Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas

Tesis de Licenciatura

Mariana Carmona Cruz

Haces fibrados para la teoría de Kaluza-Klein

Name of the department or institute

Supervisor de la tesis: Dr. Tonatiuh Matos Chassin
Especialidad: Cosmología

México 2017

Agradezco a mis papás por toda su dedicación y apoyo a lo largo de mi vida.

Índice general

Resumen

El objetivo de este trabajo es obtener una teoría multidimensional basada en haces fibrados. Para lograr eso usamos el hecho de que nuestro haz fibrado puede descomponerse en un espacio vertical y un espacio horizontal, esto con el fin de que al proyectar los vectores del espacio tangente mediante la trivialización se pueda obtener una base para la métrica en la cual se encuentran separadas las interacciones de la naturaleza, cada una representada por un grupo.

Una vez que obtuvimos lo anterior, estudiamos caso particular de gravitación y electromagnetismo (teoría de Kaluza-Klein) que representado por el grupo $U(1)$. De esta teoría se desprende naturalmente el tensor de Faraday y la relación de norma para el cuadripotencial electromagnético. También llegamos a las ecuaciones de campo, una para el campo escalar, otra para gravitación y una para electromagnetismo.

Introducción

En física, la teoría de Kaluza-Klein es una teoría de campo que unifica gravitación y electromagnetismo, está construida alrededor de la idea de una quinta dimensión más allá de las cuatro dimensiones que se tienen para el espacio-tiempo, mediante la geometría Riemanniana 5-dimensional.

En 1915, Albert Einstein publicó un artículo en el que describía la teoría de la relatividad general, en la cual el espacio y el tiempo se unen formando el espacio-tiempo, que posee cuatro dimensiones [1].

Posteriormente, Theodor Kaluza (físico matemático alemán) que tenía la hipótesis original de su teoría, envió sus resultados a Einstein en 1919, pero no fue hasta 1921 que los publicó. La teoría de Kaluza fue una extensión clásica de la relatividad general a cinco dimensiones. La métrica 5-dimensional tiene 15 componentes. Diez componentes se identifican con la métrica 4-dimensional, 4 componentes con el cuadripotencial electromagnético, y una componente con un campo escalar. Las ecuaciones de Einstein en 5 dimensiones dan las ecuaciones de campo de Einstein en 4 dimensiones, las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético y una ecuación para el campo escalar. Kaluza también introdujo una hipótesis conocida como la condición cilíndrica, que dice que ninguna de las componentes de la métrica en 5 dimensiones depende de la quinta dimensión. La física en 4 dimensiones parece manifestar la condición cilíndrica.

Kaluza también estableció el campo escalar como una constante, en cuyo caso se recupera las teorías de electromagnetismo y relatividad general estándar. Su teoría presentaba dos grandes defectos: Kaluza no podía explicar la naturaleza de esta quinta dimensión, es decir, la teoría poseía sentido matemático, pero no físico, y en su propuesta los cuerpos se comportaban siguiendo la mecánica clásica, ignorando los efectos de la mecánica cuántica.

En 1926, Oskar Klein (físico teórico sueco) [1] intentó solventar estos problemas, revisando las formulaciones, así que le dio a la teoría de Kaluza una interpretación cuántica, e introdujo la hipótesis que la quinta dimensión estaba enrollada y era microscópica, para explicar la condición cilíndrica. Así, la teoría inicial tiene coordenadas generales 5-dimensionales. Sin embargo, se asume que una de las dimensiones espaciales está compactada para tener la topología de un círculo S^1 de un radio muy pequeño. Entonces, hay una invariancia de la coordenada residual de 4 dimensiones, y una invariancia de norma Abeliana asociada con transformaciones de las coordenadas de la variedad compacta, S^1. Puesto de otra manera, la invariancia de la coordenada 5-dimensional es rota espontáneamente en el estado base. De esta forma, llegamos a una teoría ordinaria de gravedad en 4 dimensiones, junto con una teoría de un campo de norma Abeliano, con conexiones entre los parámetros de las dos teorías porque ambas se derivan de la misma teoría 5-dimensional de gravedad de Einstein.

Kaluza y Klein lograron unificar gravedad y electromagnetismo, pero la teoría tuvo algunos errores. Por ejemplo, la masa y carga del electrón que calcularon no correspondían con lo obtenido experimentalmente. Además, la teoría no contenía ninguna de las fuerzas nucleares porque no se conocían en el tiempo del desarrollo de la teoría.

A pesar de las inconsistencias de la teoría, no fue completamente abandonada. Muchas décadas los físicos estuvieron tratando de mejorar el concepto de Kaluza y Klein. [2] No fue si no hasta 1940 que la teoría clásica fue completada, y las ecuaciones de campo completas incluyendo el campo escalar fueron obtenidas por tres grupos de investigación independientes: Thiry, trabajando en Francia; Jordan, Ludwig y Müller en Alemania; y Scherrer trabajando solo en Suiza.

Sus generalizaciones de más dimensiones para incluir las interacciones fuertes y débiles se han convertido en un foco de atención para muchos físicos en los años pasados. Este resurgimiento de interés en la teoría de Kaluza-Klein se debe al trabajo en la teoría de cuerdas y a la utilidad de las dimensiones extras espaciales en la teoría de supergravedad. En estos contextos, ha sido posible considerar las dimensiones extras espaciales como un artefacto matemático. Sin embargo. algunos autores toman estas dimensiones como dimensiones físicas genuinas las cuales no observamos normalmente porque están compactadas a una escala muy pequeña. Por otra parte, las dimensiones temporales extras son indeseables porque habría líneas de tiempo cerradas que violarían causalidad.

Aunque el resurgimiento de la teoría de Kaluza-Klein ha recibido un ímpetu considerable de la posible relevancia de supergravedad, muchos teóricos piensan que dimensiones extras espaciales pueden ser un ingrediente en la unificación de todas las interacciones incluso si eventualmente se tuviera que renunciar a la teoría de supergravedad.

El objetivo del presente trabajo es iniciar un modelo matemático con el que se llegue a una teoría multidimensional que incluya todas las interacciones mediante el uso de condiciones topológicas, con el fin de aplicar al caso particular de gravitación con electromagnetismo (Kaluza-Klein).

El principio fundamental de la teoría general de la relatividad de Einstein es que las interacciones gravitacionales son producto de la geometría del espacio-tiempo. La materia le dicta al espacio-tiempo cómo curvarse, mientras que el espacio-tiempo determina la dinámica de la materia.

Veremos cómo geometrizar las teorías de norma y cómo al usar un espacio con más dimensiones de las cuatro conocidas es posible unificar todas las interacciones de la naturaleza. Aquí nos vamos a concentrar en las teorías geométricas de unificación.

El plan de la tesis se desarrolla de la siguiente manera: en el primer capítulo comenzamos con el concepto de variedades puesto que son la base de los haces fibrados, introducimos el espacio tangente, el espacio cotangente y algunas estructuras como la derivada exterior y la derivada covariante. Posteriormente, en el capítulo dos vemos un tipo especial de tensores que son los tensores $\binom{0}{2}$, estos tensores son muy importantes puesto que el tensor métrico es uno de este tipo, esto con el objetivo de llegar a la métrica de Friedmann-Robertson-Walker, la cual juega un papel muy importante en este trabajo porque formará parte de la métrica de Kaluza-Klein.

Con todo lo anterior como precedente, en el capítulo tres llegamos a los haces fibrados y en el capítulo 4 a los grupos de Lie. Estos dos capítulos tienen la estructura que será usada en el capítulo 5 para poder formar nuestro modelo matemático de teorías de unificación, en este capítulo además introducimos los potenciales y campos de Yang-Mills del cual el electromagnetismo es un caso particular.

En el capítulo 6 se integran todos los elementos vistos a lo largo del presente trabajo puesto que se encuentra una teoría de unificación para gravitación y electromagnetismo. El capítulo 5 nos aporta el modelo matemático para llegar a esta unificación que es finalmente la teoría de Kaluza-Klein pero obtenida desde los haces fibrados, también ocupamos la parte de electromagnetismo y la métrica de Friedmann-Robertson-Walker del capítulo 2.

De la aplicación de nuestro modelo matemático a este caso particular se desprende toda la teoría de electromagnetismo, es decir, obtuvimos el tensor de Faraday y la relación de norma para el cuadripotencial electromagnético. Además, llegamos a las ecuaciones de campo, una para el campo escalar, otra para el tensor de Faraday y la última que involucra el tensor de Einstein.

Capítulo 1

Variedades

Este capítulo sienta las bases del presente trabajo puesto que en él se darán las definiciones de una variedad, tensores covariantes y contravariantes, parte fundamental en el entendimiento de haces fibrados.

1.1. Variedades diferenciables

Una variedad es cualquier conjunto que pueda ser parametrizado continuamente, el número de parámetros independientes es la dimensión de la variedad, y los parámetros por sí mismos son las coordenadas de la variedad (para más detalles de esta sección ver [3] y [4]).

Matemáticamente, la asociación de puntos con los valores de sus parámetros puede ser pensado como un mapeo de puntos de una variedad a puntos de un espacio euclideano de la misma dimensión. Este es el significado del hecho que una variedad luzca localmente como un espacio euclideano. Formalmente una variedad se define como:

1.1.1 Definición. Una *variedad real de dimensión* n es un espacio topológico de Hausdorff (M^n, τ_{M^n}), tal que para todo elemento $p \in M^n$ existe una terna $c = (U_p, \psi, V)$ donde $U_p \in \tau_{M^n}$ es una vecindad abierta de p en M^n, $V \in \tau_{\mathbb{R}^n}$ y la función $\psi : U_p \to V$ es un homeomorfismo, ver figura 1.1.

Es decir, una variedad es un espacio topológico que es localmente homeomorfo a un abierto en $\mathbb{R}^n$.
Para trabajar con variedades, usaremos las siguientes definiciones:

1.1.2 Definición. Sea M^n una variedad.

- $c_\alpha = (U_\alpha, \psi_\alpha, V_\alpha)$ con $\bigcup\limits_{\alpha \in J} U_\alpha = M^n$, es llamado *carta* sobre M^n.
- (U_α, ψ_α) es el *sistema de coordenadas* sobre U_α.
- La función $r^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $r^i(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \lambda_i$ se llama la *i-ésima función coordenada* sobre $\mathbb{R}^n$.

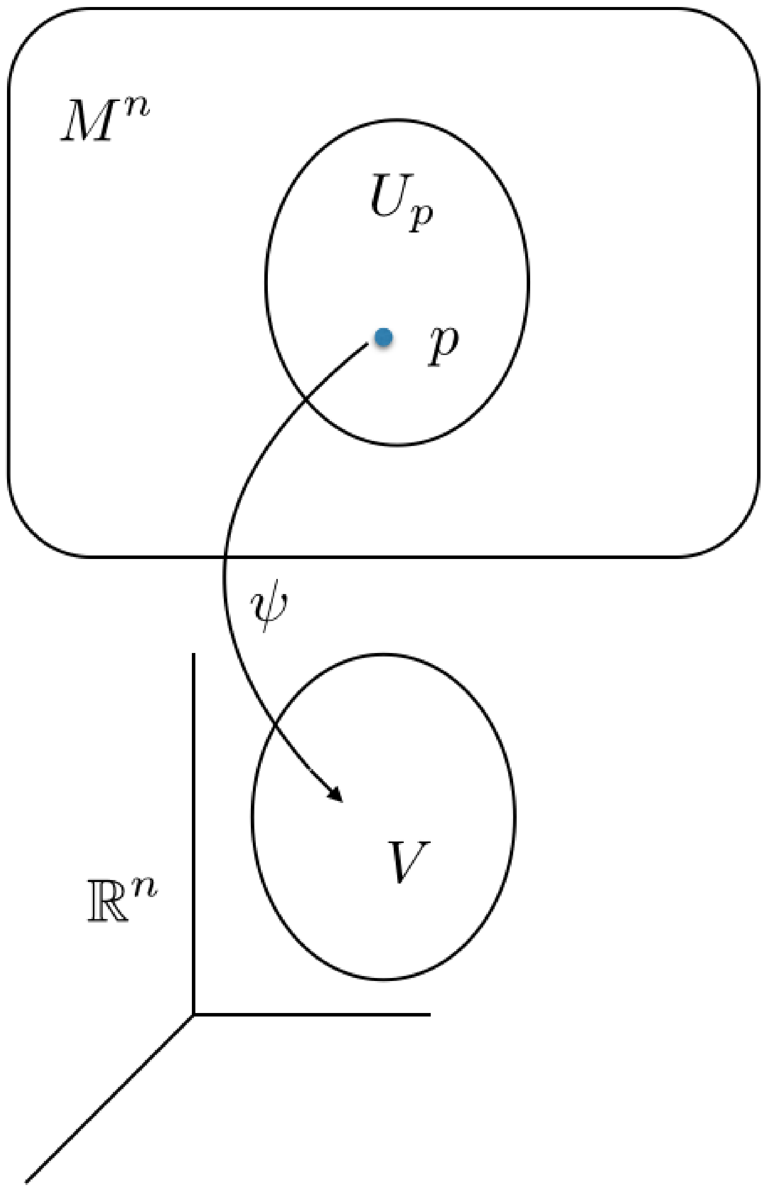

Figura 1.1: Matos, T. (2017). Una variedad real de dimensión n es un espacio topológico de Hausdorff localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Tomado de [3]

