cos^4 \theta}{k_1 - 2l_0^2 \cos \theta} \left(\frac{k_1}{2l_0^2 \cos \theta} + \ln\left(\frac{p_t^2}{A_0^2}\right) \right), \quad (4.21)$$

De la ecuación anterior se observa que en el hemisferio sur, donde la función $\cos \theta < 0$ y para $k_1 > 0$, no es posible obtener soluciones válidas cerca de la singularidad de anillo⁴ En otras palabras, no se pueden hallar geodésicas que se acerquen lo suficiente a la singularidad para poder tocarla. Para la región del espacio-tiempo donde se encuentra localizada la singularidad, esta última se encuentra protegida; no es visible para observadores externos[70]. Mientras que para el hemisferio norte, la singularidad está protegida por un horizonte de eventos.

⁴ Si así fuera se tendría $l^2 < 0$.

4.1.4. Geometría

Debido a que las propiedades geométricas de la garganta para la solución se estudiarán más adelante de momento se presenta únicamente una manera alternativa visualizar la garganta; al percatarse de que la métrica inducida⁵, se asemeja a la solución de Morris-Thorne

Definiendo una nueva coordenada radial como

$$r^2 = \Delta_1 = l^2 + l_0^2, \quad (4.22)$$

se reescribe (4.1) como una métrica conformal de la forma

$$ds^2 = \frac{K}{f} \left(-\frac{f^2}{K} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - l_0^2/r^2} + \frac{r^2}{K} d\Omega_0^2 \right), \quad (4.23)$$

donde

$$K = 1 - \frac{l_0^2}{r^2} \sin^2 \theta, \quad f = \exp \left(-\frac{k_1}{2} \frac{\cos \theta}{r^2 - l_0^2 \sin^2 \theta} \right). \quad (4.24)$$

En términos de la nueva variable r la singularidad de anillo se encuentra en $r = l_0$ y $\theta = \pi/2$. Por la simetría de la métrica, podemos tomar una hipersuperficie en $\varphi = \text{constante}$, con esto la métrica inducida (4.23) tiene la forma $ds_c^2 = (K/f) ds_c^2$, donde

$$ds_c^2 = -\frac{f^2}{K} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - l_0^2/r^2} + r^2 d\theta^2, \quad (4.25)$$

la cual se asemeja a la solución propuesta por Morris y Thorne⁶ en [11], el tamaño de la garganta está determinado por el parámetro -con unidades de distancia- l_0 . Se puede inferir, sin mucha rigidez que la métrica (4.1) representa un agujero de gusano de tamaño finito que está conformalmente emparentado con la solución de Morris-Thorne. Es preciso señalar que esta aseveración no es del todo rigurosa ya que la transformación conformal que relaciona a ambas métricas no es válida en el anillo singular [71]; mas lejos de ésta la relación es válida. Por lo cual, y como es sabido que los espacios conformales preservan la estructura de las geodésicas nulas; es posible decir que todas aquellas geodésicas nulas lo suficientemente alejadas de la singularidad se pueden ser relacionadas conformalmente con las geodésicas nulas en el espacio-tiempo de Morris-Thorne.

⁵ Por medio de un mapeo conformal lejos de la singularidad.

⁶ Cabe señalar que en el presente caso se tomó el encaje con φ constante mientras que en el agujero de Morris-Thorne se toma para θ constante.

Es válido considerar que sobre un diagrama de encaje que defina a la garganta descansarán las geodésicas nulas para la solución que está siendo examinada, siempre que éstas se encuentren en una región donde el mapeo conformal esté definido, es decir en una región donde este último sea no-singular.

Otra singularidad fundamental con la solución de Morris-Thorne es la presencia de un potencial gravitacional no-trivial en la solución presente. El potencial gravitacional está dado por

$$\phi_g = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{f^2}{K} \right), \quad (4.26)$$

y es responsable de la deformación de las geodésicas al acercarse a la singularidad. Por la forma funcional que presenta es interesante notar que para el hemisferio norte, el potencial gravitacional es atractivo; mientras que el hemisferio sur, es repulsivo como se encontro en la sección anterior es justamente en esta región que las geodésicas se alejan del anillo singular.

Se concluye que debido a las deformaciones que presenta la garganta por la presencia de la singularidad las geodésicas no pueden alcanzar al anillo singular. Es decir, las deformaciones en los caminos geodésicos surgen debido a la geometría del espacio, en este caso la presencia de la garganta, en lugar de causas puramente dinámicas.

Lo anterior es análogo a la presencia de los horizontes de eventos que deben vestir a las singularidades desnudas de acuerdo con la conjetura de censura cósmica de Penrose. Para el agujero de gusano de tipo Kerr es la presencia de la garganta la responsable de proteger a la singularidad desnuda, resultando en una especie de censura cósmica debida a la geometría del espacio-tiempo, es decir la presencia de la garganta. Obteniendo una generalización, para el caso de un agujero de gusano, de la conjetura Penrose.

4.1.5. Sombra

Aproximación Campo Débil Asumiendo que el campo es débil, es decir $k_1 \ll m^2$. La función f está dada por

$$f \rightarrow 1 - \frac{k_1}{2\Delta} \cos \theta + O(k_1^2), \quad (4.27)$$

Esta aproximación sólo es válida cuando $l \neq 0$ o $\theta \neq \pi/2$. Es decir, lejos de la singularidad.

En este límite la métrica 4.1 es separable usando el formalismo de Hamilton-Jacobi y es posible hallar una constante de movimiento extra. Aplicando el formalismo las ecuaciones de movimiento geodésico se reducen a

$$\begin{aligned}
f\dot{t} &= E, \\
f^{-1}\dot{\phi} &= \frac{L}{\Delta_1 \sin^2 \theta}, \\
\Delta^2 f^{-2} \dot{l}^2 &= L(l), \\
\Delta^2 f^{-2} \dot{\theta}^2 &= \Theta(\theta),
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Las funciones L y Θ están dadas por

$$\begin{aligned}
L(l) &= (E^2 + \kappa)l^4 + (E^2 l_0^2 + l_0^2 \kappa - Q)l^2 + l_0^2(L^2 - Q), \\
\Theta(\theta) &= (E^2 + \kappa)l_0^2 \cos^2 \theta + (E^2 + \frac{\kappa}{2})k_1 \cos \theta + Q - \frac{L^2}{\sin^2 \theta}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Donde E es la energía de la partícula, L su momento angular y Q la constante de separación de Carter. Y κ toma el valor -1 para geodésicas temporales y 0 para geodésicas nulas (fotones). Debido al término $f^{-2}\Delta$ en las ecuaciones (4.28). Las ecuaciones de movimiento radial \dot{l} y angular $\dot{\theta}$ aún están acopladas.

Como la aproximación no es válida cerca (y en) de la singularidad se tiene que $Q \neq L^2$. Ya que $\Delta = 0$ implica $Q = L^2$. A pesar de que la aproximación deja de ser buena cerca de la singularidad, es suficiente para calcular la sombra del agujero de gusano, ya que el observador se encuentra en infinito. Ya que la primera órbita inestable estará en general en $r > 0$ puesto que $Q \neq L^2$.

Considerando las trayectorias de fotones e introduciendo los parámetros de impacto (1.89) en (4.28) resulta

$$\begin{aligned}
f\dot{t} &= 1, \\
f^{-1}\dot{\phi} &= \frac{\xi}{\Delta_1 \sin^2 \theta}, \\
\Delta^2 f^{-2} \dot{l}^2 &= L(l), \\
\Delta^2 f^{-2} \dot{\theta}^2 &= \Theta(\theta),
\end{aligned} \tag{4.30}$$

con

$$\begin{aligned}
L(l) &= l^4 + (l_0^2 - \eta)l^2 + l_0^2(\xi^2 - \eta), \\
\Theta(\theta) &= l_0^2 \cos^2 \theta + k_1 \cos \theta + \eta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

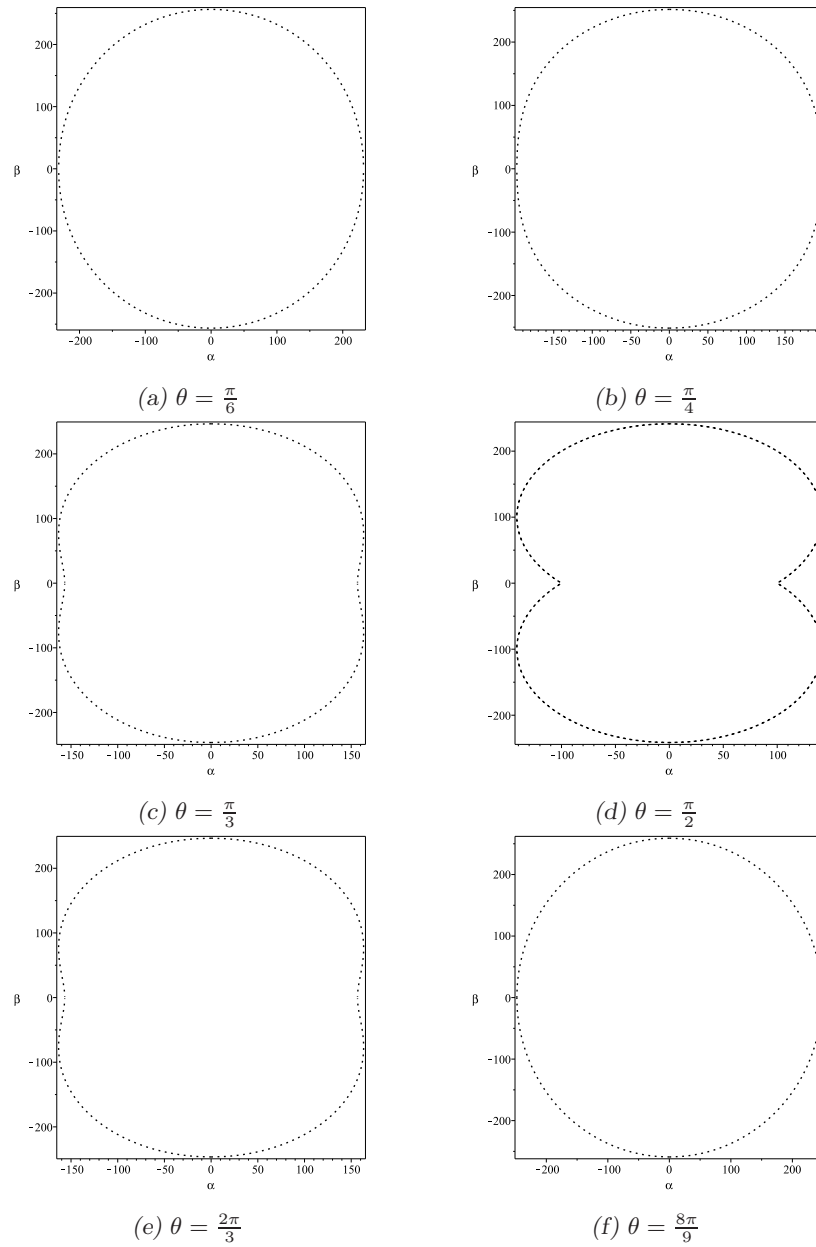


Fig. 4.1: Sombra del agujero de gusano de tipo Kerr estático en la aproximación de campo débil para $b_0 = 100$, $k_1 = 0,1$ y ángulos de inclinación θ .

Recordando que las órbitas que se buscan son esféricas y requieren las condiciones (1.88), al resolver para L se encuentra que los parámetros de impacto parametrizados en términos de l son

$$\begin{aligned}\eta &= 2l^2 + l_0^2, \\ \xi^2 &= \frac{(l^2 + l_0^2)^2}{l_0^2}.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Las coordenadas celestiales en términos de las trayectorias de los fotones (4.30) son

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{\xi}{\sin \theta_0}, \\ \beta &= \left(l_0^2 \cos^2 \theta_0 + k_1 \cos \theta_0 + \eta - \frac{\xi^2}{\sin \theta_0} \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{4.33}$$

Graficando⁷ α y β tomando como parámetro r se obtiene la sombra del agujero de gusano de tipo Kerr estático. Dicho resultado se muestra en la figura 1.2 para diferentes ángulos de inclinación.

Si se compara la figura 4.1 donde se muestra la sombra para la solución (4.1) con las figuras 1.2 y 2.1 que muestran las sombras para la métrica de Morris-Thorne estático y estacionario (rotando) respectivamente, es fácil distinguir uno de otro por medio de la silueta que proyectan en el plano celestial (α, β) .

4.2. Agujero de Gusano Tipo Kerr Estacionario

4.2.1. Métrica

Se considera un espacio-tiempo estacionario con simetría axial, sus vectores de Killing están dados por $(\xi)^\alpha = (\partial/\partial t)^\alpha$ el cual es un vector de Killing temporal y general traslaciones temporales invariantes y $\mu^\alpha = (\partial/\partial \varphi)^\alpha$ es un vector de Killing espacial, éste general rotaciones invariantes alrededor de φ . En coordenadas de Boyer-Lindquist el elemento de línea está dado por⁸

⁷ Las relaciones obtenidas para α y β sólo son válidas en las regiones donde $\Theta \geq 0$ y $\frac{d^2(L)}{dl^2} \geq 0$.

⁸ En las coordenadas originales l .

$$ds^2 = -f (dt + \omega d\varphi)^2 + \frac{1}{f} \left(\Delta \left(\frac{dl^2}{\Delta_1} + d\theta^2 \right) + \Delta_1 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right), \quad (4.34)$$

donde Δ_1 y Δ son las mismas que en la sección anterior 4.1 y están dadas, en términos de la coordenada l por

$$\Delta = (l - l_1)^2 + (l_0^2 - l_1^2) \cos^2 \theta, \quad (4.35)$$

$$\Delta_1 = (l - l_1)^2 + (l_0^2 - l_1^2), \quad (4.36)$$

Y donde se tienen las siguientes definiciones

$$\omega = a \frac{(l - l_1)}{\Delta} \sin^2 \theta, \quad (4.37)$$

$$f = \frac{(a^2 + k_1^2) e^\lambda}{a^2 + k_1^2 e^{2\lambda}}, \quad (4.38)$$

con λ dado por

$$\lambda = \frac{a^2 + k_1^2}{2 k_1 \Delta} \cos \theta, \quad (4.39)$$

l_0 y l_1 son parámetros con unidades de distancia tales que $g_{ll} > 0$

$$l_0^2 > l_1^2 > 0, \quad (4.40)$$

Éstos parámetros están relacionados con el tamaño de la garganta del agujero de gusano, mientras que a y k_1 tienen unidades de momento angular, relacionados con la rotación y la carga escalar.

En la figura 4.2 se muestra la función f , como λ es bien comportada excepto en $\Delta = 0$, donde se localiza la singularidad de anillo.

El elemento de línea (4.34) es una solución exacta a las ecuaciones de Einstein con signo negativo en el campo escalar⁹,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2} \kappa} \lambda, \quad (4.41)$$

⁹ Donde $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$.

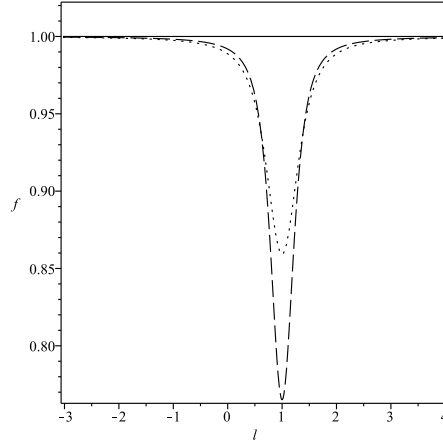


Fig. 4.2: Función f con $l_1 = 1, 0$, $l_0 = 1, 1$, $a = 0, 1$, $k_1 = 0, 11$ para diferentes valores de θ ($\theta = 0$ línea punteada, $\theta = \pi/2$ línea sólida y $\theta = \pi/4$ línea discontinua). La función tiene un mínimo en 0.859 cuando $\theta = 0$.

Para el comportamiento asintótico de la métrica 4.34 se tiene, para $l \rightarrow \pm\infty$, que $\omega \rightarrow 0$ y $\lambda \rightarrow 0$ con lo cual

$$f \rightarrow 1 \quad (4.42)$$

y $\Delta, \Delta_1 \rightarrow l^2$, el elemento de línea está dado por

$$ds^2 \rightarrow -dt^2 + dl^2 + l^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.43)$$

es un espacio plano en coordenadas esféricas. La métrica es asintóticamente plana. El escalar de curvatura (y en general los invariantes de la métrica) tienen la forma

$$\text{Invariantes} = \frac{H}{8 k_1^2 \Delta^{r_1} \Delta_1^{r_2} (a^2 + k_1^2 e^{2\lambda})^{r_3}}, \quad (4.44)$$

donde H es una función complicada de l y θ , la cual es diferente para cada invariante; r_1 , r_2 y r_3 son coeficientes mayores a cero que también dependen del invariante. Igual que para el caso estático se tiene que $\Delta_1 \neq 0$, mientras que $\Delta = 0$ cuando $l = l_1$ y $\theta = \pi/2$. La métrica presenta una singularidad nula cuando $\Delta = 0$ que representa un anillo de radio $l = l_1$ en el plano ecuatorial.

La masa ADM y el momento angular para (4.34) está dado, de acuerdo a

[?] por

$$M = -\frac{1}{8\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} (k - k_0) \sqrt{\sigma} d^2\theta, \quad (4.45)$$

$$J = -\frac{1}{8\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} (K_{ij} - K \gamma_{ij}) \phi^i r^j \sqrt{\sigma} d^2\theta. \quad (4.46)$$

En este caso, se obtiene

$$M = -l_1, \quad (4.47)$$

$$J = a. \quad (4.48)$$

Como se puede observar el agujero de gusano tiene masa negativa y coincide con el tamaño de la garganta del agujero de gusano y el momento angular está dado por el parámetro a .

Tomando $a = 0$, de (4.37) se tiene $\omega = 0$ y la métrica (4.34) se reduce al caso estático (4.1) visto en la sección 4.1.

con

4.2.2. Geometría

Reescribiendo la métrica (4.34) para estudiar la geometría del agujero de gusano

$$ds^2 = -f (dt + \omega d\varphi)^2 + \frac{K}{f} dl^2 + \frac{\Delta_1}{f} [K d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2], \quad (4.49)$$

Como puede observarse en la figura 4.3 la modificación al ángulo sólido es muy pequeña excepto cerca de la esfera $l = l_1$, superficie donde se encuentra la singularidad, lejos el espacio-tiempo puede considerarse esféricamente simétrico.

En (4.49) tomando $R^2 = \Delta_1/f$, donde $R \neq 0$, como se muestra en la figura 4.4, con lo cual el área de esta región nunca es cero y por lo tanto corresponde a la garganta del agujero de gusano. Lejos de la esfera de radio l_1 , la nueva coordenada R se comporta como

$$R \sim l - \left(\frac{a^2 - k_1^2}{4k_1} \cos(\theta) + \frac{1}{2}(l_0^2) \right) \frac{1}{l} + O\left(\frac{1}{l^2}\right), \quad (4.50)$$

en este límite la coordenada R se comporta como l . En el límite Newtoniano, el campo gravitacional u se obtiene por medio de $f = e^{2u}$, de modo que para $u = -M_{New}/l$, con M_{New} es la masa Newtoniana. Así para $l \rightarrow \infty$ se tiene

$$f = 1 + \frac{a^2 - k_1^2}{2k_1} \frac{\cos \theta}{l^2} + O\left(\frac{1}{l^3}\right) \quad (4.51)$$

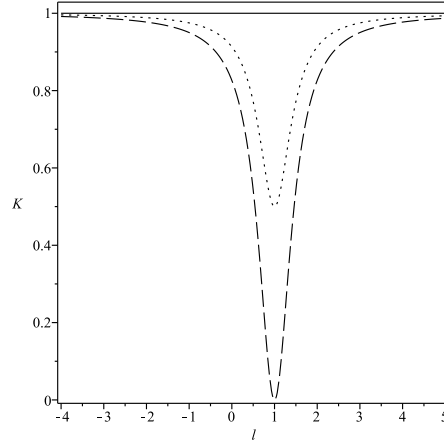


Fig. 4.3: K con $l_1 = 1$, $l_0 = 1,1$, $a = 0,1$, $k_1 = 0,11$ para diferentes θ . Lejos de la singularidad $K = 1$.

lo que implica que la masa Newtoniana es cero, $M_{New} = 0$. De igual manera se obtiene que $Q = 0$.

La garganta del agujero de gusano se puede describir al embeber el espacio-tiempo en un espacio Euclideo tres dimensional para $t = constante$ y $\theta = constante$. Bajo estas condiciones,

$$ds^2 = f^{-1}K \left(\frac{dl}{dR} \right)^2 dR^2 + R^2 \left(\sin^2(\theta_0) - \frac{\omega^2 f^2}{\Delta_1} \right) d\varphi^2, \quad (4.52)$$

Lo cual resulta en una superficie de revolución con forma paramétrica $h(R, \varphi) = (R \cos(\varphi), R \sin(\varphi), z(R, \theta_0))$. Con $z = z(R, \theta_0)$ para un valor fijo θ_0 , tal que

$$\left(\frac{dz}{dR} \right)^2 = f^{-1}K \left(\frac{dl}{dR} \right)^2 - 1. \quad (4.53)$$

La condición de ensanchamiento $\frac{d^2R}{dz^2} > 0$ cerca de la garganta es

$$\frac{d^2R}{dz^2} = (f^{-1}K - \left(\frac{dR}{dl} \right)^2)^{-1} \frac{d^2R}{dl^2} + \frac{1}{2} \frac{dR}{dl} \frac{d}{dl} (f^{-1}K - \left(\frac{dR}{dl} \right)^2)^{-1} > 0.$$

La superficie dada por (4.53) y la condición de ensanchamiento se graficaron con $l_1 = 1$, $l_0 = 1,5$, $a = 0,1$ y $k_1 = 0,11$, ver Fig.4.5 y Fig.4.6.

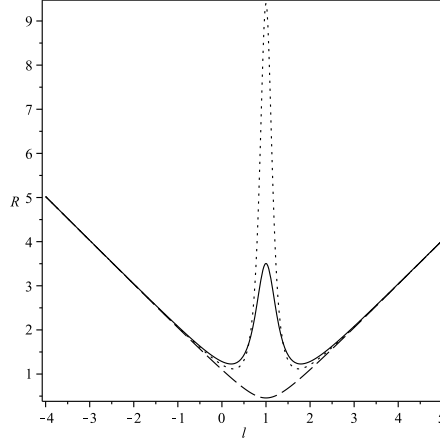


Fig. 4.4: $R = \sqrt{\Delta_1/f}$ con $l_1 = 1$, $l_0 = 1,1$, $a = 1$, $k_1 = 1$, para diferentes valores de θ . La función R es bien comportada en todas partes, incluido el ecuador, ($\theta = \frac{\pi}{2}$ línea sólida).

4.2.3. Análisis Geodésico

Se estudiará el comportamiento de las geodésicas utilizando las coordenadas de Boyer-Linquist. Se analizarán las geodésicas radiales ya que con ellas es posible discernir si un observador puede o no cruzar el agujero de gusano. Es claro que la singularidad evita que cualquier observador cruce el agujero de gusano, por lo menos en el plano ecuatorial. Sin embargo, el camino más sencillo para atravesar el agujero de gusano es por medio de geodésicas polares, es decir, la línea que une el polo norte con el polo sur en una esfera. En la superficie de la esfera con $l = 0$ un viajero encuentra la boca de la garganta, donde las fuerzas de marea son menores debido a la simetría de la singularidad.

Siendo τ el parámetro afín y $u^\mu = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$, con $\dot{t} = \frac{dt}{d\tau}$, etc., el vector velocidad para un observador, tal que $u^\mu u_\mu = -1$ se satisface. Con coordenadas de Boyer-Lindquist lo anterior se reduce a

$$-1 = -f (\dot{t} + \omega \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{f} \left(\Delta \left(\frac{\dot{r}^2}{\Delta_1} + \dot{\theta}^2 \right) + \Delta_1 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right), \quad (4.54)$$

Para geodésicas polares, $\theta = 0$, lo anterior implica $\Delta_1 = \Delta$ y $\omega = 0$. El observador no siente la rotación de agujero de gusano. El espacio-tiempo 4.54 se reduce a

$$-1 = -f \dot{t}^2 + \frac{1}{f} \dot{r}^2, \quad (4.55)$$

En esta métrica $\frac{\partial}{\partial t}$ es el vector de Killing temporal, con lo cual $f \dot{t} = \sqrt{2}E$, donde E es una constante, 4.55 es

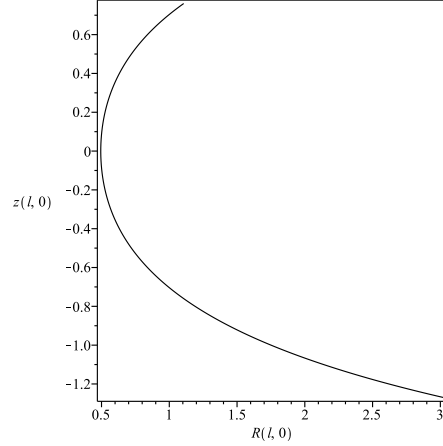


Fig. 4.5: Garganta del agujero de gusano para $\theta = 0$. Con $l_1 = 1$, $l_0 = 1,5$, $a = 0,1$ y $k_1 = 0,11$. Debido a que la métrica es axialmente simétrica la forma de la garganta para diferentes valores de θ será diferente.

$$\frac{1}{2} \dot{l}^2 + \frac{1}{2} f = E^2 \quad (4.56)$$

Es una ecuación dinámica, de la cual es posible obtener el movimiento para una partícula de prueba al conocer el “potencial.” el cual es este caso está dado por $1/2 f$.