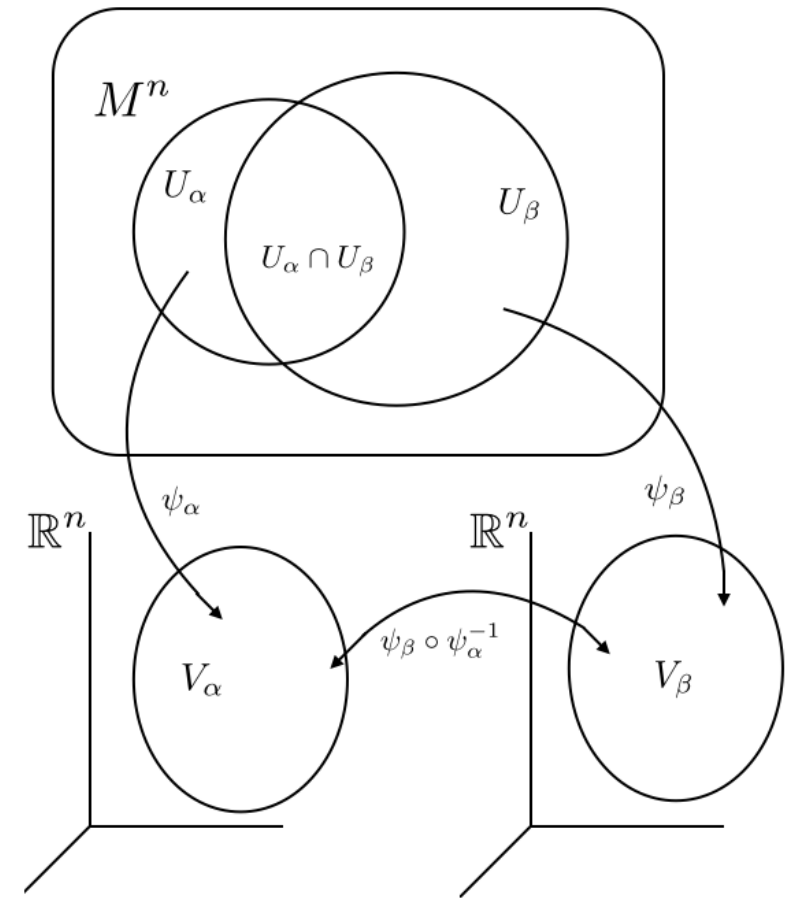

Figura 1.2: Matos, T. (2017). En esta figura se muestran dos cartas con sus dominios, sus sistemas coordenados, sus imágenes y sus funciones de transición. Tomado de [3]

- Sean $c_\alpha = (U_\alpha, \psi_\alpha, V_\alpha)$ y $c_\beta = (U_\beta, \psi_\beta, V_\beta)$ dos cartas. A las funciones $\psi_{\alpha\beta} := \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ se les llama *funciones de transición*, donde $\psi_{\alpha\beta}$ es un homeomorfismo, vea figura 1.2.

El definir una carta $(U_\alpha, \psi_\alpha, V_\alpha)$ equivale a etiquetar cada punto $p \in U_\alpha$ mediante n números reales, ya que $\psi_\alpha(p)$, al pertenecer a $\mathbb{R}^n$, consiste en n números reales cada uno de los cuales depende de p, es decir, $\psi_\alpha(p)$ es de la forma

$$\psi_\alpha(p) = (x^1(p), x^2(p), \ldots, x^n(p))$$

Esta última relación define las funciones $x^1, x^2, \ldots, x^n$, las cuales serán llamadas funciones coordenadas asociadas con la carta $(U_\alpha, \psi_\alpha, V_\alpha)$ o simplemente, coordenadas.

1.1.3 Definición. Una función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $F(q) = (f_1(q), f_2(q), \cdots, f_m(q))$ es diferenciable de clase C^k si las funciones $f_1, f_2, \cdots, f_m$ tienen k-ésimas derivadas parciales continuas.

1.1.4 Definición. Un *difeomorfismo* ψ es una aplicación biyectiva de una variedad diferenciable M^m sobre un variedad diferenciable N^n tal que ψ y ψ^{-1} son diferenciables; dos variedades diferenciables M^n y N^n son difeomorfas si existe un difeomorfismo ψ de M^m sobre N^n.

Las variedades diferenciables son espacios que son continuos y diferenciables, esto es, en la vecindad de cada punto de la variedad es posible definir un mapeo suave a un espacio euclideano que preserva las derivadas de funciones escalares en ese punto.Veamos las definiciones formales:

1.1.5 Definición. Se dice que dos cartas c_α y c_β están C^k *relacionadas* si $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ o si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ y las funciones de transición son diferenciables de clase C^k. Dos cartas c_α y c_β son *compatibles* si $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ o si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ y las funciones de transición son suaves, es decir, diferenciables de clase C^∞.

1.1.6 Definición. Un *n-subatlas* C^k sobre una variedad M^n es una colección de cartas $(U_\alpha, \psi_\alpha, V_\alpha)$ tal que para cualquier par de índices α y β, c_α y c_β están C^k relacionadas y $M^n = U_1 \cup U_2 \cup \cdots$. La colección de todas las cartas C^k relacionadas con las cartas de un n-subatlas C^k, sobre M^n, forman un atlas C^k sobre M^n.

1.1.7 Definición. Una *variedad* C^k de dimensión n es un conjunto M^n con un atlas C^k; si $k \geq 1$ se dice que M^n es una *variedad k-diferenciable.*

1.1.8 Definición. Una *variedad real diferenciable*, también llamada *variedad suave* de dimensión n es un par $(M^n, \mathcal{A})$, donde M^n es una variedad real de dimensión n y $\mathcal{A}$ es un atlas C^∞ sobre M^n, ver figura 1.3.

1.1.9 Definición. Sea M^n una variedad C^k. Una *curva diferenciable*, C, de clase C^r, en M es una aplicación diferenciable de clase C^r $(r \leq k)$ de un abierto de $\mathbb{R}$ en M^n; esto es, $C : I \longrightarrow M^n$ es una curva diferenciable de clase C^r en M^n si I es un abierto de $\mathbb{R}$ y $\phi \circ C$ es una aplicación diferenciable de clase C^r para toda carta (U, ϕ, V) del atlas de M^n.

También tenemos el caso para cuando la función va de la variedad a los reales.

1.1.10 Definición. Sea M^n una variedad diferenciable C^k. Una función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable de clase C^r si $f \circ \phi^{-1}$ es diferenciable de clase C^r para toda carta (U, ϕ, V) en el atlas de M.

El conjunto de todas las funciones diferenciales de M^n en $\mathbb{R}$ será denotado por $C^\infty(M^n)$.

Nota: En todo lo que sigue se supondrá que todos los objetos con que se trate (variedades, aplicaciones, curvas, etc.) son de clase C^∞ a menos de que se especifique otra cosa.

1.1.11 Definición. Si ψ es una aplicación diferenciable de M en una variedad diferenciable N y $f \in C^\infty(N)$, la *imagen recíproca de* f *bajo* ψ, $\psi^* f$ está definida por

$$\psi^* f \equiv f \circ \psi \tag{1.1}$$

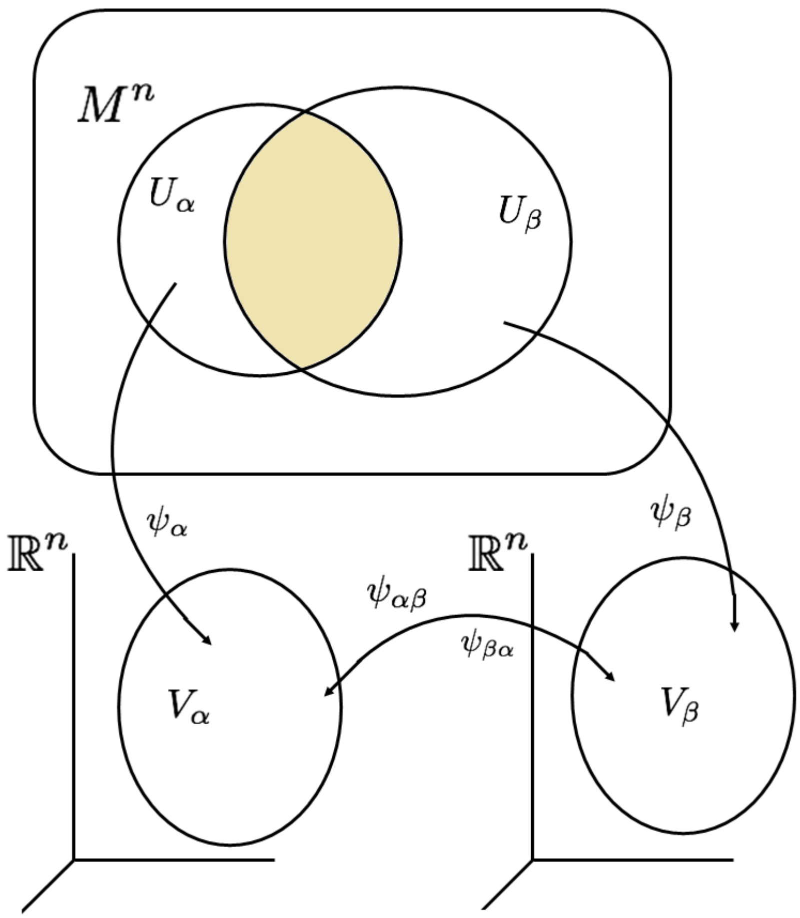

Figura 1.3: Matos, T. (2017). Una variedad real diferenciable de dimensión n tiene funciones de transición suaves. Tomado de [3]

1.2. Vectores y 1-formas

Para más detalles de toda esta sección ver [5].

1.2.1. El espacio tangente

1.2.1 Definición. Si C es una curva diferenciable en M y $f \in C^\infty(M)$, entonces, $C^*f = f \circ C$ es una función diferenciable de un subconjunto abierto I de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Si $t_0 \in I$, el *vector tangente* a C en el punto $C(t_0)$, denotado por C'_{t_0}, se define por

$$C'_{t_0}(f) \equiv \frac{d}{dt}(C^*f)|_{t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(C(t)) - f(C(t_0))}{t - t_0} \tag{1.2}$$

El número real $C'_{t_0}(f)$ es la razón de cambio de f a lo largo de C alrededor del punto $C(t_0)$.

Por otra parte, la definición para vectores tangentes es:

1.2.2 Definición. Sea $p \in M^n$. Un *vector tangente* a M^n en p es una aplicación, v_p de $C^\infty(M^n)$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} v_p(af + bg) &= av_p(f) + bv_p(g) \\ v_p(fg) &= f(p)v_p(g) + g(p)v_p(f) \end{aligned}$$

para $f, g \in C^\infty(M^n)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

La función v_p es una derivación, es decir, cumple con la ley de superposición y con la regla de Leibniz.

1.2.3 Definición. El *espacio tangente* de M^n en p, denotado por T_pM^n, es el conjunto de todos los vectores tangentes a M^n en p.

El conjunto T_pM^n es un espacio vectorial real.

Si (U, ψ, V) es una carta de M^n con coordenadas $x^1, x^2, \cdots, x^n$ y $p \in U$, los vectores tangentes $\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$ se definen como

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f) := \frac{\partial}{\partial r^i}\left(f \circ \psi^{-1}\right)|_{\psi(p)} \tag{1.3}$$

para $f \in C^\infty(M^n)$. Si $f = x^j$ entonces

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (x^j) = \frac{\partial}{\partial r^i}(x^j \circ \psi^{-1})|_{\psi(p)} = \frac{\partial}{\partial r^i}(r^j)|_{\psi(p)} = \delta_i^j$$

ya que $x^j = r^j \circ \psi$.

Entonces el conjunto $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\}_{i=1,2,\cdots,n}$ es una base de T_pM^n, y por tanto todo vector v_p se escribe como $v_p = \sum v_p(x^i)\, \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, que al usar la convención de suma de Einstein queda como

$$v_p = v_p(x^i)\, \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \tag{1.4}$$

a partir de este punto se usará esta convención.