En términos de coordenadas prolatas, las cuales están definidas por medio de

$$\begin{aligned} \rho &= \sigma(x^2 - 1)(1 - y^2), \\ \zeta &= \sigma x y, \end{aligned} \quad (4.57)$$

se tiene que las ecuaciones geodésicas se escriben como

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (4.58)$$

donde τ parametriza la curva $x^\alpha(\tau)$, es posible obtener los mismos resultados. En términos de las coordenadas prolatas, los símbolos de Christoffel diferentes de cero son

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}^x &= -\frac{f_x}{2f}, & \Gamma_{tt}^x &= -\frac{f f_x}{2\sigma^2} \\ \Gamma_{tx}^t &= -\frac{f_x}{2f}, & \Gamma_{xt}^t &= \frac{f_x}{2f}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Así, la ecuación geodésica es

$$\ddot{x} + \Gamma_{xx}^x \dot{x}^2 + \Gamma_{tt}^x \dot{t}^2 = 0 \quad (4.60)$$

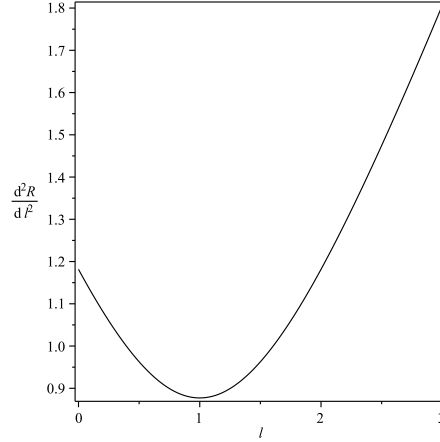


Fig. 4.6: La función z para $\theta = \pi$. La garganta se encuentra en $l = l_1$. Con $l_1 = 1$, $l_0 = 1,5$, $a = 0,1$ y $k_1 = 0,11$. La condición de ensanchamiento se satisface, es decir que $z > 0$ cerca de la garganta.

$$\ddot{t} + 2\Gamma_{xt}^t \dot{x}\dot{t} = 0 \quad (4.61)$$

En términos de t

$$f\dot{t} = \sqrt{2}E \quad (4.62)$$

donde E es la constante de integración correspondiente a la variable x

$$\frac{\sigma^2}{f}\dot{x}^2 - f\dot{t}^2 = -1 \quad (4.63)$$

Combinando (4.62) y (4.63)

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{f}{2\sigma^2} = E^2. \quad (4.64)$$

Reescribiendo (4.64)

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{f}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2} = E^2 + \frac{1}{2\sigma^2} \quad (4.65)$$

ahora el potencial y la energía total están dados por

$$V \rightarrow -\frac{f}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2} \quad E^2 \rightarrow E^2 + \frac{1}{2\sigma^2} \quad (4.66)$$

Interpretando la ecuación dinámica $\frac{\dot{x}^2}{2} + V = E^2$, se interpreta a V es un pozo de potencial. Una partícula puede caer en el pozo y permanecer ahí o, si su energía total es mayor a E^2 , la partícula continua hacia la garganta. Es importante mencionar que este análisis es válido únicamente para geodésicas nulas

con $\theta = 0$. Otros valores de θ nos dan geodésicas no físicas.

Integrando (4.64) en términos de τ y x ,

$$\frac{d\tau}{dx} = \pm \left(2E^2 + \frac{f}{\sigma^2} \right)^{-1/2} \quad (4.67)$$

reduciendo a cuadraturas

$$\tau = \pm \int \left(2E^2 - \frac{(a^2 + k_1^2) e^{\frac{a^2 + k_1^2}{2k_1(\sigma^2 x^2 + l_0^2 - l_1^2)}}}{\sigma^2 \left(a^2 + k_1^2 e^{\frac{a^2 + k_1^2}{k_1(\sigma^2 x^2 + l_0^2 - l_1^2)}} \right)} \right)^{-1/2} dx \quad (4.68)$$

La integración se puede realizar numericamente.

Para el caso general, con $\theta \neq const.$, en términos de los momentos en coordenadas de Boyer-Lindquist

$$p_l = \frac{\Delta}{\Delta_1 f} \dot{l}, \quad p_\theta = \frac{\Delta}{f} \dot{\theta},$$

con cantidades conservadas

$$E = f(\dot{t} + \omega \dot{\phi}), \quad L + \omega E = \frac{f}{\Delta_1 \sin^2 \theta} \dot{\phi}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para (4.34) son

$$\begin{aligned} \dot{p}_l &= \frac{(a^2 + k_1^2)(l - l_1) \cos \theta}{2k_1 f_- \Delta^2} E^2 + \frac{a(l - l_1) f \Delta_-}{\Delta_1 \Delta^2} E(L + \omega E) \\ &+ \frac{(l - l_1) f^2 \Delta_1}{\Delta^2} \left(\frac{1}{f} + \frac{(a^2 - k_1^2) \cos \theta}{2k_1 \Delta f_-} \right) \left(p_l^2 + \frac{p_\theta^2}{\Delta_1} \right) \\ &+ \frac{f^2}{\Delta_1^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{1}{f} + \frac{(a^2 - k_1^2) l \Delta_1 \cos \theta}{2k_1 \Delta^2 f_-} \right) (L + \omega E)^2 - \frac{l f}{\Delta} p_l^2, \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_\theta &= \frac{(a^2 - k_1^2) \sin \theta \Delta_-}{4k_1 \Delta^2 f_-} E^2 - \frac{a l \sin 2\theta f}{\Delta^2 \sin^2 \theta} E(L + \omega E) \\ &+ \frac{f^2}{\Delta_1 \sin \theta} \left(\frac{\sin 2\theta}{2f \sin^3 \theta} + \frac{(a^2 - k_1^2) \Delta_-}{4k_1 \Delta^2 f_-} \right) (L + \omega E)^2 \\ &+ \frac{f^2}{K \Delta} \left(\frac{(a^2 - k_1^2) \Delta_- \sin \theta}{4k_1 \Delta f_-} - \frac{(l_0^2 - l_1^2) \sin 2\theta}{2f} \right) \times \left(p_l^2 + \frac{p_\theta^2}{\Delta_1} \right). \end{aligned} \quad (4.70)$$

con

$$\Delta_- = (l - l_1)^2 - (l_0^2 - l_1^2) \cos^2 \theta \quad \text{y} \quad f_- = \frac{(a^2 - k_1^2)e^\lambda}{a^2 - k_1^2 e^{2\lambda}}. \quad (4.71)$$

En la figura 4.7 se observan las geodésicas para diferentes valores iniciales de θ . En la figura se muestra el plano xy perpendicular al plano donde se encuentra la singularidad, de modo que las cruces representan los puntos donde la singularidad corta dicho plano. Como se observa ninguna geodésica nula alcanza la singularidad, ni siquiera aquellas que logran cruzar el agujero de gusano [25].

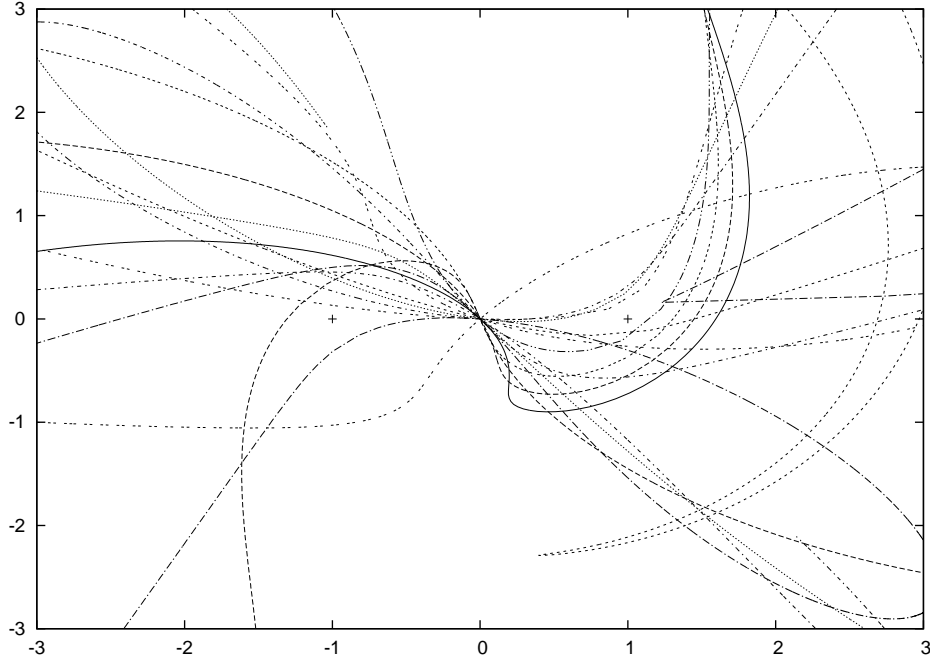


Fig. 4.7: Geodésica en coordenadas polares con diferentes valores iniciales para θ , tomando $l_1 = 1$, $l_0 = 1,1$, $a = 0,1$, $k_1 = 0,11$, $E = 1,0$ y $L = 0,5$. Las cruces representan la singularidad, es decir $l = l_1$, $\theta = \pi/2$.

4.2.4. Condiciones de Energía

En esta sección se analiza la condición nula de la energía para este espacio-tiempo. Tomando la base ortonormal $e_{\hat{t}}, e_{\hat{r}}, e_{\hat{\theta}}, e_{\hat{\phi}}$,

$$\begin{aligned}
e_{\hat{t}} &= f^{-\frac{1}{2}} e_t, \\
e_{\hat{r}} &= (f^{-1}K)^{\frac{1}{2}} e_r, \\
e_{\hat{\theta}} &= f^{-1}K\Delta_1^{-\frac{1}{2}} e_\theta, \\
e_{\hat{\varphi}} &= \frac{\omega e_t + e_\varphi}{\sqrt{f^{-1}K\Delta_1 \sin(\theta)}}.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Una de las condiciones más importantes para construir un agujero de gusano es la violación de la NEC, es decir Por simplicidad se utilizará un vector radial saliente nulo $\mu = e_{\hat{t}} + e_{\hat{r}}$, con ésto

$$T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\mu^{\hat{\alpha}}\mu^{\hat{\beta}} = T_{\hat{t}\hat{t}} + T_{\hat{r}\hat{r}} = \frac{1}{8\pi}(R_{\hat{t}\hat{t}} + R_{\hat{r}\hat{r}}). \tag{4.73}$$

Graficando (4.73) cerca de la garganta, es posible observar que la NEC es violada en dicha región. Como se muestra en la figura 4.8.

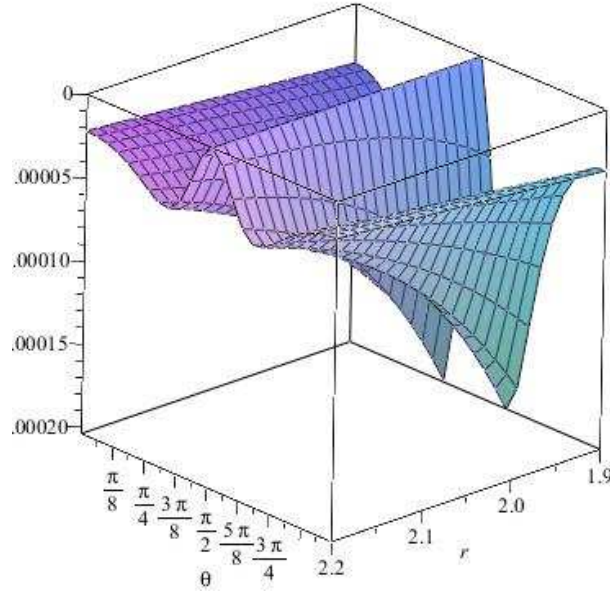


Fig. 4.8: $T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\mu^{\hat{\alpha}}\mu^{\hat{\beta}}$ para $\mu = e_{\hat{t}} + e_{\hat{r}}$ con (4.72). Tomando $l_1 = 1$, $l_0 = 1,5$, $a = 0,1$ y $k = 0,11$. Se observa la violación de la NEC.

4.2.5. Condiciones de Transitabilidad

Desde el punto de vista físico es importante saber si un agujero de gusano es o no transitable. Para ello es necesario investigar las fuerzas de marea [11, 12],

para la métrica (4.34). Para simplificar el análisis se toma un viajero que se desplace radialmente hacia el agujero de gusano, partiendo del reposo en una estación en el Universo inferior y terminando en otra estación en el Universo superior y llegando con velocidad cero. Usando una base ortonormal en el marco de referencia del viajero

$$\begin{aligned} e_0 &= \gamma e_{\hat{t}} \mp \gamma(v/c)e_{\hat{r}}, \\ e_1 &= \mp \gamma e_{\hat{r}} + \gamma(v/c)e_{\hat{t}}, \\ e_2 &= e_{\hat{\theta}}, \quad e_3 = e_{\hat{\varphi}}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

donde $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-\frac{1}{2}}$. Y asumimos que el viajero no siente una aceleración mayor a la gravedad en la tierra. Siguiendo el procedimiento en [11] y [12], las fuerzas de marea están dadas por

$$|R_{\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}}| \leq g_{\oplus}/c^2 \times 2m \approx 1/(10^5 km)^2, \quad (4.75)$$

tomando la altura del viajero como $2m$. Se tiene que $|R_{\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}}| = |R_{\hat{i}\hat{i}\hat{i}\hat{i}}|$. Con lo cual se reduce a

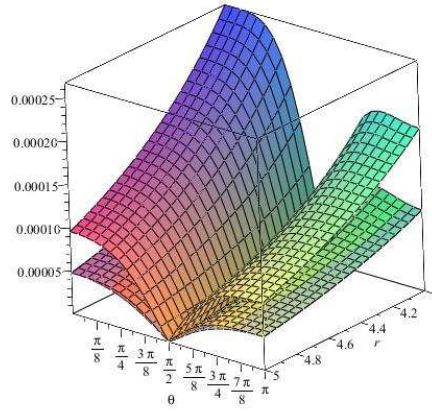


Fig. 4.9: Las fuerzas de marea para (4.1), están dadas por (4.77), (4.78) y (4.79). Con $l_1 = 1$ $l_0 = 1,5$, $a = 0,1$, $k_1 = 0,11$. En términos de la tetrada (4.72).

$$\begin{aligned} |R_{\hat{i}\hat{i}\hat{i}\hat{i}}| &= \frac{\Delta_1}{4f \sin^2 \theta} |2 \sin^2 \theta \Delta f \frac{\partial^2 f}{\partial l^2} \\ &\quad - \Delta_1 f \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial l} \frac{\partial K}{\partial l} - K \sin^2 \theta \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \\ &\quad + f \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial K}{\partial \theta} + f^4 K \left(\frac{\partial \omega}{\partial l} \right)^2 | \leq (10^5 km)^{-2}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Las fuerzas de marea laterales se reducen al estudio de $|R_{\hat{2}\hat{0}\hat{2}\hat{0}}| \leq (10^5 km)^{-2}$ y $|R_{\hat{3}\hat{0}\hat{3}\hat{0}}| \leq (10^5 km)^{-2}$. Debido a que la solución tiene simetría axial. Se tiene

$$|R_{\hat{2}\hat{0}\hat{2}\hat{0}}| = \gamma^2 |R_{\hat{\theta}\hat{i}\hat{\theta}\hat{i}}| + \gamma^2 (v^2/c) |R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}}|. \quad (4.77)$$

Asumiendo que el viajero está en reposo en la garganta [11], se tiene $v \rightarrow 0$ and $\gamma \rightarrow 1$. Por lo tanto $|R_{\hat{2}\hat{0}\hat{2}\hat{0}}| = |R_{\hat{\theta}\hat{i}\hat{\theta}\hat{i}}|$. Así la fuerza de marea queda como

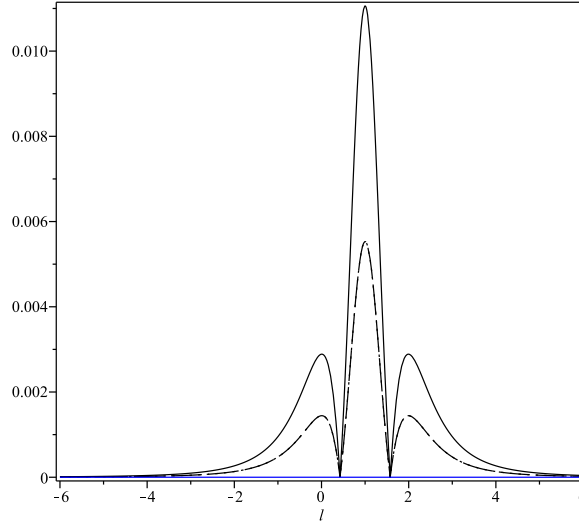


Fig. 4.10: Tomando $l_1 = 1$ $l_0 = 1,5$, $a = 0,1$, $k_1 = 0,11$. Fuerzas de marea para $\theta = 0$. La línea sólida represena $|R_{\hat{i}\hat{i}\hat{i}\hat{i}}|$.

$$\begin{aligned} |R_{\hat{\theta}\hat{i}\hat{\theta}\hat{i}}| &= \frac{1}{4\Delta^2 f \sin^2 \theta} \left| -\Delta\Delta_1 \sin^2 \theta \left(\frac{\partial f}{\partial l} \right)^2 \right. \\ &\quad + f \Delta_1 \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial l} \frac{\partial \Delta}{\partial l} + 2 f \Delta \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \\ &\quad \left. - f \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + f^4 K \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2 \right| \leq (10^5 km)^{-2} \end{aligned} \quad (4.78)$$

La última aceleración puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
|R_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}}| &= \frac{1}{4f\Delta \sin^2 \theta} \left| -\Delta_1 \sin^2 \theta \left(\frac{\partial f}{\partial l} \right)^2 \right. \\
&\quad + f \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial l} \frac{d\Delta_1}{dl} + f^4 \left(\frac{\partial \omega}{\partial l} \right)^2 \\
&\quad + 2f \sin \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} - \sin^2 \theta \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \\
&\quad \left. + \frac{f^4}{\Delta_1} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2 \right| \leq (10^5 km)^{-2}. \tag{4.79}
\end{aligned}$$

Los resultado anteriores (4.77), (4.78) y (4.79) de muestran en la figura 4.9.

Si se obliga al viajero a aproximarse por el polo norte $\theta = 0$, con lo cual $\partial w/\partial \theta = 0$ y $\partial f/\partial \theta = 0$. Con lo cual los tensores de Riemann se simplifican. Los resultados se muestran en la figura 4.10.

4.2.6. Sombra

Si se considera la solución (4.34) y tomamos sin perdida de generalidad $r = l - l_1$ y $r_0^2 = l_0^2 - l_1^2$ y además en la aproximación de campo débil y rotación lenta, es decir si se tiene $a^2 \ll k_1^2$ con $k_1 \ll 1$; las funciones f (4.38) y λ (4.39) se reducen a

$$f \rightarrow 1 - \lambda \quad \text{con} \quad \lambda \rightarrow \frac{k_1 \cos \theta}{2\Delta}. \tag{4.80}$$

En esta aproximación es posible encontrar una cuarta cantidad conservada. De nuevo, aplicando el formalismo de Hamilton-Jacobi, se encuentra que las ecuaciones de movimiento para las coordenadas r y θ son

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta}{f} \dot{r}^2 &= \sqrt{\mathcal{R}}, \\
\frac{\Delta}{f} \dot{\theta}^2 &= \sqrt{\Theta}. \tag{4.81}
\end{aligned}$$

donde \mathcal{R} y Θ están dadas

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= (\kappa^2 + E^2)r^4 + [r_0^2(\kappa^2 + E^2) - \mathcal{K}]r^2 - 2aELr + r_0^2(L^2 - \mathcal{K}), \\
\Theta &= \mathcal{K} - \frac{L^2}{\sin^2 \theta} + (\kappa^2 + E^2)r_0^2 \cos^2 \theta + \frac{k_1}{2}(\kappa^2 + 2E^2) \cos \theta, \tag{4.82}
\end{aligned}$$

Para calcular la sombra del agujero de gusano, se necesita expresar lo anterior en términos de los parámetros de impacto y sólo considerar geodésicas nulas $\kappa = 0$. Con lo cual las relaciones \mathcal{R} y Θ se transforman en

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= r^4 + (r_0^2 - \eta)r^2 - 2a\xi r + r_0^2(\xi^2 - \eta), \\ \Theta &= \eta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta} + r_0^2 \cos^2 \theta + k_1 \cos \theta,\end{aligned}\quad (4.83)$$

De (4.83), se encuentran los parámetros de impacto, para las órbitas inestables. Parametrizados en términos de la coordenada radial r , tenemos

$$\begin{aligned}\eta &= 2r^2 + r_0^2 - \frac{a\xi}{r}, \\ \xi &= \frac{1}{2r_0^2 r} \left[a(r^2 - r_0^2) + 2r_0(r^2 + r_0^2)^{\frac{1}{2}} \right].\end{aligned}\quad (4.84)$$

donde para obtenerlos recordamos que $a^2 \approx 0$.

De (1.90), (4.81) y (4.83) las coordenadas celestes α y β , en términos de los parámetros de impacto η y ξ , son

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{\xi}{\sin \theta}, \\ \beta &= \left(\eta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta} + r_0^2 \cos^2 \theta + k_1 \cos \theta \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (4.85)$$

donde θ es la inclinación del observador que mira desde el infinito la sombra del agujero de gusano. Lo anterior en la región en que $R_{,rr} \geq 0$ y $\Theta \geq 0$.

Con la definición de las coordenadas celestiales se puede obtener la sombra proyectada por el agujero de gusano en el plano celeste (α, β) . En la figura 4.12 se muestra la silueta de la sombra proyectada por (4.34) para diferentes ángulos de inclinación θ .

De las figuras 4.11 y 4.12 se puede inferir que la presencia del campo escalar ocasiona que la sombra para ciertos valores de θ se asemeja a un chabacano; mientras que la rotación hace que la sombra se parezca a un diamante achatado. Ya que para $\theta = \pi/2$ la sombra, en esta aproximación es un diamante (ver figura 4.11) que es el plano en el cual la rotación toma su valor máximo y el campo es cero. Mientras que de la solución estática -sin rotación- se observó que las sombras eran similares a un chabacano (ver figura 4.1).

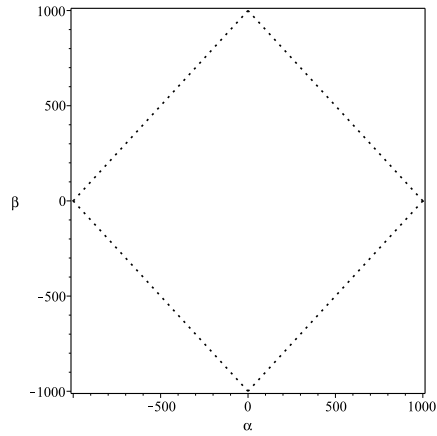


Fig. 4.11: Sombra del agujero de gusano cilíndrico con $\theta = \frac{\pi}{2}$.

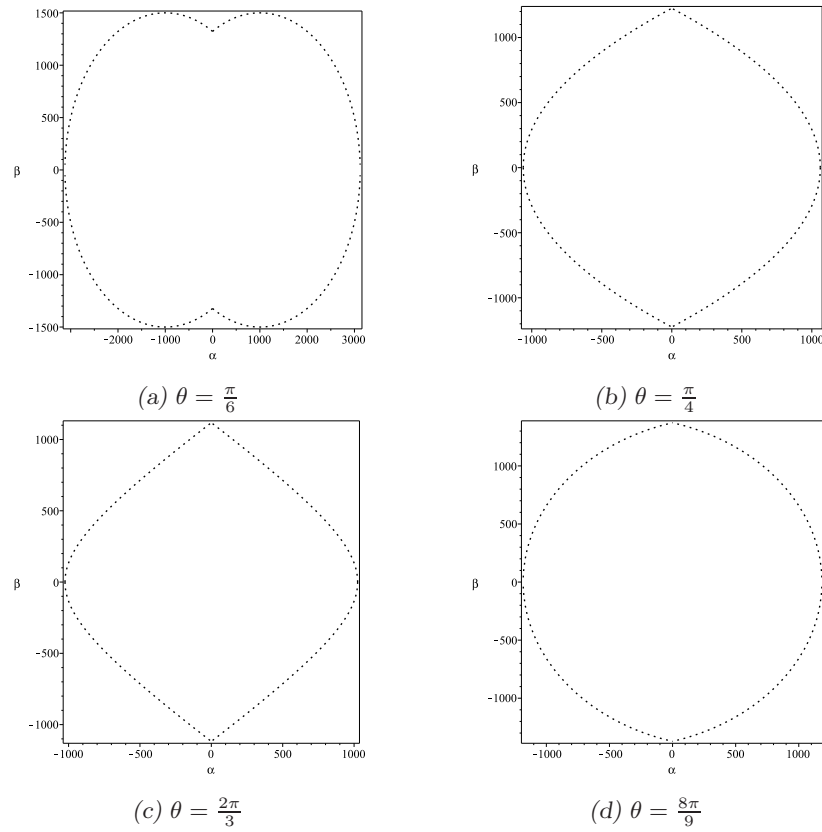


Fig. 4.12: Sombra del agujero de gusano cilíndrico, para $r_0 = 1000$, $k_1 = 0,1$, $a = 0,01$ y ángulos de inclinación θ .