Si ahora (U', ϕ, V') es una segunda carta de M^n con coordenadas $y^1, y^2, \cdots, y^n$ y $p \in U \cap U'$ se tiene entonces otra base para T_pM^n dada por $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p\}_{i=1,2,\cdots,n}$. Escribiendo los vectores de la base $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p\}_{i=1,2,\cdots,n}$ como una combinación lineal de $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\}_{i=1,2,\cdots,n}$, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_p = \frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_p (x^j)\, \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p$$

Usando

$$\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_p (x^j) = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\bigg|_p$$

la relación anterior puede expresarse como

$$\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_p = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\bigg|_p \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \tag{1.5}$$

y similarmente

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\bigg|_p \frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_p \tag{1.6}$$

es decir, las bases $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\}_{i=1,2,\cdots,n}$ y $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p\}_{i=1,2,\cdots,n}$ están relacionadas por la matriz $c_i^j(p) = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\Big|_p$, la cual tiene por inversa a la matriz $\tilde{c}_j^i(p) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\Big|_p$.

1.2.2. Campos vectoriales

Un campo vectorial X sobre M^n es una función la cual le asigna a cada punto p de M^n un vector tangente $X(p) \in T_pM^n$.
Si X es un campo vectorial y $f \in C^\infty(M^n)$, la función Xf, se define por

$$(Xf)(p) \equiv X_p(f) \tag{1.7}$$

Este campo vectorial X es diferenciable de clase C^∞ si para toda $f \in C^\infty(M^n)$, la función Xf también pertenece a $C^\infty(M^n)$. El conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables sobre

M^n se denotará por TM^n.
Si (U, ψ, V) es una carta de M^n con coordenadas $x^1, x^2, \cdots, x^n$, entonces se obtienen n campos vectoriales sobre U dados por $\frac{\partial}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$. Estos campos vectoriales son diferenciables ya que por las ecuaciones (1.3) y (1.7) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \frac{\partial}{\partial r^i}\left(f \circ \psi^{-1}\right) \circ \psi \tag{1.8}$$

En lo que sigue $\frac{\partial}{\partial x^i}(f)$ se escribirá como $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ teniéndose que estas funciones quedan definidas por la ecuación anterior.
Dado que los vectores tangentes $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ son base de T_pM^n, entonces cualquier campo vectorial X evaluado en el punto p debe ser combinación lineal de estos vectores con coeficientes reales, los cuales pueden depender de p ($X^i(p)$ son las componentes de X_p en la base formada por los vectores $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$). Por tanto

$$X_p = X^i(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \tag{1.9}$$

Esta relación define n funciones reales $X^1, X^2, \ldots, X^n$ en la intersección del dominio de X y U, las funciones X^i están dadas por

$$X^i = Xx^i \tag{1.10}$$

ya que de la ecuación (1.4) se tiene que

$$X_p = X_p(x^i)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

ahora, usando la ecuación (1.7) y comparando con la ecuación (1.9) se tiene que $X_p(x^i) = (Xx^i)(p) = X^i(p)$. Por otra parte, como

$$X(p) = X_p = X^i(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \left(X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(p)$$

entonces

$$X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.11}$$

1.2.4 Proposición. *Sean $x^1, x^2, \cdots, x^n$ y $x'^1, x'^2, \cdots, x'^n$ dos sistemas de coordenadas. Si $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ y $X = X'^j\frac{\partial}{\partial x'^j}$, entonces se cumple que*

$$X'^j = X^i\frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \tag{1.12}$$

en el dominio común de X y de los dos sistemas de coordenadas.

esta matriz $\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}$ es de cambio de base que se denota por $\Lambda_i^{'j}$. Para el cambio de base que se vio en la ecuación (1.6) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x'^i} = \Lambda_j^{'i}\frac{\partial}{\partial x'^i} \tag{1.13}$$

1.2.3. Espacio cotangente

1.2.5 Definición. Sean M^m y N^n variedades y $F \in C^\infty(M^m, N^n)$ con $x \in M^m$. La *diferencial de F en x* es la función definida por

$$\begin{aligned} dF_x : \ & T_xM^m \longrightarrow T_{F(x)}N^n \\ & v_x \mapsto dF_x(v_x) : \quad C^\infty(N^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad\qquad g \mapsto \quad dF_x(v_x)(g) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad := v_x(F^*(g)) \quad = v_x(g \circ F) = v_x \circ F^*(g) \end{aligned}$$

Esto también se puede denotar como

$$F_{x*}(v_x) = dF_x(v_x) = v_x \circ F^* \tag{1.14}$$

Por otra parte, la diferencial también sigue la regla de la cadena

1.2.6 Proposición.

$$d(G \circ F)_x = dG_{F(x)} \circ dF_x \tag{1.15}$$

Esta función es una transformación lineal entre los espacios tangentes.

Ahora, supongamos que existe una función φ desde una variedad a otra y que además X es un campo vectorial y Y es un campo vectorial en la segunda. Si mapeamos el vector X con la diferencial $d\varphi$, este mapeo no necesariamente tiene algo que ver con el vector Y. Sin embargo, en el caso que para todo punto de la primera variedad, el mapeo del vector X por medio de $d\varphi$ corresponde al vector Y evaluado en el punto por φ, se dice que estos dos vectores están relacionados por medio de φ.

1.2.7 Definición. Sean M^m y N^n variedades y $\varphi \in C^\infty(M^m, N^n)$. Se dice que $X \in TM^m$ y $Y \in TN^n$ están *φ-relacionados* si para toda $x \in M^m$ se sigue que $d\varphi_x(X_x) = Y_{\varphi(x)}$

1.2.8 Proposición. *Sean $X \in TM^m$ y $Y \in TN^n$. X y Y están φ-relacionados si y solo si $\varphi^* \circ Y = X \circ \varphi^*$*

Si ahora aplicamos la definición de vectores φ-relacionados al mismo vector, obtenemos la definición de φ-invariante

1.2.9 Definición. Sean $X \in TM^n$ y $\varphi \in C^\infty(M^n, M^n)$. X se llama *φ-invariante o invariante bajo φ* si $X \circ \varphi^* = \varphi^* \circ X$, es decir si $d\varphi_x(X_x) = X_{\varphi(x)}$ para toda $x \in M^n$

1.2.10 Definición. Sea $f \in C^\infty(M^n)$, la *diferencial exterior* de f en el punto $p \in M^n$ denotada por df_p, se define por, $df_p(v_p) \equiv v_p(f)$, para $v_p \in T_pM^n$.

La aplicación df_p pertenece al espacio dual de T_pM^n denotado por $T_p^*M^n$: los elementos de $T_p^*M^n$ son las transformaciones lineales de T_pM^n en $\mathbb{R}$, las cuales reciben el nombre de covectores o vectores covariantes, mientras que $T_p^*M^n$ es llamado espacio cotangente a M^n en p. El espacio $T_p^*M^n$ es un espacio vectorial real.

Después de haber definido un covector, podemos introducir una transformación lineal equivalente a la diferencial, pero ahora entre los espacios cotangentes.

1.2.11 Definición. Sean M^m y N^n variedades y $F : M^m \longrightarrow N^n$ suave, además, sean $x \in M^m$ y $y = F(x) \in N^n$. Con F podemos inducir la siguiente función:

$$\begin{aligned} F_y^* : \; & T_y^* N^n \longrightarrow T_x^* M^m \\ & \omega_y \longmapsto F_y^*(\omega_y) : \qquad T_x M^m \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad\qquad X_x \longmapsto F_y^*(\omega_y)(X_x) \; := \omega_y(dF|_x(X_x)) \end{aligned}$$

Notemos que $F_y^*(\omega_y)(X_x) = \omega_y(dF|_x(X_x)) = \omega_y \circ (dF|_x(X_x)) = \omega_y \circ F_{x*}(X_x)$, es decir,

$$F_y^*(\omega_y) = \omega_y \circ F_{x*} \tag{1.16}$$

1.2.12 Definición. A $F_y^*(\omega_y)$ se le denomina *la imagen recíproca* o *pull-back* de ω_y por F.

El *pull-back* es una transformación lineal entre los espacios cotangentes.

1.2.4. Campos covectoriales o 1-formas

Un campo covectorial α sobre M^n es una aplicación que asigna a cada $p \in M^n$ un elemento $\alpha(p) \in T_p^* M^n$, $\alpha(p)$ también será denotado por α_p. Un campo covectorial α es diferenciable (de clase C^∞) si para todo $X \in TM^n$ la función $\alpha(X)$, definida por

$$(\alpha(X))(p) \equiv \alpha_p(X_p) \tag{1.17}$$

es diferenciable (de clase C^∞). El conjunto de todos los campos covectoriales sobre M^n se denotará por $\bigwedge^n = T^* M^n$, los elementos de este conjunto se llaman *formas diferenciales lineales o 1-formas*. Si $f \in C^\infty(M^n)$, la diferencial exterior de f, denotada por df y dada por $df(p) \equiv df_p$ es un campo covectorial diferenciable o 1-forma, si $X \in TM^n$ y $p \in M^n$

$$(df(X))(p) = df_p(X_p) = X_p(f) = (Xf)(p)$$

es decir $df(X) = Xf$.

Si (U, ψ, V) es una carta de M^n implica que la diferencial exterior de las funciones coordenadas $x^1, x^2, \cdots, x^n$ satisface

$$dx_p^i \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) = \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p (x^i) = \delta_j^i \tag{1.18}$$

esto significa que $\{dx_p^i\}_{i=1,\cdots,n}$ es base de $T_p^* M^n$.

Para $\alpha_p \in T_p^* M^n$ y cualquier vector $v_p = v_p(x^i) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ se sigue que

$$\alpha_p(v_p) = \alpha_p \left(v_p(x^i) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) = v_p(x^i) \alpha_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) = \alpha_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) dx_p^i(v_p)$$

dado que v_p es arbitrario, entonces

$$\alpha_p = \alpha_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) dx_p^i$$

Sea α un campo covectorial en M^n, usando la ecuación anterior, se puede expresar como

$$\alpha_p = \alpha(p) = \alpha(p) \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) dx_p^i = \left(\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) (p) dx^i(p) = \left(\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) dx^i \right) (p)$$

Por lo que

$$\alpha = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) dx^i \tag{1.19}$$

haciendo $\alpha_i = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ se tiene que

$$\alpha = \alpha_i \, dx^i \tag{1.20}$$

1.2.13 Proposición. *Sean $x^1, x^2, \cdots, x^n$ y $x'^1, x'^2, \cdots, x'^n$ dos sistemas de coordenadas. Si $\alpha = \alpha_i \, dx^i$ y $\alpha = \alpha'_j \, dx'^j$, entonces se cumple que*

$$\alpha'_j = \alpha_i \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \tag{1.21}$$

en el dominio común de α y de los dos sistemas de coordenadas.

$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$ es una matriz de cambio de base que se denota por $\Lambda^i_{\prime j}$

La expresión local de la diferencial exterior de una función $f \in C^\infty(M^n)$ de acuerdo con lo mencionado anteriormente, en la base $\{dx^i\}_{i=1,\cdots,n}$ es

$$df = df \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) dx^i = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

Aplicando esto a un vector dx'^j de otra base $\{dx'^j\}_{i=1,\cdots,n}$ tenemos que

$$dx'^j = dx'^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) dx^i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} dx^i = \Lambda'^j_i dx^i \tag{1.22}$$

Se suele denotar al producto de 1-formas con vectores como $\langle w, v \rangle = w(v)$, debido a que para cada punto $p \in M^n$ se cumple la ecuación 1.18, entonces

$$\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \delta^i_j$$

Debido a que $(T_p^* M^n)^* = T_p M^n$ para todo $p \in M^n$, se tiene que si $w \in T^* M^n$ y $v \in T_p M^n$, entonces $v_x(w_x) \in \mathbb{R}$, con $v_x(w_x) = w_x(v_x) = \langle w_x, v_x \rangle$.

1.2.5. Tensores y campos tensoriales

1.2.14 Definición. Un *tensor k veces covariante en p* es una aplicación multilineal $T_p : T_pM^n \times T_pM^n \times T_pM^n \times \cdots \times T_pM^n(k\ veces) \to \mathbb{R}$. Un tensor una vez covariantes es precisamente un covector.

El conjunto de tensores k veces covariantes en p es un espacio vectorial real.

1.2.15 Definición. Si T_p es un tensor k veces covariante en p y S_p es un tensor l veces covariante en p, *el producto tensorial* $T_p \otimes S_p$ se define por

$$(T_p \otimes S_p)(v_1, \cdots, v_{k+l}) \equiv T_p(v_1, \cdots, v_k)S_p(v_{k+1}, \cdots v_{k+l})$$

para $v_1, \cdots, v_{k+l} \in T_pM^n$.Y $T_p \otimes S_p$ es un tensor $k + l$ veces covariante en p.

1.2.16 Definición. Un *tensor k veces contravariante en p* es una aplicación multilineal $T_p : T_p^*M^n \times T_p^*M^n \times \cdots \times T_p^*M^n(k\ veces) \to \mathbb{R}$.

El conjunto de tensores k veces contravariantes en p forma un espacio vectorial.

1.2.17 Definición. Si T_p es un tensor k veces contravariante en p y S_p es un tensor l veces contravariante en p, *el producto tensorial* $T_p \otimes S_p$ se define por

$$(T_p \otimes S_p)(\omega^1, \cdots, \omega^{k+l}) \equiv T_p(\omega^1, \cdots, \omega^k)S_p(\omega^{k+1}, \cdots \omega^{k+l})$$

para $\omega^1, \cdots, \omega^{k+l} \in T_p^*M^n$.Y $T_p \otimes S_p$ es un tensor $k + l$ veces contravariante en p.

1.2.18 Definición. Un *tensor mixto k veces contravariante y l veces covariante en p*, o tensor mixto de tipo $(k.l)$ en p, es una aplicación multilineal del producto cartesiano de k copias de $T_p^*M^n$ y l copias de T_pM^n en $\mathbb{R}$. Los tensores mixtos del tipo (k, l) en p forman un espacio vectorial real.

El producto tensorial de un tensor del tipo (k, l) por un tensor de tipo (k', l') es un tensor de tipo $(k+k', l+l')$. Una base para el espacio vectorial de los tensores de tipo (k, l) en p está formada por los productos tensoriales de k vectores $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ y l covectores dx_p^i; por lo tanto este espacio tiene dimensión n^{k+l}.

Los tensores de tipo $(k, 0)$ y $(0, k)$ son los tensores k veces contravariantes y k veces covariantes, respectivamente.

Un campo tensorial de tipo (k, l) sobre M^n es una aplicación que a cada punto $p \in M^n$ asocia un tensor de tipo (k, l) en p; un campo tensorial de tipo $(0, 0)$ sobre M^nes una función de M^n en $\mathbb{R}$.

La suma, el producto por escalares y por funciones y el producto tensorial de campos tensoriales mixtos, se definen punto por punto:

$$\begin{aligned}(at + bs)_p &\equiv at_p + bt_p \\ (ft)_p &\equiv f(p)t_p \\ (t \otimes s)_p &\equiv t_p \otimes s_p\end{aligned}$$

De manera natural podemos considerar campos vectoriales o 1-formas, simplemente definiendo los espacios vectoriales para cada punto de la variedad.

Ahora, vamos a extender la definición dada en la sección 1.2.3 sobre diferencial e imagen recíproca para tensores k veces covariantes y k veces contravariantes.

1.2.19 Definición. Sea $\phi : M^m \longrightarrow N^n$, donde M^m y N^n son variedades.

- La imagen recíproca de tensores covariantes (o la imagen recíproca de T bajo ψ) se define como
$$\phi^*T(v_1, \ldots, v_s)|_p = T(\phi_* v_1, \ldots, \phi_* v_s)|_{\phi(p)}$$
$v_1, \ldots, v_s \in TM^m$, $p \in M^m$ donde $T \in T_s^0$.

- Análogamente para tensores contravariantes se tiene
$$\phi_*T(\omega^1, \ldots, \omega^r)|_{\phi(p)} = T(\phi^*\omega^1, \ldots, \phi^*\omega^r)|_p$$
para $\omega^1, \ldots, \omega^r \in T^*N^n$ y $T \in T_0^r$.

1.2.6. Álgebra de Lie

Con el paréntesis de Lie, los espacios tangentes tienen estructura de álgebra. Esta estructura puede ser muy importante para caracterizar a la variedad

1.2.20 Definición. Sea M^n una variedad. La función
$$[,] : TM^n \times TM^n \longrightarrow TM^n(X, Y)$$
definida para cualesquiera $X, Y \in TM^n$ por
$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$$
es llamado *producto de Lie* o *paréntesis de Lie* de los campos vectoriales X, Y.

Se cumple que

1.2.21 Proposición. *El paréntesis de Lie tiene las siguientes propiedades*

- $[X, Y] = -[Y, X]$
- *es bilineal*
- $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$ identidad de Jacobi

1.2.22 Definición. Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ dotado de un producto antisimétrico, bilineal y que verifica una relación llamada identidad de Jacobi.

1.2.23 Proposición. *La estructura* $(TM^n, +, [,], ; \mathbb{R}, \dot{)}$ *es un álgebra de Lie de los vectores tangentes a la variedad.*

Usando la definición 1.2.20 se tiene que

1.2.24 Proposición. *Los vectores coordenados conmutan.*

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0. \tag{1.23}$$

Para representar cualquier campo tensorial se pueden emplear bases distintas a las inducidas por algún sistema de coordenadas. Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ un conjunto de campos vectoriales diferenciables definidos en algún conjunto abierto U de M^n tales que en cada punto $p \in M^n$, los vectores tangentes $(\vec{e}_i)_p$ formen una base de T_pM^n y sea el conjunto de 1-formas $\{\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \cdots, \tilde{\omega}^n\}$ su base dual, es decir, $\tilde{\omega}^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j$.

1.2.25 Definición. Si existe un sistema de coordenadas tal que $\vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ o, equivalentemente $\tilde{\omega}^i = dx^i$, se dirá que la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ es *holónoma*. Una condición necesaria y suficiente para que la base sea holónoma localmente es que $[\vec{e}_i, \vec{e}_j] = 0$

Esta condición se cumple en la ecuación (1.23).

A partir de aquí a los campos tensoriales se les llamará tensores y los campos vectoriales serán llamados vectores, a menos que se haga distinción específica.

1.2.7. p-formas

1.2.26 Definición. Sea M^n una variedad diferenciable de dimensión n. Una *forma diferencial* de grado k o una *k-forma*, ω, en M^n es un tensor diferenciable k veces covariante sobre M^n, el cual es completamente antisimétrico, es decir

$$\omega(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_k) = -\omega(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k)$$

Si ω^1 y ω^2 son uno-formas, entonces se puede construir una 2-forma de la siguiente manera

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega^1 \otimes \omega^2 - \omega^2 \otimes \omega^1).$$

Ahora definiremos el producto entre p-formas, el llamado producto *wedge*:

1.2.27 Definición. Sea ω una p-forma y μ una q-forma. El producto $\omega \wedge \mu$ es una *(p+q)-forma*, donde $\wedge$ es antisimétrico, es decir

$$\omega \wedge \mu = (-1)^{pq} \mu \wedge \omega$$

Esto significa que, si $\{\tilde{\omega}^\alpha\}$ es base de las uno-formas, entonces una dos-forma, γ, se escribe como

$$\gamma = \gamma_{\alpha_1\alpha_2} \tilde{\omega}^{\alpha_1} \wedge \tilde{\omega}^{\alpha_2}$$

donde $\tilde{\omega}^{\alpha_1} \wedge \tilde{\omega}^{\alpha_2} = \frac{1}{2}(\tilde{\omega}^{\alpha_1} \otimes \tilde{\omega}^{\alpha_2} - \tilde{\omega}^{\alpha_2} \otimes \tilde{\omega}^{\alpha_1})$. Y para una 3-forma se tiene que

$$\gamma = \gamma_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \tilde{\omega}^{\alpha_1} \wedge \tilde{\omega}^{\alpha_2} \wedge \tilde{\omega}^{\alpha_3}$$

El conjunto de las p-formas se denota como $\wedge^p$.

También se presentará la siguiente fórmula sin demostración. Para una 1-forma α se tiene

$$2d\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]) \tag{1.24}$$

1.2.8. Notación y componentes de vectores, covectores y tensores

Como se había mencionado anteriormente, un tensor es una función multilineal, es decir, una función de varias variables que es lineal en cada entrada. El dominio es el producto cartesiano de un espacio vectorial consigo mismo varias veces, con su dual, también varias veces. En este caso estamos tomando el espacio vectorial como el espacio tangente a una variedad y su dual como el espacio cotangente a la variedad. Con esto, hemos definido tensores que viven en variedades.

Sean $\{\vec{e}_\alpha\}_{\alpha=1,\cdots,n}$, $\{\vec{e}_{\bar{\beta}}\}_{\bar{\beta}=1,\cdots,n}$ bases de TM^n y $\{\tilde{\omega}^\mu\}_{\mu=1,\cdots,n}$, $\{\tilde{\omega}^{\bar{\nu}}\}_{\bar{\nu}=1,\cdots,n}$ bases de T^*M^n tales que $\{\tilde{\omega}^\mu\}_{\mu=1,\cdots,n}$ es dual a $\{\vec{e}_\alpha\}_{\alpha=1,\cdots,n}$ y también se tiene que $\{\tilde{\omega}^{\bar{\nu}}\}_{\bar{\nu}=1,\cdots,n}$ es dual a $\{\vec{e}_{\bar{\beta}}\}_{\bar{\beta}=1,\cdots,n}$. La dualidad de las bases implica que

$$\vec{e}_\alpha(\tilde{\omega}^\mu) = \delta^\mu_\alpha \tag{1.25}$$

$$\vec{e}_{\bar{\beta}}(\tilde{\omega}^{\bar{\nu}}) = \delta^{\bar{\nu}}_{\bar{\beta}} \tag{1.26}$$

Como $\{\vec{e}_\alpha\}_{\alpha=1,\cdots,n}$, $\{\vec{e}_{\bar{\beta}}\}_{\bar{\beta}=1,\cdots,n}$ son bases de TM^n entonces existe una matriz de cambio de base como en (1.13), esta matriz de cambio de base se denotará como $\Lambda^{\bar{\beta}}_\alpha$

$$\vec{e}_\alpha = \Lambda^{\bar{\beta}}_\alpha \; \vec{e}_{\bar{\beta}} \tag{1.27}$$

Por otra parte con $\{\tilde{\omega}^\mu\}_{\mu=1,\cdots,n}$ y $\{\tilde{\omega}^{\bar{\nu}}\}_{\bar{\nu}=1,\cdots,n}$ bases de T^*M^n, se tiene un cambio de base análogo al mostrado en (1.22), esta matriz será $\Lambda^\mu_{\bar{\nu}}$

$$\tilde{\omega}^\mu = \Lambda^\mu_{\bar{\nu}} \; \tilde{\omega}^{\bar{\nu}} \tag{1.28}$$

Sustituyendo (1.27) y (1.28) en (1.25) y usando (1.26), se tiene que

$$\delta^\mu_\alpha = \vec{e}_\alpha(\tilde{\omega}^\mu) = \Lambda^{\bar{\beta}}_\alpha \; \vec{e}_{\bar{\beta}}(\Lambda^\mu_{\bar{\nu}} \; \tilde{\omega}^{\bar{\nu}}) = \Lambda^{\bar{\beta}}_\alpha \Lambda^\mu_{\bar{\nu}} \; \delta^{\bar{\nu}}_{\bar{\beta}} = \Lambda^{\bar{\beta}}_\alpha \Lambda^\mu_{\bar{\beta}} \tag{1.29}$$

Las componentes de un covector $\tilde{p}$ se denotarán como p_α con

$$p_\alpha := \tilde{p}(\vec{e}_\alpha) \tag{1.30}$$

y este covector o 1-forma puede escribirse como $\tilde{p} = p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha$. Para hacer un cambio de base se usará (1.27) en (1.30), quedando

$$p_\alpha = \tilde{p}(\vec{e}_\alpha) = \tilde{p}(\Lambda^{\bar{\beta}}_\alpha \; \vec{e}_{\bar{\beta}}) = \Lambda^{\bar{\beta}}_\alpha \; \tilde{p}(\vec{e}_{\bar{\beta}}) = \Lambda^{\bar{\beta}}_\alpha \; p_{\bar{\beta}} \tag{1.31}$$

que es el cambio de base encontrado en la ecuación (1.21).

Por otra parte, las componentes de un vector $\vec{V}$ se denotarán como V^α con

$$V^\alpha = \vec{V}(\tilde{\omega}^\alpha) \tag{1.32}$$

y el vector se escribe como $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$. Para hacer un cambio de base en los vectores se usará (1.28) en (1.32), quedando

$$V^\alpha = \vec{V}(\tilde{\omega}^\alpha) = \vec{V}(\Lambda^\alpha_{\bar{\nu}}\ \tilde{\omega}^{\bar{\nu}}) = \Lambda^\alpha_{\bar{\nu}}\ \vec{V}(\tilde{\omega}^{\bar{\nu}}) = \Lambda^\alpha_{\bar{\nu}}\ V^{\bar{\nu}} \tag{1.33}$$

que es el cambio de base encontrado en la ecuación (1.12).