5. AGUJERO DE GUSANO CILÍNDRICO SIN VIOLACIÓN DE CONDICIONES DE ENERGÍA

En [37] se demostró que la violación de la condición nula de la energía es una característica fundamental para la construcción de un agujero de gusano transitado, asumiendo que la garganta es una superficie compacta 2-dimensional con área mínima [54]. Sin embargo, existe la posibilidad de evitar la violación de la condición nula de la energía si se considera al agujero de gusano ya no como un objeto compacto -similar a una estrella- sino como un objeto más parecido a una cuerda cósmica que a un hoyo negro [26, 63, 57]. Es decir, se deja atrás la simetría esférica y para dar paso a estructuras con simetría axial simétrica: agujeros de gusano cilíndricos.

En lo que resta, se presenta una solución que representa un agujero de gusano cilíndrico que satisface la condición de energía nula; que es una solución exacta a las ecuaciones de Einstein-Maxwell acopladas a un campo escalar no masivo [29].

5.1. Métrica

Comenzando con el lagrangiano y considerando que el campo escalar es no-masivo es posible usar técnicas estándar para encontrar un espacio-tiempo que corresponda a una solución estándar para esta fuente.

$$L = -R + 2\varepsilon(\nabla\Phi)^2 + e^{-2\alpha\Phi}F^2 + V(\Phi) \quad (5.1)$$

donde R es el escalar de Ricci, $F_{\mu\nu}$ es el tensor de Faraday, Φ es el campo de una partícula con espín cero y $V(\Phi)$ es el potencial del campo escalar. Cuando $\varepsilon = +1$ el campo escalar corresponde a un campo escalar dilatónico, mientras que para un campo escalar *ghost* $\varepsilon = -1$. A primera aproximación se desprecia la masa del campo escalar, $V = 0$, con esta consideración es posible resolver exactamente las ecuaciones de Einstein [22].

Las ecuaciones de Einstein-Maxwell-Dilaton que se obtienen del Lagrangiano (5.1) son

$$R_{\mu\nu} = 2\varepsilon\Phi_{,\mu}\Phi_{,\nu} + 2e^{-2\alpha\Phi}\left(F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\delta\gamma}F^{\delta\gamma}\right) \quad (5.2)$$

La solución que se obtiene es un agujero de gusano con rotación que es asintóticamente plano y que además está magnetizado.

El campo escalar Φ está dado por

$$\Phi = \frac{a y}{\alpha L^2 (x^2 + y^2)} . \quad (5.3)$$

y el vector potencial es

$$A_\mu = -\frac{e^{\alpha\Phi}}{2} \left[1 - e^{-\alpha\Phi}, 0, 0, \frac{a x (1 - y^2)}{L(x^2 + y^2)} \right], \quad (5.4)$$

en coordenadas esferiodales oblatas, con $x \in \mathcal{R}$ y $|y| \leq 1$, el espacio-tiempo está definido como

$$ds^2 = L^2 \left[(x^2 + y^2) e^K \left(\frac{dx^2}{x^2 + 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + (x^2 + 1)(1 - y^2) d\varphi^2 \right] - \left(dt + \frac{a x (1 - y^2)}{L (x^2 + y^2)} d\varphi \right)^2, \quad (5.5)$$

donde a es un parámetro relacionado con la carga escalar.

El campo escalar (5.3) y el 4-vector electromagnético (5.4) son soluciones de las ecuaciones de Einstein (5.2) si se tiene que

$$K = \frac{k}{L^4} \frac{(1 - y^2)(8x^2 y^2 (x^2 + 1) - (1 - y^2)(x^2 + y^2)^2)}{(x^2 + y^2)^4} \quad (5.6)$$

con tres constantes libres α , a k tales que

$$\alpha^2(a^2 - 8k) - 4\epsilon a^2 = 0. \quad (5.7)$$

Los parámetros $L > 0$, a tiene unidades de distancia y momento angular; y α es la constante de acoplamiento del campo escalar con el campo electromagnético.

Como ya de menciono antes, esta solución representa un agujero de gusano magnetizado rotatorio, sin potencial gravitacional. El espacio-tiempo se curva debido a la presencia de la carga magnética -de un dipolo magnético- y el campo escalar.

Cuando se fija la constante de acoplamiento $\alpha^2 = 1$ con un campo escalar dilatónico, es decir se tiene una teoría de cuerdas poco energética de (5.7) se obtiene que $k = -\frac{3a^2}{8}$. Y para un campo escalar *ghost* con la misma constante de acoplamiento $k = \frac{5a^2}{8}$. Si $\alpha^2 = 3$, para un dilatón, -se tiene que un teoría de Kaluza-Klein 5-dimensional- se tiene $k = -\frac{a^2}{24}$ y para un *ghost* $k = \frac{7a^2}{24}$. Finalmente si $k = 0$ entonces $\alpha^2 = 4$, en este caso únicamente es posible tener $\varepsilon = 1$, es decir un campo dilatónico.

Todos los invariantes de la métrica (5.5), son de la forma

$$\text{Invariants} = \frac{F(x, y)}{(x^2 + y^2)^\beta} e^{-K} \tag{5.8}$$

donde β es un entero positivo y $F(x, y)$ es un polinomio en x y y de grado menor que $(x^2 + y^2)^\beta$ y e^{-K} . De (5.8) se observa que como en los casos anteriores el espacio-tiempo (5.5) tiene una singularidad desnuda de anillo anisotrópica en $x = y = 0$ y cuyo radio es L .

Por otro lado (5.5) es asintóticamente plana, ya que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^K \rightarrow 1 \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a x (1 - y^2)}{L (x^2 + y^2)} \rightarrow 0$$

5.2. Geometría

La garganta del agujero de gusano yace en el disco $x = 0$ que se encuentra acotado por la singularidad de anillo $y = 0$. La garganta conecta dos espacio planos 3-dimensionales, uno para $x > 0$ y otro para $x < 0$, este tipo de configuraciones es llamada agujero de gusano de anillo [30] por la presencia de la singularidad de anillo. Como en el disco no se tienen discontinuidades en la curvatura extrínseca es posible cruzar la superficie $x = 0$, en otras palabras atravesar la garganta del agujero de gusano. Dejar un universo y entrar en otro diferente.

La diferencia entre un agujero de gusano cuya garganta es 2-dimensional y compacta, y el actual radica en el hecho de que la garganta para el primero es una esfera, al cual hay que atravesar para llegar al nuevo universo; además de que por la condición de ensanchamiento el agujero de gusano adquiere la forma usual. Mientras que en los agujero de gusano cilíndricos la garganta es sólo un plano que podemos visualizar como una membrana que separa los dos universos, y la estructura propia del agujero de gusano es una cuerda que puede tener longitud infinita o ser simplemente el contorno que delimita la membrana como en el caso de los agujero de gusano de anillo. En este último caso la

estructura que representa al agujero de gusano es únicamente la superficie $x = 0$.

En palabras más simples y aludiendo los viajes de Alicia al País de las Maravillas. Para su primer viaje, al entrar en la madriguera del conejo; Alicia estaría viajando por un agujero de gusano 2-dimensional compacto como la solución de Morris-Thorne. Mientras que para su segundo viaje al cruzar el espejo, Alicia hizo uso de un agujero de gusano de anillo, donde la única comunicación entre el mundo real y el mundo *a través del espejo* es la garganta del agujero de gusano de anillo; en el caso de Alicia, el espejo.

5.3. Condiciones de Energía

Como se ha mencionado, para un agujero de gusano cuya garganta se pide sea una superficie 2-dimensional compacta con área mínima regular objeto compacto 2-dimensional es necesario exigir la violación de la condición nula de la energía -en o cerca de la garganta- al imponer la condición de ensanchamiento para obtener la forma usual de un agujero de gusano [37, 54].

A pesar que el agujero de gusano que se estudia en el presente capítulo es cilíndrico con una r -garganta, es necesario analizar las condiciones de energía ya que la condición para la existencia de una r -garganta no garantiza la validez de la condición nula de la energía.

Tomando una base ortonormal [58] de la forma

$$\begin{aligned}
 e_{\hat{t}} &= e_t, \\
 e_{\hat{x}} &= \sqrt{\frac{x^2 + 1}{L^2(x^2 + y^2)e^K}} e_x, \\
 e_{\hat{y}} &= \frac{e_y}{\sqrt{L^2(x^2 + y^2)e^K}}, \\
 e_{\hat{\phi}} &= \frac{e_\phi - \omega e_t}{\sqrt{m^2(x^2 + 1)(1 - y^2)}}, \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

donde $\omega = (ax(1 - y^2))/(L(x^2 + y^2))$, y $e_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ es el vector canónico de la base.

Analizando primero el caso más sencillo; cuando $e^K = 1$ con constante de acoplamiento $\alpha = 2$ y tomando un vector nulo en la dirección x , se tiene $\mu = e_{\hat{t}} \pm e_{\hat{x}}$, lo que implica $T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\mu^{\hat{\alpha}}\mu^{\hat{\beta}} = T_{\hat{t}\hat{t}} + T_{\hat{x}\hat{x}} = \frac{1}{2}(R_{\hat{t}\hat{t}} + R_{\hat{x}\hat{x}})$.

De lo anterior resulta

$$\rho - \tau = T_{\hat{t}\hat{t}} + T_{\hat{x}\hat{x}} = \frac{a^2}{2m^6} \frac{x^4 + x^4y^2 + 2x^2y^4 + y^4(1-y^2)}{(x^2 + y^2)^5} > 0, \quad (5.10)$$

donde $\rho = T_{\hat{t}\hat{t}}$ es la densidad total de masa-energía y $-\tau = T_{\hat{x}\hat{x}}$ es la tensión por unidad de área medida por observadores estáticos en la dirección x .

Como se esperaba, para $\varepsilon = 1$ la condición nula de la energía se satisface, ya que $\rho > \tau$ en todas partes.

En tanto que la densidad de energía ρ es

$$\rho = \frac{a^2}{4L^6} \frac{x^2(1+3y^2) + y^2(1-y^2)}{(x^2 + y^2)^5} > 0, \quad (5.11)$$

Así, para $\alpha = 2$ tanto la condición nula de la energía como la condición débil de la energía se cumplen. No es necesario usar materia exótica para mantener la garganta del agujero de gusano abierta; la singularidad de anillo es la responsable de la existencia del agujero de gusano [26, 57]. La necesidad de materia exótica para construir el agujero de gusano ha sido sustituida por la presencia de la singularidad de anillo en el espacio-tiempo.

En el caso general, para un campo escalar dilatónico con $\varepsilon = 1$ constante de acoplamiento α arbitraria, utilizando el mismo vector nulo que en el caso anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \rho - \tau &= q^2 \frac{e^K}{2L^6(x^2 + y^2)^5} (x^4 + x^4y^2 + 2x^2y^4 + y^4(1-y^2)) \\ &\quad - 2 \frac{\alpha^2 - 4}{\alpha^2} x^2y^2(x^2 + 1) > 0, \end{aligned} \quad (5.12)$$

De donde podemos observar que nuevamente, para un observador que viaja a lo largo de la dirección x la condición nula de la energía se respeta.

Para el campo escalar *ghost*, es decir $\varepsilon = -1$,

$$\rho - \tau = q^2 \frac{e^K}{2L^6(x^2 + y^2)^5} (\alpha^2(1-y^2)(x^2 - y^2)^2 - 8x^2y^2(x^2 + 1)), \quad (5.13)$$

van a existir siempre regiones donde la condición nula de la energía sea transgredida, por ejemplo tomando $y = 1$.

5.4. Condiciones de Transitabilidad

Por la presencia de la singularidad de anillo en $x = y = 0$, es posible que un observador cruzando la garganta experimente fuerzas gravitacionales muy fuertes que lo destrocen antes de cruzar la garganta del agujero de gusano. Por tal motivo se analizan las fuerzas de marea cerca de la garganta, para garantizar la seguridad del viajero; es decir si el agujero de gusano es o no transitable.

Siguiendo el análisis de [11, 12, 58]. Se toma el marco de referencia del viajero, que se considera se mueve en la dirección x , en analogía con (4.74)

$$\begin{aligned} e_{\hat{0}} &= \gamma e_{\hat{t}} \mp \gamma(v/c)e_{\hat{x}}, \\ e_{\hat{1}} &= \mp \gamma e_{\hat{x}} + \gamma(v/c)e_{\hat{t}}, \\ e_{\hat{2}} &= e_{\hat{y}}, \\ e_{\hat{3}} &= e_{\hat{\phi}}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$.

En la dirección x , de manera similar a (4.75) se tiene

$$|R_{\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}}| \leq g_{\oplus}/c^2 \times 2m \approx 1/(10^5 km)^2, \quad (5.15)$$

De lo anterior, para (5.5) en caso más simple, es decir $\alpha = 2$, resulta

$$|R_{\hat{x}\hat{t}\hat{x}\hat{t}}| = \left| \frac{1}{4} \frac{a^2(1-y^2)(x^2-y^2)}{L^6(x^2+y^2)^5} \right|, \quad (5.16)$$

las constricciones restantes son $|R_{\hat{2}\hat{0}\hat{2}\hat{0}}| \leq (10^5 km)^{-2}$, y $|R_{\hat{3}\hat{0}\hat{3}\hat{0}}| \leq (10^5 km)^{-2}$, como en la sección 4.2.5. Para estas dos últimas restricciones se tiene

$$|R_{\hat{2}\hat{0}\hat{2}\hat{0}}| = \gamma^2 |R_{\hat{y}\hat{t}\hat{y}\hat{t}}| + \gamma^2 (v^2/c) |R_{\hat{y}\hat{x}\hat{y}\hat{x}}|. \quad (5.17)$$

De donde se obtiene

$$|R_{\hat{y}\hat{t}\hat{y}\hat{t}}| = \left| \frac{a^2 x^2 y^2 (x^2 + 1)}{L^6 (x^2 + y^2)^5} \right| \quad (5.18)$$

Finalmente en la última dirección, $|R_{\hat{3}\hat{0}\hat{3}\hat{0}}| = |R_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}}|$ la fuerza de marea es

$$|R_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}}| = \left| \frac{a^2 x^2 + 3x^2 y^2 + y^2(1-y^2)}{4 L^6 (x^2 + y^2)^4} \right|. \quad (5.19)$$

Si se obliga al viajero a acercarse a la garganta por la dirección $y = 1$, la magnitud de la fuerza de marea en la dirección x es cero, y las magnitudes restantes tienden a cero mientras el viajero se aproxima a la garganta, es decir a $x = 0$, que es el plano donde se encuentra localizada la unión entre el universo superior y el universo inferior. Por lo tanto, es posible cruzar la garganta del agujero de gusano sin sentir la presencia de fuerzas gravitacionales al aproximarse por el plano $y = 1$. Lo anterior para $\alpha = 2$.

Las fuerzas de marea para los dos tipos de campos escalares: dilatónico y *ghost* están dados por

$$|R_{\hat{x}\hat{t}\hat{x}\hat{t}}| = \frac{e^{-K}}{4} \frac{a^2(1-y^2)(x^2-y^2)^2}{L^6(x^2+y^2)^5}, \quad (5.20)$$

$$|R_{\hat{y}\hat{t}\hat{y}\hat{t}}| = e^{-K} \frac{a^2x^2y^2(x^2+1)}{L^6(x^2+y^2)^5}, \quad (5.21)$$

$$|R_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}}| = \frac{e^{-K}}{4} \frac{a^2(x^2+3x^2y^2+y^2(1-y^2))}{L^6(x^2+y^2)^4}. \quad (5.22)$$

De nuevo, pidiendo que el viajero interestelar se acerque a la garganta por $y = 1$, en la dirección x no sentirá ninguna fuerza ya que (5.20) se anula en dicho plano. En tanto que las fuerzas restantes se van aproximando a cero mientras el viajero se acerca a la garganta ($x = 0$). Con esto la conclusión para el caso $\alpha = 2$ sigue siendo válida. Es posible cruzar la garganta sin sentir la presencia de la singularidad de anillo siempre que se viaje sobre el plano $y = 1$.

5.5. Análisis Geodésico

En lo que sigue, se estudiarán las trayectorias geodésicas para (5.5). Se comenzará con aquellas confinadas al plano $y = 0$.

Sea λ el parámetro afín y $u^\mu = (\dot{t}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\phi})$ el vector velocidad¹ de un observador, tal que la ecuación $u^\mu u_\mu = -\kappa$ se cumple. Además, se sabe que $\kappa = 0$ para geodésicas nulas y $\kappa = -1$ para geodésicas temporales. De lo anterior se sigue

¹ Con $\dot{t} = \frac{dt}{d\lambda}$, etc.

$$\begin{aligned} \kappa = & - \left(\dot{t} + \frac{a x(1-y^2)}{L(x^2+y^2)} \dot{\phi} \right)^2 \\ & + L^2 \left[(x^2+y^2)e^K \left(\frac{\dot{x}^2}{x^2+1} + \frac{\dot{y}^2}{(1-y^2)} \right) + (x^2+1)(1-y^2)\dot{\phi}^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Pidiendo que las trayectorias se mantengan en el plano $y = 0$, la ecuación (5.23) se reduce a

$$L^2 x^4 e^{K_0} \dot{x}^2 = L^2 x^2 (x^2 + 1) (\mathcal{E}^2 + \kappa) - (\mathcal{L}Lx + a\mathcal{E})^2 = \hat{X}(x) \quad (5.24)$$

donde $K_0 = -k/(m^4 x^4)$. Las constantes de movimiento están dadas por

$$\mathcal{E} = (\dot{t} + \omega \dot{\phi}), \quad (5.25)$$

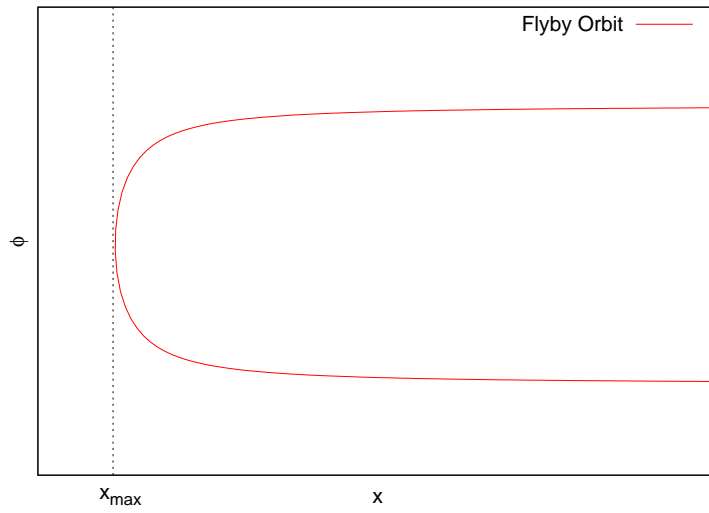
$$\mathcal{L} + \omega \mathcal{E} = L^2 (x^2 + 1) (1 - y^2) \dot{\phi}. \quad (5.26)$$

De 5.23 se observa que la función $\hat{X}(x) \geq 0$ domina el comportamiento de las geodésicas en el plano $y = 0$ [72].

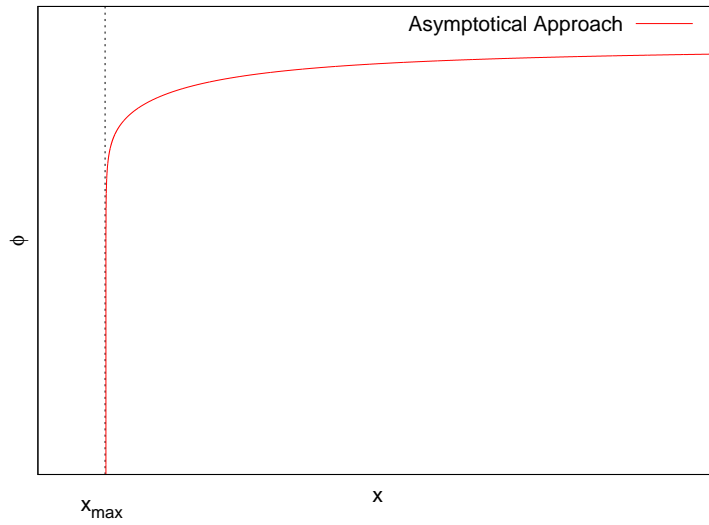
También, por la forma de $X(x)$ que es un polinomio de grado 4 en x sabemos que la ecuación (5.24) admite al menos una raíz real positiva mayor a cero, $x_+ > 0$. De [73, 72] se tiene que dos tipos de movimientos son posibles:

1. Si el polinomio de la mano derecha en (5.24) tiene una raíz positiva máxima $x_{max} > 0$ y además $(\partial \hat{X} / \partial x)(x_{max}) > 0$, entonces la partícula se va al infinito después de acercarse al punto x_{max} . (Fig. 5.1a)
2. Si $\hat{X}(x)$ tiene una raíz x_{max} tal que $\hat{X}(x_{max}) = (\partial \hat{X} / \partial x)(x_{max}) = 0$, implica que le toma a la partícula un tiempo propio infinito el acercarse a x_{max} . (Fig. 5.1b)

Como $\hat{X}(x=0) = -a^2 \mathcal{E}^2 < 0$, ninguna geodésica puede cruzar la garganta; más aún ninguna geodésica puede alcanzar la singularidad desnuda desde el plano $y = 0$. Por otro lado, si la partícula de prueba comienza su movimiento en un lado de la garganta, supóngase el universo superior, permanecerá en el mismo universo todo el tiempo (ésto es, si se mantiene siempre en $y = 0$). El disco no se puede cruzar en el plano $y = 0$ por la presencia del anillo singular que lo rodea.



(a) *Órbita de Reconocimiento*. La geodésica es desviada después de alcanzar su máximo acercamiento x_{max} .



(b) *Órbita Crítica*. La geodésica se aproxima asintóticamente a x_{max} .

Fig. 5.1: Tipos de geodésicas en el plano $y = 0$. La coordenada ϕ está graficada en términos de x .

Se puede observar, también que en el plano $x = 0$ con $\dot{\phi} = 0$, el movimiento geodésico está gobernado por

$$\dot{y}^2 = \frac{(\kappa + \mathcal{E}^2)(1 - y^2)}{L^2 y^2} e^{K^0} \quad (5.27)$$

donde ahora se tiene $K^0 = \frac{-k(1-y^2)^2}{L^4 y^4}$. De (5.27) y $\dot{t} = \mathcal{E}$, se llega a

$$dy = \frac{\sqrt{\kappa + \mathcal{E}^2}}{\mathcal{E}L} \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y} e^{-K^0/2} dt \quad (5.28)$$

mientras $y \rightarrow 0$ implica

$$\frac{dy}{dt} \rightarrow 0 \text{ if } k < 0, \quad \frac{dy}{dt} \rightarrow \infty \text{ if } k \geq 0 \quad (5.29)$$

Para el campo escalar dilatónico con $\alpha^2 \geq 4$ y para el campo escalar *ghost* con $\alpha > 0$ la velocidad tiende a infinito cerca de la singularidad. Por otra parte, para el campo dilatónico con $\alpha^2 < 4$, la partícula de prueba se va deteniendo mientras que $y \rightarrow 0$. Para $k \geq 0$, un rayo de luz en $x = 0$ rotará rápidamente, incrementando su velocidad hasta que alcance $y = 0$. Si $k < 0$, es decir $\alpha = \sqrt{3}$, la velocidad del mismo rayo de luz irá disminuyendo mientras $y \rightarrow 0$ has detenerse eventualmente.

Tomando una aproximación es posible resolver el sistema para las trayectorias geodésicas. Se tomará un agujero de gusano rotando lentamente. A primer orden, se tiene que $a^2/L^4 \rightarrow 0$. Las fuerzas de marea (5.20)-(5.22), las condiciones de energía (5.10)-(5.11) y los invariantes de la métrica (5.5) tienden a cero excepto cerca de la singularidad, cuando la aproximación deja de ser válida.