1.3. Diferenciación en variedades

1.3.1. Grupos uniparamétricos de transformaciones

1.3.1 Definición. Sea M^n una variedad diferenciable. Un *grupo uniparamétrico de transformaciones*, φ, en M^n, es una aplicación diferenciable de $M^n \times \mathbb{R}$ en M^n tal que $\varphi(0, x) = x$ y $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s + t, x)$ para todo $x \in M^n, t, s \in \mathbb{R}$.

Observe que

$$\varphi(s + t, x) = \varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$$

Si se define $\varphi_t(x) \equiv \varphi(t, x)$, φ_t es entonces una aplicación diferenciable de M^n en M^n y por lo dicho anteriormente $\varphi_{t+s}(x) = \varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t, \varphi_s(x)) = \varphi_t(\varphi_s(x)) = (\varphi_t \circ \varphi_s)(x)$, es decir: $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ (puesto que $t+s = s+t$). φ_0 es la aplicación identidad de M^n ya que $\varphi_0(x) = \varphi(0, x) = x$ para todo $x \in M^n$. Por otra parte se tiene que $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0$, es decir, cada aplicación φ_t tiene inversa φ_{-t}, la cual es también diferenciable. Por lo tanto, cada φ_t es un difeomorfismo de M^n sobre sí misma.

Las propiedades mencionadas anteriormente pueden resumirse en

1.3.2 Proposición. *Sea $\varphi : \mathbb{R} \times M^n \longrightarrow M^n$ un grupo uniparamétrico de transformaciones y*

$$\Psi = \{\varphi_t : M^n \longrightarrow M^n, x \mapsto \varphi_t(x) = \varphi(t, x)\}$$

entonces $(\Psi, \circ)$ es un subgrupo del grupo de difeomorfismos y además es abeliano

Un grupo uniparamétrico de transformaciones φ en M^n determina una familia de curvas en M^n. La aplicación $\varphi_x : \mathbb{R} \longrightarrow M^n$ dada por $\varphi_x(t) = \varphi(t, x)$ es una curva diferenciable en M^n para cada $x \in M^n$. Puesto que $\varphi_x(0) = \varphi(0, x) = x$, el vector tangente a la curva φ_x en $t = 0$ pertenece a $T_x M^n$. El generador infinitesimal de φ es el campo vectorial X tal que $X_x = (\varphi_x)'_0$. En otras palabras, el generador infinitesimal de φ es un campo vectorial que es tangente a la familia de curvas generadas por el grupo uniparámetrico de transformaciones, en todos los puntos de la variedad.

Dado un campo vectorial diferenciable X, sobre M no siempre existe un grupo uniparamétrico de transformaciones del cual X sea generador infinitesimal; se dice que X es completo si tal grupo uniparamétrico de transformaciones existe.

1.3.3 Definición. Sea $X \in TM^n$. Una curva $C : I \longrightarrow M^n$ es una *curva integral* de X si $C'_t = X_{C(t)}$, para $t \in I$. Si $C(0) = x$ se dice que C se inicia en x.

Nótese que si φ es un grupo uniparamétrico de transformaciones y X es su generador infinitesimal entonces la curva φ_x es una curva integral de X que se inicia en x para cualquier $x \in M^n$.

No siempre φ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo que no es un grupo uniparamétrico de transformaciones; sin embargo, para cada $x \in M$ existe una vecindad abierta, U de x, y un $\epsilon > 0$ tales que φ está definido en $U \times (-\epsilon, \epsilon)$ y es diferenciable. La aplicación φ recibe el nombre de flujo o grupo uniparamétrico de transformaciones local y X es su generador infinitesimal.

1.3.2. Derivada de Lie

La derivada de Lie es conveniente para espacios que tienen isometrías o simetrías espaciales. Con la derivada de Lie, como veremos, es posible encontrar estas simetrías.

Sea φ un grupo uniparamétrico de transformaciones o flujo en M^n, la aplicación $\varphi_t : M^n \longrightarrow M^n$, definida por $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ es una aplicación diferenciable. Si X es el generador infinitesimal de φ, la curva φ_x dada por $\varphi_x(t) = \varphi(t, x)$, es la curva integral de X que se inicia en x

- Derivada de Lie de funciones

  Se tiene que para toda $f \in C^\infty(M^n)$, $\varphi_t^* f = f \circ \varphi_t$ también pertenece a C^∞, por lo tanto, la derivada de Lie está dada como

  $$\mathcal{L}_X f = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t^* f - f}{t} = Xf \tag{1.34}$$

  es decir, la derivada de Lie con respecto de φ de cualquier función diferenciable existe y depende de φ solo a través de su generador infinitesimal. La derivada de f con respecto de φ se denotará por $\mathcal{L}_X f$ y recibirá el nombre de derivada de Lie de f con respecto a X.

- Derivada de Lie de campos vectoriales

  Para cualquier campo vectorial Y sobre M^n, la derivada de Lie de Y con respecto a X está dada por

  $$\mathcal{L}_X Y = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t^* Y - Y}{t} = [X, Y] \tag{1.35}$$

La derivada de Lie tiene varias propiedades que podemos resumir en la siguiente proposición

1.3.4 Proposición. *La derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ del vector X cumple lo siguiente*

- $\mathcal{L}_X$ *preserva el tipo de tensor*
- $\mathcal{L}_X$ *es lineal y preserva la contracción*
- $\mathcal{L}_X(S \otimes T) = (\mathcal{L}_X S) \otimes T + S \otimes (\mathcal{L}_X T)$ *para tensores arbitrarios S y T*
- $\mathcal{L}_X f = X(f)$ *para* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$
- $\mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X = [X, Y]$ *para toda* $X, Y \in TM^n$
- $d(\mathcal{L}_X \omega) = \mathcal{L}_X(d\omega)$

1.3.3. Diferencial exterior

1.3.5 Definición. Sea M^n una variedad y $\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ una p-forma sobre M^n para una base coordenada $\{dx^i\}_{i=1,\dots,n}$ de $T^*M^n = \wedge^1$. Un mapeo $d : \wedge^p \longrightarrow \wedge^{p+1}$ es llamado *diferencial exterior* d si cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} d :& \wedge^p \longrightarrow \wedge^{p+1} \\ & \omega \longmapsto d\omega = d(\omega_{i_1 \dots i_p}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \end{aligned}$$

se tiene que $d\omega = \omega_{i_1 \dots i_p, k}\, dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$

Vamos a demostrar ahora que la imagen recíproca y la diferencial conmutan

1.3.6 Proposición. *Sean M^m y N^n variedades, $\phi : M^m \longrightarrow N^n$ y ϕ^* la imagen recíproca. La diferencial exterior conmuta con el pull-back, es decir, si $\omega \in \wedge^p N^n$ se tiene que*

$$\phi^*(d\omega) = d(\phi^*\omega)$$

1.3.4. Derivada exterior adjunta

Primero vamos a introducir el tensor de Levi-Civita que nos va a servir para trabajar en la antisimetrización de vectores y tensores para más adelante poder introducir el operador de Hodge el cual aplicaremos posteriormente junto con el operador de diferencial exterior al tensor $F = dA$ para llegar a las 4 ecuaciones de Maxwell.

1.3.7 Definición. El *tensor* totalmente antisimétrico *de Levi-Civita* $\epsilon_{i_1,\dots,i_n}$ se define como sigue

$$\epsilon_{i_1,\dots,i_n} = \begin{cases} 1 \textit{ si } \; i_1, \dots, i_n \textit{ es permutacion par de } (1, 2, \dots, n) \\ -1 \textit{ si } \; i_1, \dots, i_n \textit{ es permutacion impar de } (1, 2, \dots, n) \\ 0 \textit{ cualquier otro caso} \end{cases} \tag{1.36}$$

Con el tensor de Levi-Civita podemos definir el operador de Hodge.

1.3.8 Definición. El *operador $*$ de Hodge* o *transformación de dualidad* es una función $* : \wedge^p \longrightarrow \wedge^{n-p}$ tal que

$$*(dx^{i_j} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) = \frac{1}{(n-p)!}\epsilon_{i_1,\ldots,i_p,i_{p+1},\ldots,i_n} dx^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} \tag{1.37}$$

donde $\epsilon_{i_1,\ldots,i_n}$ es el tensor de Levi-Civita

La aplicación del operador de Hodge a una p-forma consiste en quitar todos los elementos de la base que tiene la p-forma y poner todos los restantes, los que no se usan, en el orden que nos da el tensor de Levi-Civita. Las funciones que van enfrente de la base no son afectadas por el operador de Hodge. Con este operador se define otro operador diferencial, llamado codiferencial.

1.3.9 Definición. La *codiferencial exterior* o *derivada exterior adjunta* se define por

$$\delta = (-1)^{np+n+1} * d* \tag{1.38}$$

para espacios de dimensión n y para p-formas. Se tiene que $\delta = - * d*$ en espacios de dimensión par y $\delta = (-1)^p * d*$ en espacios de dimensión impar.

Como en el caso de la diferencial, la doble aplicación de la codiferencial también es cero

$$\delta(\delta\omega_p) = 0 \tag{1.39}$$

se tiene entonces que

$$d : \wedge^p \longrightarrow \wedge^{p+1}$$
$$\delta : \wedge^p \longrightarrow \wedge^{p-1}$$

1.3.5. Derivada covariante

Para introducir la derivada covariante, necesitamos introducir primero una nueva estructura llamada conexión, a la cual vamos a denotar por ∇. La idea de la conexión es dar una forma de conectar un vector que es trasladado paralelamente a través de la variedad.

1.3.10 Definición. Una *conexión* ∇ para algún $p \in M^n$ en una variedad, es un mapeo que le asocia a cada tensor del tipo $T \in T^r_s$ un tensor del tipo T^r_{s+1}, es decir, $\nabla : T^r_s \longrightarrow T^r_{s+1}$ tal que para toda $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y tensor S arbitrario, se tiene lo siguiente:

- ∇ es una derivación en el álgebra tensorial
- $\nabla f = df$ para toda $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$
- $\nabla = \tilde{\omega}^\beta \nabla_{\vec{e}_\beta}$ donde $\{\tilde{\omega}^\beta\}_{\alpha=1,\ldots,n}$ y $\{\vec{e}_\beta\}_{\beta=1,\ldots,n}$ son bases duales de T^*M^n y de TM^n, respectivamente.
- ∇_X es lineal, es decir, $\nabla_{\alpha X+\beta Y} = \alpha\nabla_X + \beta\nabla_Y$

- $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$ para $f \in C^\infty(M^n)$

En general, una manera de definir la conexión es usando la siguiente regla:
Sea $\{\vec{e}_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,n}$ una base de TM^n no necesariamente coordenada, es decir, $\vec{e}_\alpha = \Lambda^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}$. Entonces

$$\nabla_{\vec{e}_\beta}\vec{e}_\alpha = \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\vec{e}_\nu \in TM^n$$

donde los coeficientes $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ son funciones suaves, que se obtienen del producto $\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \langle\tilde{\omega}^\nu, \nabla_{\vec{e}_\beta}\vec{e}_\alpha\rangle$, donde $\{\tilde{\omega}^\nu\}_{\nu=1,\dots,n}$ es la base dual a $\{\vec{e}_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,n}$, es decir $\tilde{\omega}^\nu = \Lambda^\nu_j dx^j$ y se cumple que

$$\langle\tilde{\omega}^\nu, \vec{e}_\alpha\rangle = \Lambda^\nu_j \Lambda^j_\alpha \langle dx^j, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle = \delta^\nu_\alpha$$

De hecho, definir la conexión es equivalente a dar los valores de las funciones $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ sobre la variedad.

Para una base coordenada, los coeficientes de la conexión son

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

Para una uno-forma

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i = -\Gamma^i_{lj} dx^l$$

En este caso vamos a usar siempre conexiones simétricas, es decir, donde para las bases coordenadas se cumple que

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$$

Conociendo la conexión en la variedad, se puede conocer la derivada covariante de un vector.