En este límite es posible encontrar una cuarta cantidad conservada \mathcal{K} . Haciendo uso del formalismo de Hamílto-Jacobi se tiene que las ecuaciones geodésicas para x y y toman la forma

$$L^2 \Delta^2 \dot{x}^2 = X(x), \quad \Delta^2 \dot{y}^2 = Y(y), \quad (5.30)$$

con $\Delta = L^2(x^2 + y^2)$, $\Delta_x = L^2(x^2 + 1)$, y

$$X(x) = \Delta_x (L^2(\kappa + \mathcal{E}^2)x^2 - \mathcal{K}) - 2aL\mathcal{E}\mathcal{L}x + L^2\mathcal{L}^2, \quad (5.31)$$

$$Y(y) = (1 - y^2)(\mathcal{K} + (\kappa + \mathcal{E}^2)L^2 y^2) - \mathcal{L}^2. \quad (5.32)$$

Para ser capaces de cruzar la garganta del agujero de gusano es necesario que $X(x) > 0$ cuando $x = 0$, debido a término izquierdo de la primera ecuación en (5.30) ya que $X(x) > 0$. De (5.31), se tiene que

$$\mathcal{K} < \mathcal{L}^2, \quad (5.33)$$

obligando a la geodésica a permanecer en el plano $y = y_0$, con y_0 una constante no negativa, (5.32) debe de ser cero. Tales condiciones implican

$$\mathcal{K} < \mathcal{L}^2 < (\kappa + \mathcal{E}^2)L^2(1 - y_0^2) < (\kappa + \mathcal{E}^2)L^2. \quad (5.34)$$

Si $y_0 = 1$, entonces $\mathcal{L} = 0$ y de (5.34) se tiene $\mathcal{K} < 0$.

En general, para geodésica con $y \neq y_0$ la condición (5.34) sigue siendo válida.

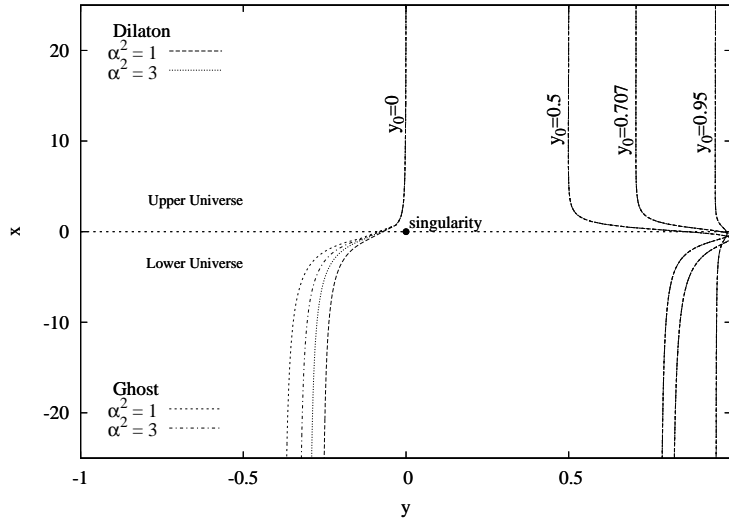


Fig. 5.2: Geodésicas cruzando la garganta del agujero de gusano localizada en $x = 0$. El radio de la garganta es $L = 10$ y se considera que el viajero inicia su trayectoria en $(y_0, x_0 = 25)$. Se tomaron los valores $\mathcal{E} = 10$, $\mathcal{L} = 5$ y $a = 0,1$, para diferentes valores de α .

Podemos concluir que a pesar de la singularidad, en el límite de un agujero de gusano con rotación lenta, las geodésicas en el plano $y = 1$ pueden cruzar de un lado al otro el disco, delimitado por la singularidad en el plano $y = 0$; es decir pueden viajar interestelarmente sin experimentar fuerzas de marea extremas. Es importante hacer notar que las geodésicas evitan la singularidad acercándose a la garganta por $y = 1$ (Fig. 5.2).

5.6. Sombra

Expresando las ecuaciones geodésicas para rotación lenta (5.31) y (5.32) en coordenadas de Boyer-Lindquist $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$ e introduciendo los parámetros de impacto se tiene

$$\begin{aligned}\Delta^2 \dot{r}^2 &= \mathcal{R}(r), \\ \Delta^2 \dot{\theta}^2 &= \Theta(\theta), \\ \Delta_1 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 &= \xi + \omega,\end{aligned}\tag{5.35}$$

con

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(r) &= r^4 + (L^2 - \eta)r^2 - 2a\xi r + L^2(\xi^2 - \eta), \\ \Theta(\theta) &= \eta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta} + L^2 \cos^2 \theta.\end{aligned}\tag{5.36}$$

Donde $\Delta = r^2 + L^2 \cos^2 \theta$ y $\Delta_1 = r^2 + L^2$ y $\omega = ar \sin^2 \theta / \Delta$.

De \mathcal{R} obtenemos los parámetros (1.89) de impacto para las órbitas inestables (1.88) en términos de la coordenada radial r y bajo a aproximación considerada

$$\begin{aligned}\eta &= 2r^2 + L^2 - \frac{a\xi}{r}, \\ \xi &= \frac{1}{2L^2 r} \left[a(r^2 - L^2) + 2L(r^2 + L^2)^{\frac{1}{2}} \right].\end{aligned}\tag{5.37}$$

De la definición para las coordenadas celestiales (1.90), usando (5.35) con (5.36) se llega a

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{\xi}{\sin \theta}, \\ \beta &= (\eta + L^2 \cos^2 \theta - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{5.38}$$

Graficando (α, β) , considerando que lo anterior es válido cuando $\mathcal{R}_{rr} \geq 0$ y $\Theta \geq 0$ se obtiene la silueta que vería un observador en infinito (Fig. 5.4).

Como el observador se encuentra en infinito y no podrá ver más allá de las órbitas inestables, las aproximaciones que se han tomado a lo largo del trabajo para el análisis de las sombras son válidas, ya que éstas dejan de funcionar

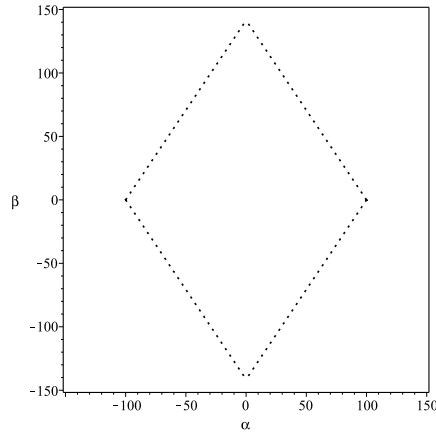


Fig. 5.3: Sombra del agujero de gusano cilíndrico con $\theta = \frac{\pi}{2}$.

únicamente cuando $r = 0$ y $\theta = \pi/2$. Mientras que las órbitas inestables se encuentren en $r \neq 0$ o el ángulo de inclinación sea diferente a $\pi/2$ las aproximaciones son útiles.

En la figura 5.3 se muestra la sombra² que proyecta la solución en el plano celestial si el ángulo de inclinación es $\pi/2$.

Para este agujero de gusano, podemos notar que las sombras resultan más achatadas que las sombras para Morris-Thorne (Fig. 1.2), pero sin llegar a deformarse como en el caso del agujero de gusano de tipo Kerr (Fig. 4.1), excepto en el caso que el ángulo de inclinación sea $\pi/2$.

² Debido a la magnitud de los valores tomados, la resolución de la gráfica no es buena.

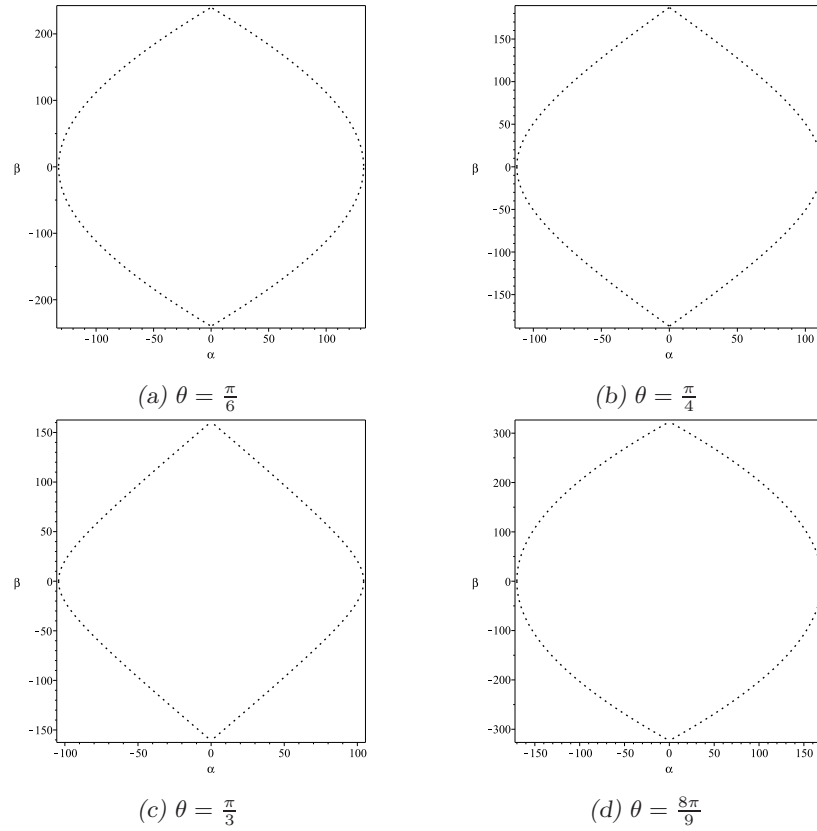


Fig. 5.4: Sombra del agujero de gusano cilíndrico en la aproximación de rotación lenta para $L = 100$, $a = 0,1$ y diferentes ángulos de inclinación θ .

CONCLUSIONES

Se analizaron dos soluciones de tipo agujero de gusano. Para el agujero de gusano de tipo Kerr, se estudio primero su parte estática (4.1). De acuerdo con esta solución se vió que es posible proteger la singularidad al envolverla con la garganta del agujero de gusano. Lo cual indica una generalización de la Conjetura de la Censura Cósmica de Penrose: Puede darse el caso de que para una singularidad desnuda con una configuración más intrincada resulte más conveniente la formación de una garganta a su alrededor para protegerla que la existencia de un horizonte de eventos. Se concluyo lo anterior por medio de un análisis de las trayectorias geodésicas del cual se obtuvo que ninguna de las trayectorias podía acercarse lo suficiente a la singularidad de anillo como para tocarla. Recordando que únicamente para el hemisferio sur se tiene la presencia de la singularidad, ya que ésta es direccional; es decir, depende del camino de aproximación. Y que por el hemisferio norte no se tiene la presencia de una singularidad desnuda sino un horizonte de eventos ya que en la esfera $l = 0$ sobre el hemisferio norte se tiene $g_{tt} \rightarrow 0$.

Para el agujero de gusano de tipo Kerr estacionario (4.34) se observo que la geometría del espacio-tiempo admite un diagrama de encaje por medio del cual es posible definir su garganta y que satisface la condición de ensanchamiento como se puede observar en la figura 4.5. Al igual que para la solución sin rotación, el elemento de línea (4.34) contiene una singularidad de anillo similar a la solución de Kerr, todos sus invariantes son regulares en todas partes exceptuando el anillo de radio $l = 0$ sobre el plano ecuatorial. La garganta del agujero de gusano es la esfera de radio $l = 0$, la cual es visible para $\theta \neq \pi/2$; ya que en el plano ecuatorial la presencia de la singularidad no permite que la garganta sea visible. Se observó que las geodésicas polares nulas, las cuales se redujeron a cuadraturas, son regulares y que un observador puede cruzar la garganta si su trayectoria se mantiene sigue estas geodésicas y su energía es mayor que $1/2f$ para cualesquiera que sean los valores de los parámetros libres. Es en estas trayectorias donde las fuerzas gravitacionales son lo suficientemente pequeñas para poder realizar el viaje de manera segura, el agujero de gusano es transitables. Del análisis geodésico se obtuvo que en el plano ecuatorial la repulsión es infinita y no es posible alcanzar la singularidad, ya que incluso la luz es repelda por el agujero de gusano. Así, la esfera $l = 0$ tiene el efecto contrario al del horizonte de eventos en un hoyo negro, un observador puede alcanzar dicha esfera y viajar por la garganta pero esta esfera no permite que ningún viajero toque la singularidad.

Para (5.5) se observó que, como las anteriores, ésta contiene una singularidad de anillo en $x = y = 0$ la cual tiene un radio L . En este caso y para la elección de coordenadas, el disco $x = 0$ se puede definir como una r-garganta rodeada por la singularidad de anillo en $y = 0$. La presencia de la singularidad hace posible que el espacio-tiempo cumpla con las condiciones de energía débil y nula para $\varepsilon = 1$. De acuerdo con el teorema de Hochberg-Visser y más recientemente de los resultados de Bronnikov se sabe que si un espacio-tiempo regular describe un agujero de gusano éste viola la condición nula de la energía. A pesar de la singularidad, en el límite de rotación lenta, las geodésicas en el plano $y = 1$ pueden cruzar, de ida y vuelta, el disco $y = 0$ que representa la garganta del agujero de gusano y viajar através éste a otro universo asintóticamente plano sin experimentar fuerzas gravitacionales mortales. De manera análoga a la primera solución estudiada, las geodesicas evitan tocar la singularidad al acercarse a la garganta por $y = 0$.

Finalmente, se presentaron las sombras para los agujero de gusano de tipo Kerr y el agujero de gusano cilíndrico, como se muestran en las figuras 4.1-4.12 y 5.4 respectivamente. Para el agujero de gusano de tipo Kerr, se puede ver que su sombra se deforma considerablemente cuando el ángulo de inclinación es $\pi/2$, con lo cual resulta ser fácil de diferenciar con respecto a otros tipos de agujeros de gusano y hoyos negros. Para el agujero de gusano cilíndrico en la aproximación utilizada sólo se distingue un achatamiento de las sombras, salvo en el plano equatorial, cuando su sombra simula una rombo. Debido a las aproximaciones y los valores tomados, se espera que la sombra para el agujero de gusano (estático y estacionario) no presente picos.

Bibliografia

- [1] Thomas Müller. Exact geometric optics in a morris-thorne wormhole spacetime. *Phys. Rev. D*, 77:044043, Feb 2008.
- [2] Petya G. Nedkova, Vassil K. Tinchev, and Stoytcho S. Yazadjiev. Shadow of a rotating traversable wormhole. *Phys. Rev.*, D88(12):124019, 2013.
- [3] L. Flamm. Comments on Einstein's Theory of Gravity. *Physikalische Zeitschrift*, 17, 1916.
- [4] A. Einstein and N. Rosen. The particle problem in the general theory of relativity. *Phys. Rev.*, 48:73–77, Jul 1935.
- [5] Charles W Misner and John A Wheeler. Classical physics as geometry. *Annals of Physics*, 2(6):525 – 603, 1957.
- [6] John Archibald Wheeler. Geons. *Phys. Rev.*, 97:511–536, Jan 1955.
- [7] H. Korte R. A. Coleman. *Hermann Weyl's Raum - Zeit - Materie and a General Introduction to His Scientific Work*. 1985.
- [8] K. A. Bronnikov. Scalar-tensor theory and scalar charge. *Acta Phys. Polon.*, B4:251–266, 1973.
- [9] H. G. Ellis. Ether flow through a drainhole - a particle model in general relativity. *J. Math. Phys.*, 14:104–118, 1973.
- [10] T. Kodama. General Relativistic Nonlinear Field: A Kink Solution in a Generalized Geometry. *Phys. Rev.*, D18:3529–3534, 1978.
- [11] M.S. Morris and K.S. Thorne. Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *Am.J.Phys.*, 56:395–412, 1988.
- [12] E. Teo. Rotating traversable wormholes. *Phys. Rev.*, D58:024014, 1998.
- [13] P. K. F. Kuhfittig. Axially symmetric rotating traversable wormholes. *Phys. Rev.*, D67:064015, 2003.
- [14] Galaxia Miranda, Tonatiuh Matos, and Nadiezhda Montelongo Garcia. Kerr-Like Phantom Wormhole. *Gen. Rel. Grav.*, 46:1613, 2014.

-
- [15] Burkhard Kleihaus and Jutta Kunz. Rotating Ellis Wormholes in Four Dimensions. *Phys. Rev.*, D90:121503, 2014.
- [16] Varun Sahni, Arman Shafieloo, and Alexei A. Starobinsky. Two new diagnostics of dark energy. *Phys. Rev.*, D78:103502, 2008.
- [17] Mauricio Cataldo and Paola Meza. Phantom evolving wormholes with big rip singularities. *Phys. Rev.*, D87(6):064012, 2013.
- [18] Francisco S. N. Lobo. Phantom energy traversable wormholes. *Phys. Rev.*, D71:084011, 2005.
- [19] Y. Heydarzade, N. Riazi, and H. Moradpour. Phantom Wormhole Solutions in a Generic Cosmological Constant Background. 2014.
- [20] Francisco S. N. Lobo, Foad Parsaei, and Nematollah Riazi. New asymptotically flat phantom wormhole solutions. *Phys. Rev.*, D87(8):084030, 2013.
- [21] Tonatiuh Matos and Dario Nunez. Rotating scalar field wormhole. *Class. Quant. Grav.*, 23:4485–4496, 2006.
- [22] T. Matos. Class of Einstein-Maxwell Phantom Fields: Rotating and Magnetised Wormholes. *Gen.Rel.Grav.*, 42:1969–1990, 2010.
- [23] Vladimir Dzhunushaliev and Vladimir Folomeev. Creation/annihilation of wormholes supported by the Sine-Gordon phantom (ghost) field. *Gen. Rel. Grav.*, 42:1889–1896, 2010.
- [24] Kirill A. Bronnikov and Sergey V. Sushkov. Trapped ghosts: a new class of wormholes. *Class. Quant. Grav.*, 27:095022, 2010.
- [25] Tonatiuh Matos, L. Arturo Urena-Lopez, and Galaxia Miranda. Wormhole Cosmic Censorship. 2012.
- [26] K. A. Bronnikov and M. V. Skvortsova. Cylindrically and axially symmetric wormholes. Throats in vacuum? *Grav. Cosmol.*, 20:171–175, 2014.
- [27] Mohammad Reza Mehdizadeh, Mahdi Kord Zangeneh, and Francisco S. N. Lobo. Einstein-Gauss-Bonnet traversable wormholes satisfying the weak energy condition. *Phys. Rev.*, D91(8):084004, 2015.
- [28] Mahdi Kord Zangeneh, Francisco S. N. Lobo, and Nematollah Riazi. Higher-dimensional evolving wormholes satisfying the null energy condition. *Phys. Rev.*, D90(2):024072, 2014.
- [29] Tonatiuh Matos and Galaxia Miranda. Exact Rotating Magnetic Traversable Wormholes satisfying the Energy Conditions. 2015.
- [30] Kirill A. Bronnikov and Julio C. Fabris. Ring wormholes in d-dimensional Einstein and dilaton gravity. 1996.

-
- [31] Gerard Clement. Spinning ring wormholes: A Classical model for elementary particles? In *Proceedings, 4th Alexander Friedmann International Seminar on Gravitation and Cosmology*, 1998.
- [32] R. Penrose. Gravitational collapse: The role of general relativity. *Riv.Nuovo Cim.*, 1:252–276, 1969.
- [33] M. Visser. *Lorentzian Wormholes*. 1996.
- [34] T. Okamoto. *Introduction to Wormholes*. 2011.
- [35] Thomas A. Roman. Some thoughts on energy conditions and wormholes. In *On recent developments in theoretical and experimental general relativity, gravitation, and relativistic field theories. Proceedings, 10th Marcel Grossmann Meeting, MG10, Rio de Janeiro, Brazil, July 20-26, 2003. Pt. A-C*, pages 1909–1922, 2004.
- [36] S. W. Hawking. *Nature of space and time*. 1994.
- [37] D. Hochberg and M. Visser. The Null energy condition in dynamic wormholes. *Phys. Rev. Lett.*, 81:746–749, 1998.
- [38] Yoshimune Tomikawa, Keisuke Izumi, and Tetsuya Shiromizu. New definition of a wormhole throat. *Phys. Rev.*, D91(10):104008, 2015.
- [39] Matt Visser and Carlos Barcelo. Energy conditions and their cosmological implications. In *Proceedings, 3rd International Conference on Particle Physics and the Early Universe (COSMO 1999)*, pages 98–112, 2000.
- [40] E. Curiel. *A Primer on Energy Conditions*. 2014.
- [41] W. Rindler. *Relativity -Special, General and Cosmology*. Oxford Univ. Press, New York, 2001.
- [42] D.F. Lawden. *Elliptic Functions and Applications*. Collaage Press Selected Monographies. Collaage Press, University of Beijing, 1998.
- [43] Igor Bray. Kerr black hole as a gravitational lens. *Phys. Rev. D*, 34:367–372, Jul 1986.
- [44] Naoki Tsukamoto, Zilong Li, and Cosimo Bambi. Constraining the spin and the deformation parameters from the black hole shadow. *JCAP*, 1406:043, 2014.
- [45] Volker Perlick. Gravitational Lensing from a Spacetime Perspective. *Submitted to: Living Rev. Rel.*, 2010.
- [46] Brandon Carter. Global structure of the Kerr family of gravitational fields. *Phys.Rev.*, 174:1559–1571, 1968.
- [47] B. Carter and J.B. Hartle. *Gravitation in Astrophysics*. 1987.

-
- [48] B. Carter. Killing horizons and orthogonally transitive groups in space-time. 10(1):70–81, January 1969.
- [49] A. Papapetrou. Champs gravitationnels stationnaires á symétrie axiale. *Annales de l'institut Henri Poincaré (A) Physique théorique*, 4(2):83–105, 1966.
- [50] R. K. Sachs and H. Wu. General relativity and cosmology. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(6):1101–1164, 11 1977.
- [51] James B Hartle and David H Sharp. Variational principle for the equilibrium of a relativistic, rotating star. *The Astrophysical Journal*, 147:317, 1967.
- [52] James B Hartle. Slowly rotating relativistic stars. i. equations of structure. *The Astrophysical Journal*, 150:1005, 1967.
- [53] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman and Company, 1973.
- [54] D. Hochberg and M. Visser. Geometric structure of the generic static traversable wormhole throat. *Phys. Rev.*, D56:4745–4755, 1997.
- [55] Francisco S. N. Lobo. Exotic solutions in General Relativity: Traversable wormholes and 'warp drive' spacetimes. 2007.
- [56] K. A. Bronnikov and S. G. Rubin. *Black Holes, Cosmology and Extra Dimensions*. 2012.
- [57] Gerard Clement. Wormhole cosmic strings. *Phys. Rev.*, D51:6803–6809, 1995.
- [58] Peter K. F. Kuhfittig. Cylindrically symmetric wormholes. *Phys. Rev.*, D71:104007, 2005.
- [59] K. A. Bronnikov and J. P. S. Lemos. Cylindrical wormholes. *Phys. Rev.*, D79:104019, 2009.
- [60] K. A. Bronnikov. *J. Phys. A*, 12, 1979.
- [61] V. G. Kretchen and D. V. Sadovnikov. *Grav. Cosmol.*, 13, 2007.
- [62] V. G. Krechet and D. V. Sadovnikov. Spin-spin interaction in general relativity and induced geometries with nontrivial topology. *Grav. Cosmol.*, 15:337–340, 2009.
- [63] Kirill A. Bronnikov, Vladimir G. Krechet, and José P. S. Lemos. Rotating cylindrical wormholes. *Phys. Rev.*, D87:084060, 2013.

-
- [64] K. A. Bronnikov and V. G. Krechet. Rotating cylindrical wormholes and energy conditions. In *9th Alexander Friedmann International Seminar on Gravitation and Cosmology and 3rd Satellite Symposium on the Casimir Effect St. Petersburg, Russia, June 21-27, 2015*, 2015.
- [65] D. Zipoy. Topology of some spheroidal metrics. *J. Math. Phys.*, 7(1137), 1966.
- [66] B. H. Voorhees. Static axially symmetric gravitational fields. *Phys. Rev. D*, 2:2119–2122, Nov 1970.
- [67] Hans Stephani, D. Kramer, Malcolm A.H. MacCallum, Cornelius Hoenselaers, and Eduard Herlt. *Exact solutions of Einstein's field equations*. 2003.
- [68] K.S. Virbhadra. Directional naked singularity in general relativity. 1996.
- [69] D.K. Datta and J.R. Rao. Singularities in static axially symmetric coupled fields. *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 43(2):141–145, 1977.
- [70] Shrirang S. Deshingkar. On physical insignificance of null naked singularities. 2010.
- [71] Robert M. Wald. *General Relativity*. 1984.
- [72] Barrett O'Neil. *The geometry of Kerr Black Holes*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 1995.
- [73] A. F. Zakharov. Types of unbound geodesics in the Kerr metric. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 91:3–6, July 1986.