1.3.11 Proposición. *Las componentes de la derivada covariante del vector Y a lo largo del vector X es*

$$\nabla_X Y = (\vec{e}_\beta(Y^\alpha) + \Gamma^\alpha_{\nu\beta}Y^\nu)X^\beta\vec{e}_\alpha$$

donde $\{\vec{e}_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,n}$ es una base de TM^n por lo que los vectores Y y X se pueden escribir como $X = X^\beta\vec{e}_\beta$ y $Y = Y^\alpha\vec{e}_\alpha$

Para el caso particular de la proposición anterior, el vector $Y = Y^\alpha\vec{e}_\alpha$ es un tensor de tipo $\binom{1}{0}$ por lo que ∇Y es un tensor de tipo $\binom{1}{1}$, sea γ un tensor de tipo $\binom{0}{1}$, X un tensor de tipo $\binom{1}{0}$ y $\{\tilde{\omega}_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,n}$ la base dual a $\{\vec{e}_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,n}$ entonces se tiene que

$$\nabla Y(X,\gamma) = \nabla_X Y(\gamma) = (\vec{e}_\beta(Y^\alpha) + \Gamma^\alpha_{\nu\beta}Y^\nu)X^\beta\ \vec{e}_\alpha(\gamma) \tag{1.40}$$

$$= (\vec{e}_\beta(Y^\alpha) + \Gamma^\alpha_{\nu\beta}Y^\nu)\ \tilde{\omega}^\beta(X) \otimes\ \vec{e}_\alpha(\gamma) \tag{1.41}$$

En caso que la base sea una base coordenada ($\vec{e}_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$), se acostumbra denotar a la derivada covariante por el símbolo ; entonces

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} Y = (Y^i_{,j} + \Gamma^i_{kj}Y^k)\frac{\partial}{\partial x^i} = Y^i_{;j}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Por supuesto ∇Y no depende de las bases

$$\begin{aligned}\nabla Y =& dx^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} Y \\ =& dx^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} Y \\ =& dx^j Y^i_{;j} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ =& Y^i_{;j} dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}\end{aligned}$$

Entre la diferencial de p-formas y la derivada covariante, la relación es que la diferencial se puede fácilmente generalizar a espacios con conexión ∇. La definición 1.3.5 de la diferencial exterior, en espacios con conexión es

$$d\omega = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}(\omega_{i_1 \ldots i_p}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

para una 1-forma $\omega = \omega_i dx^i$

$$d\omega = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}(\omega_i) \wedge dx^i = (\omega_{i,j} - \Gamma^k_{ij}\omega_k) dx^i \wedge dx^j$$

Capítulo 2

Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

El objetivo de este capítulo es obtener la métrica de Friedmann-Robertson-Walker, la cual nos servirá en el capítulo 6 como parte de la métrica de Kaluza-Klein.

Comenzaremos con definir los tensores del tipo $\binom{0}{2}$, para posteriormente pasar a la definición de tensor métrico. Continuaremos con el desarrollo de la métrica de $\mathbb{R}^3$ en coordenadas esféricas puesto que nos servirá en el planteamiento de la métrica de S^3, esto es necesario porque forma parte del modelo de Friedmann-Robertson-Walker. Para más detalles de las siguientes cuatro secciones, revisar [6].

2.1. Los tensores $\binom{0}{2}$ y sus componentes

Los tensores del tipo $\binom{0}{2}$ tienen como argumento dos vectores. Consideremos las componentes de un tensor $\mathbf{f}$ del tipo $\binom{0}{2}$ arbitrario, estas componentes se tienen como:

$$f_{\alpha\beta} := \mathbf{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta). \tag{2.1}$$

El valor de $\mathbf{f}$ evaluado en dos vectores arbitrarios $\vec{A} = A^\alpha \vec{e}_\alpha$ y $\vec{B} = B^\beta \vec{e}_\beta$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\vec{A}, \vec{B}) &= \mathbf{f}(A^\alpha \vec{e}_\alpha, B^\beta \vec{e}_\beta) \\ &= A^\alpha B^\beta \mathbf{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) \\ &= A^\alpha B^\beta f_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

Utilizando el producto tensorial definido anteriormente podemos formar bases para tensores del tipo $\binom{0}{2}$, por lo que el tensor $\mathbf{f}$ se puede escribir como

$$\mathbf{f} = f_{\alpha\beta}\, \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta \tag{2.2}$$

El orden en que evaluamos los tensores tiene que ser considerado, en general

$$\mathbf{f}(\vec{A}, \vec{B}) \neq \mathbf{f}(\vec{B}, \vec{A}) \qquad \forall\ \vec{A}\ , \vec{B} \tag{2.3}$$

Por tanto, que el valor de un tensor no cambie bajo el intercambio de sus argumentos es una propiedad importante y se dice que este tensor es *simétrico*.

2.1.1 Definición. Un tensor del tipo $\binom{0}{2}$ es *simétrico* si

$$\mathbf{f}(\vec{A}, \vec{B}) = \mathbf{f}(\vec{B}, \vec{A}) \qquad \forall\ \vec{A}\ , \vec{B} \tag{2.4}$$

Si $\vec{A} = \vec{e}_\alpha$ y $\vec{B} = \vec{e}_\beta$ entonces

$$f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha}$$

2.2. Tensor métrico

2.2.1 Definición. Sea M^n una variedad de dimensión n y $\{\tilde{\omega}^\alpha\}_{\alpha=1,\cdots,n}$ una base de T^*M^n. Un tensor del tipo $\binom{0}{2}$ simétrico tal que

$$\mathbf{g} = \eta_{\alpha\beta}\ \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta$$

donde $(\eta)_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = diag = (\pm 1, \cdots, \pm 1)$, es un tensor métrico de M^n.

En general, en una base arbitraria $\tilde{\omega}^\alpha$ y usando las bases encontrada para 1-formas en la sección 1.2 ($\tilde{\omega}^\alpha = \Lambda^\alpha_i\ dx^i$), el tensor métrico se escribe como

$$\mathbf{g} = g_{\alpha\beta}\ \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta = g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha_i\Lambda^\beta_j\ dx^i \otimes dx^j = g_{ij}\ dx^i \otimes dx^j \tag{2.5}$$

Con $g_{ij} = g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha_i\Lambda^\beta_j$, es decir, se hizo un cambio de base en el tensor métrico. En ocasiones se acostumbra designar a la métrica por el símbolo dl^2, es decir,

$$dl^2 = g_{ij}\ dx^i \otimes\ dx^j \tag{2.6}$$

Ya que la matriz $(g_{\alpha\beta})$ es una matriz simétrica por definición, se sabe del álgebra matricial que siempre se puede encontrar una transformación que convierta la matriz simétrica a una matriz diagonal con las entradas de la diagonal principal $+1, -1$ o cero. El número de $+1$ en la diagonal es igual al número de eigenvalores positivos de $(g_{\alpha\beta})$, mientras que el número de -1 es el número de eigenvalores negativos. Si escogemos $\mathbf{g}$ con tres eigenvalores positivos y uno negativo podemos encontrar una transformación tal que el tensor métrico se pueda representar como

$$(g_{\alpha'\beta'}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv (\eta_{\alpha\beta}) \tag{2.7}$$

La ecuación (2.7) es posible si $(g_{\alpha\beta})$ es una matriz con tres eigenvalores positivos y uno negativo. La suma de los elementos de la diagonal se llama *signatura* de la métrica, para este caso es dos.

Si η es la matriz identidad, se dice que la variedad es *euclideana.* Si hay solo uno con signo diferente a los demás, se dice que la variedad es *riemanniana.*

Con el tensor métrico, la variedad y su espacio tangente adquieren un producto interno. Si M^n es una variedad con métrica, entonces $\mathbf{g}$ es un producto interno entre vectores $\mathbf{g}(\vec{V}, \vec{W})$. Si se tiene una base $\{\vec{e}_\alpha\}_{\alpha=1,\cdots,n}$, entonces las componentes de la métrica se obtienen cuando $\vec{V}$ y $\vec{W}$ pertenecen a esta base, es decir

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \vec{e}_\alpha \ \cdot \ \vec{e}_\beta \tag{2.8}$$

Las componentes de $\mathbf{g}$ son $g_{\alpha\beta}$, y las componentes de la matriz inversa son $g^{\alpha\beta}$. La métrica permite subir y bajar índices, lo cual significa:

$$V_\alpha = g_{\alpha\beta} \ V^\beta \tag{2.9}$$

y

$$W^\alpha = g^{\alpha\beta} \ V_\beta \tag{2.10}$$

Ahora, vamos a definir la métrica compatible con la conexión

2.2.2 Definición. Sea M variedad con conexión ∇ y métrica g. Se dice que g es una métrica compatible con la conexión ∇ si

$$\nabla_{\vec{e}_\nu} g = 0$$

para todo vector $\vec{e}_\nu$

De aquí se desprende que si la conexión ∇ y la métrica g son compatibles, entonces se sigue una relación para las componentes de la métrica dada por

$$dg_{ab} = \Gamma_{ba} + \Gamma_{ab} \tag{2.11}$$

Esta definición trae como consecuencia que un tensor métrico compatible con la conexión define unívocamente la conexión en la variedad.

2.2.3 Proposición. *Sea M^n variedad n-dimensional con conexión ∇ y métrica g compatible con la conexión. Entonces las componentes de la conexión son determinadas unívocamente por las componentes del tensor métrico y están dadas por*

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}(g_{li,j} + g_{lj,i} - g_{ij,l}) \tag{2.12}$$

donde g^{kl} es la matriz inversa a g_{lj}, es decir $g^{kl} g_{lj} = \delta^k_j$.

A los coeficientes de la conexión Γ^k_{ij} de una base coordenada se les llama *símbolos de Christoffel*

2.2.1. Aplicación de la derivada de Lie

El interés de la derivada de Lie radica en lo siguiente. Supongamos que φ es una isometría. Es decir, esta función deja invariante la métrica. La derivada de Lie de la métrica a lo largo de su vector tangente $\dot{\varphi} = X$ es cero. Es decir, las simetrías de un problema conducen siempre a derivadas de Lie de la métrica a lo largo del vector de la isometría igual a cero. A los vectores tangentes generados por una isometría se les llama vectores de Killing.

2.2.4 Definición. Sean M_1 y M_2 dos variedades Riemannianas con tensores métricos g_1 y g_2, respectivamente. Un difeomorfismo $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ es una isometría si

$$\varphi^* g_2 = g_1 \tag{2.13}$$

por tanto, podemos definir formalmente un vector de Killing.

2.2.5 Definición. Sea φ un grupo uniparamétrico de transformaciones sobre una variedad Riemanniana, M^n, tal que cada transformación $\varphi_t : M^n \longrightarrow M^n$ sea una isometría $(\varphi_t^* g = g)$ si X es el generador infinitesimal de φ. se dice que X es un *campo vectorial de Killing* y se tiene

$$\mathcal{L}_X g = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t^* g - g}{t} = 0 \tag{2.14}$$

La manera de encontrar los vectores de Killing de una variedad M^n es la siguiente

2.2.6 Proposición. *Un vector de Killing $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ cumple con la ecuación diferencial*

$$\mathcal{L}_X g_{ij} = X^k g_{ij;k} + g_{kj} X^k_{;i} + g_{ik} X^k_{;j} = 0 \tag{2.15}$$

donde la métrica está dada como $g = g_{ij} dx^i \circ dx^j$

Para las métricas compatibles con la conexión, los vectores de Killing obedecen la relación

$$X_{j;i} + X_{i;j} = 0 \tag{2.16}$$

donde hemos definido $X_{k;i} = g_{kl} X^l_{;i}$. A esta ecuación se le llama la ecuación de Killing

2.2.2. Formas de Cartan

Ahora veamos algunas de las propiedades de tensores al ser sometidos a los operadores diferenciales.

2.2.7 Proposición. *Sean $\{\omega^a = e^a_i dx^i\}$ uno-formas y una base del espacio cotangente T^*M y ∇ la derivada covariante en M^n, tal que Γ^a_{bc} es su conexión asociada. Entonces se sigue*

$$d\omega^a = \Gamma^a_{bc}\, \omega^b \wedge \omega^c \tag{2.17}$$

esta es la llamada primera forma fundamental de Cartan.

Es conveniente definir la uno-forma de conexión como

$$\Gamma^a_{\ b} = \Gamma^a_{bc}\omega^c$$

de tal forma que

$$d\omega^a = -\Gamma^a_{\ b} \wedge \omega^b \tag{2.18}$$

Ahora vamos a introducir la dos forma de curvatura. La curvatura se define en un espacio con conexión, no necesariamente con métrica. Formalmente su definición es

2.2.8 Definición. Sea M^n una variedad y ∇ una conexión en M^n. Entonces la *dos-forma de curvatura* o *segunda forma fundamental de Cartan*, se define como

$$R^a_{\ b} = d\Gamma^a_{\ b} + \Gamma^a_{\ c} \wedge \Gamma^c_{\ b} \tag{2.19}$$

En términos de sus componentes podemos escribir la dos-forma de curvatura como ciertos coeficientes por la base de la dos-formas, es decir

$$R^a_{\ b} = \frac{1}{2} R^a_{bcd}\ \omega^c \wedge \omega^d \tag{2.20}$$

donde claramente $\{\omega^a\}$ es una base de T^*M^n. A las componentes de R^a_{bcd} se les conoce como *tensor de curvatura*, ya que a su vez son las componentes de un tensor que se puede escribir como

$$\mathbf{R} = R^a_{bcd}\ e_a \otimes \omega^b \otimes \omega^c \otimes \omega^d$$

2.3. Métrica de $\mathbb{R}^3$ en coordenadas esféricas

Para esta sección usaremos dos sistemas de coordenadas, el primero es el canónico (x, y, z) y el segundo es el de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), también usaremos las matrices de cambio de coordenadas en vectores y 1-formas encontradas en las ecuaciones (1.13) y (1.22). Usando que

$$\vec{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}_{\ \alpha'}\ \vec{e}_{\beta}$$

y las expresiones que relacionan estas coordenadas

$$\begin{aligned} x &= rcos\phi\ sen\theta \\ y &= rsen\phi\ sen\theta \\ z &= rcos\theta \end{aligned}$$

se pueden obtener las relaciones entre estos vectores.

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \frac{\partial x}{\partial r}\vec{e}_x\ +\ \frac{\partial y}{\partial r}\vec{e}_y\ +\ \frac{\partial z}{\partial r}\vec{e}_z \qquad (2.21) \\ &= cos\phi\ sen\theta\ \vec{e}_x\ +\ sen\phi\ sen\theta\ \vec{e}_y\ +\ cos\theta\ \vec{e}_z \qquad (2.22) \end{aligned}$$

$$\vec{e}_\theta = rcos\phi\ cos\theta\ \vec{e}_x\ + r\ rsen\phi\ cos\theta\ \vec{e}_y\ -\ rsen\theta\ \vec{e}_z \tag{2.23}$$

$$\vec{e}_\phi = -rsen\phi\ sen\theta\ \vec{e}_x\ +\ rcos\phi\ sen\theta\ \vec{e}_y \tag{2.24}$$

Ahora, la métrica puede ser expresada como en la ecuación (2.5) y para encontrar las componentes ocuparemos la ecuación (2.8) (aquí también vamos a usar que el tensor métrico es un tensor simétrico)

$$\begin{aligned} g_{rr} &= 1 \\ g_{r\theta} &= 0 \\ g_{r\phi} &= 0 \\ g_{\theta\theta} &= r^2 \\ g_{\theta\phi} &= 0 \\ g_{\phi\phi} &= r^2 sen^2\theta \end{aligned}$$

para las coordenadas cartesianas, la métrica queda como

$$dl^2_{\mathbb{R}^3} = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

usando la notación $dx \otimes dx = dx^2$

$$dl^2_{\mathbb{R}^3} = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2.25}$$

ahora, en coordenadas esféricas

$$dl^2_{\mathbb{R}^3} = g_{rr} dr \otimes dr + g_{\theta\theta}\ d\theta \otimes d\theta + g_{\phi\phi} d\phi \otimes d\phi$$

$$dl^2_{\mathbb{R}^3} = dr^2 + r^2\ d\theta^2 + r^2 sen^2\theta\ d\phi^2 \tag{2.26}$$

2.4. Métrica de la esfera S^3 en coordenadas esféricas

Como la esfera está inmersa en $\mathbb{R}^4$, la forma más simple de encontrar la métrica de la esfera es sustituyendo la ecuación de la esfera de radio a, $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2$, en la métrica euclideana de $\mathbb{R}^4$, $dl^2_{\mathbb{R}^4} = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$.

Sustituyendo

$$dw^2 = \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{a^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}$$

la métrica queda como

$$dl^2_{S^3} = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{a^2 - (x^2 + y^2 + z^2)} \tag{2.27}$$

usando coordenadas esféricas $x = Rcos\phi\ sen\theta$, $y = Rsen\phi\ sen\theta$, $z = Rcos\theta$, los primeros tres términos son la métrica de $\mathbb{R}^3$ en coordenadas esféricas, así que solamente hace falta trabajar el último término

$$dw^2 = \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{a^2 - (x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{R^2 dR^2}{a^2 - R^2}$$

sustituyendo lo anterior y la ecuación (2.26) en (2.27) se tiene que

$$dl^2_{S^3} = dR^2 + R^2\ d\theta^2 + R^2 sen^2\theta\ d\phi^2 + \frac{R^2 dR^2}{a^2 - R^2}$$

$$dl^2_{S^3} = R^2\ d\theta^2 + R^2 sen^2\theta\ d\phi^2 + \frac{a^2 dR^2}{a^2 - R^2}$$

escribiendo la métrica de la esfera en términos del cociente $r = R/a$, la métrica se ve como

$$dl^2_{S^3} = a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 \left(d\theta^2 + sen^2\theta\ d\phi^2 \right) \right] \tag{2.28}$$

2.5. Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

En relatividad general, el Universo se describe como una superficie cuadridimensional provista de una métrica específica. Este espacio ha sido denominado por los geómetras como espacio de Riemann. Sin embargo, un espacio de Riemann cualquiera no puede representar un espacio en el que reina un campo gravitatorio y por lo tanto un universo: solo pueden pretenderlo aquellos cuyas características geométricas (métrica y curvatura) satisfacen las ecuaciones fundamentales de la relatividad general. Estas ecuaciones relacionan la geometría del espacio-tiempo con la distribución de la materia y energía en el Universo [7].

Las ecuaciones se pueden resolver por medio de dos hechos que se conocen como los dos principios cosmológicos [7]:

- No hay un punto especial en el universo, las galaxias están distribuidas uniformemente en el espacio a grandes escalas, es decir, el universo es homogéneo a grandes escalas.
- No hay una dirección especial en el universo, las galaxias están uniformemente distribuidas en diferentes direcciones angulares a grandes escalas. Se dice que el universo es isótropo.

Sabemos que estos dos principios no son ciertos a pequeñas escalas, porque hay pequeñas inhomogeneidades. Sin embargo, la validez de estas hipótesis introducidas por Albert Einstein en 1915 y luego durante los años 20 por Alexandre Lemaitre, parece actualmente asegurada, en especial por dos observaciones astrofísicas: la estructuración a gran escala de la materia en el Universo y la isotropía de la radiación cosmológica a la temperatura de 2.738 K [7].

Las soluciones de las ecuaciones de Einstein obtenidas por Friedmann y Lemaitre llevan a unos modelos sencillos y simétricos desde el punto de vista geométrico, ya que poseen en todo instante, una curvatura idéntica en todos los puntos. Sin embargo, esta curvatura puede variar con el tiempo, lo que les confiere a estos modelos un carácter dinámico. En lo que respecta a las posibles geometrías del universo, es decir más exactamente a las formas tridimensionales que puede presentar en un determinado instante, es que son tres:

- El modelo de la curvatura constante positiva implica un espacio esférico y cerrado, de volumen finito; es el análogo tridimensional de la superficie esférica.
- El modelo de la curvatura constante negativa, de geometría de tipo hiperbólico, es abierto y de extensión infinita.
- En cuanto al tercer modelo posible, tiene curvatura nula, se trata de un modelo euclídeo abierto, llamado Einstein-de Sitter, cuyo volumen es infinito.

A cada uno de los tipos de geometría posibles está asociada una dinámica diferente: así, en el caso del modelo cerrado de geometría esférica, a una fase de expansión desacelerada le tendría que seguir una fase de contracción simétrica que se termina en una gran implosión, mientras que en la expansión de los modelos abiertos, tanto si tienen geometría hiperbólica como euclídea, no tiene fin. Sin embargo, se desacelera progresivamente, terminando incluso por anularse en un futuro infinito en el caso del modelo euclídeo.

La métrica de Friedmann-Robertson-Walker tiene una forma general que es:

$$dl^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 \left(d\theta^2 + sen^2\theta \; d\phi^2 \right) \right] \tag{2.29}$$

Donde $k > 0$, $k = 0$ o $k < 0$. Todos los modelos homogéneos e isótropos del universo pueden ser representados con esta métrica. Se utilizan las unidades naturales estableciendo la velocidad de la luz a la unidad.

Para $k > 0$ las hipersuperficies espaciales tiene curvatura constante positiva y usualmente son llamados modelos cerrados. Para $k = 0$ las hipersuperficies espaciales son euclideas y son llamadas modelos planos. Finalmente, para $k < 0$ las hipersuperficies espaciales tienen curvatura constante negativa y son llamados modelos abiertos. Aunque la forma del espacio no está completamente determinada con las hipótesis de homogeneidad e isotropía, también hace falta determinar la función $a(t)$ con las ecuaciones de Einstein, esta función se llama el factor de expansión o el factor de escala y depende explícitamente del tiempo.

Para obtener la métrica de Friedmann-Robertson-Walker, en el caso de un modelo con curvatura constante positiva, que es el que se obtiene usando S^3 como la parte espacial solamente hacer falta agregar la parte temporal a la ecuación (2.28), por lo que queda como

$$dl^2_{FRW} = -dt^2 + a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 \left(d\theta^2 + sen^2\theta \; d\phi^2 \right) \right] \tag{2.30}$$

que es exactamente lo mismo si sustituimos $k = 1$ en la ecuación (2.29). Las tres distintas situaciones presentadas son válidas cuando la constante cosmológica es cero ($\Lambda = 0$) y cuando el universo contiene solamente materia, por esta razón su curvatura, densidad y destino están estrechamente relacionados. En estos modelos dominados solamente por masa, si la densidad es mayor que la densidad crítica, entonces el universo terminará en implosión; si la densidad es menor o igual que la densidad crítica, el universo terminará en un gran enfriamiento.

Sin embargo, para el caso en que la constante cosmológica es distinta de cero, esta provee una fuerza atractiva o repulsiva según sea el signo de la constante. En los universos donde hay materia y además la constante cosmológica es distinta de cero ya no se cumple que la densidad dicta el destino, por tanto hay más escenarios posibles.

Un ejemplo es el gran rebote en el cual el universo empieza contrayéndose hasta que se alcanza el punto en el que la constante cosmológica positiva provee la fuerza suficiente para contrarrestar la contracción y empezar una expansión (para más detalles de estos modelos ver [8]).

Capítulo 3

Haces fibrados

Este capítulo muestra las definiciones y resultados preliminares relativos a los haces fibrados, parte esencial en el desarrollo de nuestro modelo matemático de las teorías de unificación (capítulo 5).

3.1. Espacios G

En esta sección se introduce una estructura algebraica dentro de un espacio topológico, dándole al conjunto que forma el espacio topológico una estructura de grupo. A estos espacios se les llama grupos topológicos.

3.1.1 Definición. Un *grupo topológico* es una terna $(G, \cdot, \tau_g)$ donde $(G, \cdot)$ es un grupo y (G, τ_g) es un espacio topológico, además las siguientes funciones son continuas
la función de multiplicación

$$\begin{aligned} \cdot :& G \times G \longrightarrow G \\ &(a, b) \mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

y la función inversa

$$\begin{aligned} inv :& G \longrightarrow G \\ &a \mapsto inv(a) = a^{-1} \end{aligned}$$

Ahora veamos los espacios G que son la acción de un grupo topológico sobre un espacio topológico

3.1.2 Definición. Un *espacio G derecho* es una terna (E, G, ψ), donde E es un espacio topológico, G es un grupo topológico con identidad, $e \in G$ y $\psi : E \times G \longrightarrow E$ es una función continua tal que

- $\psi(x, e) = x$
- $\psi(x, g_1 \cdot g_2) = \psi(\psi(x, g_1), g_2)$

3.1.3 Definición. Sea (E, G, ψ) un espacio G derecho y $g \in G$. La acción derecha ψ de G sobre E es llamada

- *efectiva* si $\psi(x, g) = x$ para toda $x \in E$ implica $g = e$
- *libre* si $\psi(x, g) = x$ para algún $x \in E$ implica $g = e$
- *transitiva* si para toda $x \in E$ existe $y \in E$ tal que $y = \psi(x, g)$

3.1.4 Definición. Dos espacios G derechos $\gamma = (E, G, \psi)$ y $\gamma' = (E', G, \psi')$ son *isomorfos* si existe un homeomorfismo $h : E \longrightarrow E'$ tal que

$$\psi' \circ (h \times id_G) = h \circ \psi$$

que se denota como $\gamma \overset{h}{\cong} \gamma'$ o $\gamma \overset{h \times id|_G}{\cong} \gamma'$, lo cual se puede ver en el siguiente diagrama que conmuta

$$\begin{array}{ccc} E \times G & \xrightarrow{\psi} & E \\ h \times id|_G \downarrow & & \downarrow h \\ E' \times G & \xrightarrow{\psi'} & E' \end{array}$$

3.2. Haces

Para más detalles ver [9]

3.2.1 Definición. Un *haz* es un estructura $\Xi = (E, B, \pi)$ donde E y B son espacios topológicos y $\pi : E \to B$ es una función sobre y continua. E es el espacio total, B es el espacio base y π es la función de proyección, lo cual se puede ver como

$$\begin{array}{cc} & E \\ \pi & \downarrow \\ & B \end{array}$$

3.2.2 Definición. Dos haces $\Xi' = (E', B, \pi')$ y $\Xi = (E, B, \pi)$ son *isomorfos*, $\Xi \overset{f}{\cong} \Xi'$, si existe un homeomorfismo $f : E \to E'$ tal que $\pi' \circ f = \pi$, que se puede ver como

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & B & \end{array}$$

3.2.3 Definición. Un *haz trivial* es un haz $\Xi = (E, B, \pi)$ para el cual existe un espacio topológico F y un homeomorfismo $\varphi : E \to B \times F$ tal que $\Xi \overset{\varphi}{\cong} (B \times F, B, \pi_1)$, lo que se puede ver en el siguiente diagrama como

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & B \times F \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & B & \end{array}$$

3.2.4 Definición. Un *haz fibrado* es un haz $\Xi = (E, B, \pi)$ que es localmente trivial, es decir, para toda $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ cubierta de B y cada sub-haz $(\pi^{-1}(U_\alpha), U_\alpha, \pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}) := \alpha$ existe F espacio topológico tal que $(U_\alpha \times F, U_\alpha, \pi_1) := \alpha_F$ es isomorfo a α, es decir, existe $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$ homeomorfismo y además se cumple que $\pi^{-1} \circ \varphi_\alpha = \pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$.

Gráficamente se puede ver como

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times F \\ \pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}) \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & U_\alpha & \end{array}$$

φ_α se llama *la trivialización local del haz*, la pareja $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ se llama *sistema de coordenadas local del haz* y F es *la fibra del haz.*

3.2.5 Definición. Una *sección* s de un haz $\Xi = (E, B, \pi)$ es una función continua $s : B \to E$ tal que $\pi \circ s = id|_B$

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ s \uparrow & \downarrow & \pi \\ & B & \end{array}$$

Los haces triviales siempre tienen al menos una sección, es decir, se puede definir una función que vaya del espacio base al espacio total.

Al tomar un haz fibrado (E, B, π, F, U) con $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ cubierta de B y F fibra del haz y dos sistemas de coordenadas locales del haz $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces se pueden definir las funciones de transición.

3.2.6 Definición. Las *funciones de transición* del haz (E, B, π, F, U) son funciones

$$\begin{array}{llll} d_{\alpha\beta} : & U_\alpha \cap U_\beta & \longrightarrow Aut(F) & \\ & b & \mapsto d_{\alpha\beta}(b) : & F \longrightarrow F \\ & & & f \mapsto d_{\alpha\beta}(b)(f) \end{array}$$

tales que quedan definidas por la composición de homeomorfismos como $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} = Id|_{U_\alpha \cap U_\beta} \times d_{\alpha\beta}$

$$\begin{array}{llll} \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F & \longrightarrow & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \\ & (b, f) & \mapsto & \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(b, f) = (b, d_{\alpha\beta}(b)(f)) \end{array}$$

3.2.7 Definición. El *grupo de estructura* del haz es el grupo que se tiene para cada F como $(\{d_{\alpha\beta}(b)\}, \circ) \underset{subgr}{\subset} Aut(F)$ en el cual la identidad está dada por $d_{\alpha\alpha}(b)$ y la inversa por $d_{\alpha\beta}(b) = (d_{\beta\alpha}(b))^{-1}$

Ahora, los haces fibrados principales son haces fibrados, localmente triviales, en el que el grupo G es lo mismo que la fibra y es lo mismo que el grupo de estructura.

3.2.8 Definición. Un *haz fibrado principal* es un sexteto (E, B, π, G, U, ψ) donde (E, B, π, G, U) es un haz fibrado y (E, G, ψ) es un espacio G derecho tal que se cumplen los isomorfismos de espacios G

$$(\pi^{-1}(U_\alpha), G, \psi) \overset{(\varphi_\alpha, \varphi_\alpha \times id|_G)}{\cong} (U_\alpha \times G, G, \delta)$$

donde

$$\begin{array}{rccl} \delta: & (U_\alpha \times G) \times G & \to & U_\alpha \times G \\ & ((x,g),g') & \mapsto & \delta((x,g),g') \quad := (x, gg') \end{array}$$

Que se puede representar como

$$\begin{array}{rcl} \pi^{-1}(U_\alpha) \times G & \xrightarrow{\psi} & \pi^{-1}(U_\alpha) \\ \varphi_\alpha \times id|_G \downarrow & & \downarrow \varphi_\alpha \\ (U_\alpha \times G) \times G & \xrightarrow{\delta} & U_\alpha \times G \end{array}$$

δ actúa libre y transitivamente sobre el haz.

Además, como (E, B, π, G, U) es un haz fibrado, entonces se cumplen los isomorfismos para haces fibrados $(\pi^{-1}(U_\alpha), U_\alpha, \pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}) \overset{\varphi_\alpha}{\cong} (U_\alpha \times G, U_\alpha, \pi_1)$

$$\begin{array}{rccl} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times G & \\ \pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}) \searrow & & \swarrow \pi_1 & \\ & U_\alpha & & \end{array}$$

Capítulo 4

Grupos de Lie

Las simetrías de los problemas conducen a la existencia de grupos actuando en espacios asociados al problema. Esta asociación está presente también en las teorías de norma, en donde un grupo de simetría está actuando sobre un espacio asociado al problema físico.

4.1. Campos invariantes por la izquierda

Se dice que un grupo es un grupo de Lie cuando posee, además de la estructura algebraica de grupo, una estructura de variedad diferenciable compatible con su estructura algebraica, en analogía a los grupos topológicos.

4.1.1 Definición. Un *grupo de Lie* es una terna $(G, \cdot, \mathcal{A})$ donde $(G, \cdot)$ es un grupo, $(G, \mathcal{A})$ es una variedad y las funciones de multiplicación

$$\begin{aligned} \cdot : & G \times G \longrightarrow G \\ & (g_1, g_2) \longmapsto g_1 \cdot g_2 = g_1 g_2 \end{aligned}$$

y la función inversa

$$\begin{aligned} inv : & G \longrightarrow G \\ & g \longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

ambas son suaves. La dimensión del grupo es la dimensión de la variedad.

En otras palabras, si G es un grupo de Lie, localmente existen coordenadas que etiquetan los elementos del grupo de manera que las coordenadas del producto $g_1 g_2$ son funciones diferenciables de las coordenadas de g_1 y g_2. Las coordenadas de g^{-1} son, a su vez, funciones diferenciables de las de g.

Veremos que hay un álgebra de Lie aociada con cada grupo de Lie. La esencia de la teoría de Lie es estudiar los grupos en términos de sus álgebras.

Sea $(G, \cdot, \mathcal{A})$ un grupo de Lie, entonces *las traslaciones derechas e izquierdas* se definen como

$$\begin{aligned} L_g : & G \longrightarrow G \\ & g' \longmapsto L_g(g') = gg' \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} R_g : & G \longrightarrow G \\ & g' \longmapsto R_g(g') = g'g \end{aligned}$$

L_g y R_g son aplicaciones diferenciables y además son difeomorfismos ya que $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ y $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$ para todo $g \in G$.

4.1.2 Definición. Sea $X \in TG$ en donde $(G, \cdot, \mathcal{A})$ es un grupo de Lie. Se dice que X es *invariante por la izquierda (por la derecha)* si se tiene que

$$dL_g\big|_{g'}(X_{g'}) = (L_{g*})_{g'}(X_{g'}) = X_{g'} \circ L_g^* = X_{gg'} \tag{4.1}$$

$$dR_g\big|_{g'}(X_{g'}) = (R_{g*})_{g'}(X_{g'}) = X_{g'} \circ R_g^* = X_{g'g} \tag{4.2}$$

(esto al usar la notación dada en la ecuación (1.14)) para todos $g, g' \in G$

Una de las consecuencias es que los vectores quedan determinados si escogemos un solo punto de ellos. En particular podemos escoger su valor en la identidad (aunque cualquier punto podría funcionar), esto puede ser escrito como

4.1.3 Proposición. *Todo campo vectorial invariante por la izquierda o derecha es determinado por su valor en la identidad*

Esto se cumple ya que si $X \in TG$ invariante por la izquierda y $g \in G$, se cumple que

$$dL_g\big|_e(X_e) = X_g \tag{4.3}$$

análogamente para R_g. Por otra parte, también se tiene el recíproco

4.1.4 Proposición. *Si $X \in TG$ en un grupo de Lie y se cumple que $X_g = dL_g\big|_e(X_e)$ para todo $g \in G$, esto implica que X es invariante por la izquierda (análogamente por la derecha).*

4.1.5 Proposición. *Sean $X, X' \in TM^m$ relacionados bajo $\varphi \in C^\infty(M^m, N^n)$ con $Y, Y' \in TN^n$ respectivamente. Entonces $d\varphi([X, X']) = [Y, Y']$, es decir, $[X, X']$ y $[Y, Y']$ están φ-relacionados.*

Si nos limitamos a los campos del espacio tangente que son relacionados por la traslación izquierda. La suma usual de campos vectoriales y la multiplicación por números reales hacen a este espacio un espacio vectorial, además, con la operación del paréntesis de Lie tenemos una estructura de álgebra en el espacio tangente del grupo de Lie. A esta álgebra se le conoce como el álgebra de Lie del grupo de Lie. Es decir, en un grupo de Lie, el subespacio del espacio tangente de los campos asociados por la traslación izquierda forman el álgebra de Lie asociada al grupo.

4.1.6 Corolario. *Los campos invariantes por la izquierda forman un sub-álgebra de Lie, $\mathcal{G}$, de TG llamada* álgebra de Lie *correspondiente al grupo de Lie G.*

De la fórmula (4.3) se deduce que cada vector ξ tangente a G en la identidad ($\xi \in T_eG$) define un campo vectorial X, invariante por la izquierda, dado que

$$X_g = dL_g|_e\xi \tag{4.4}$$

4.1.7 Proposición. *La función $\mathcal{G} \longrightarrow T_eG$ que envía cada $X \in \mathcal{G}$ a su valor $X_e \in T_eG$ es un isomorfismo lineal.*

La función es lineal y es inyectiva, si $X_e = 0$, entonces $X_a = dL_a(X_e) = 0$ para todo a. Para probar que es sobre, si $\xi \in T_eG$, por la ecuación (4.4), tenemos que define un campo vectorial $X_a = dL_a|_e(\xi)$ para toda $a \in G$. Entonces X es invariante por la izquierda y $X_e = \xi$.

De esta forma, el sub-álgebra $\mathcal{G}$ es isomorfa a T_eG en cada punto $g \in G$ ($T_eG \simeq \mathcal{G}$). Normalmente se toma el álgebra de Lie $\mathcal{G}$ respecto a G como el álgebra de vectores invariantes por la izquierda en la identidad $e \in G$.

El paréntesis de Lie de cualquier par de elementos ξ y $\zeta \in T_eG$ se define como

$$[\xi, \zeta] \equiv [X, Y]_e$$

donde X y Y son los campos vectoriales invariantes por la izquierda tales que $\xi = X_e$ y $\zeta = Y_e$. Por tanto, con el paréntesis de Lie, T_eG se convierte en un álgebra de Lie (ver sección 1.2.6) isomorfa al álgebra de Lie del grupo G, la existencia de este isomorfismo entre los campos vectoriales invariantes por la izquierda y los vectores tangentes en la identidad, muestra que la dimensión del álgebra de Lie de G coincide con la dimensión de G.

Si $dL_g(X) = X$ y $dL_g(Y) = Y$, resulta que $dL_g([X, Y]) = [X, Y]$ por la proposición 4.1.5.

También, si el conjunto de vectores $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ es una base de T_eG, el paréntesis $[\xi_i, \xi_j]$ pertenece a T_eG, por tanto, existe un conjunto de números reales c_{ij}^k con $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$ tales que $[\xi_i, \xi_j] = c_{ij}^k \xi_k$. Con esta base podemos definir una base a través de todo el espacio TG usando vectores invariantes por la izquierda. Sea $\{X_1, \ldots, X_n\}$ base de TG, tal que $dL_g(\xi_i) = X_i(g)$ ya que $(dL_g|_e(\xi_i) = X_{i\ ge} = X_i(g)$, y sean $\theta^i \in T^*G$ sus duales, es decir, $\langle \theta^\mu, X_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu$. Como $[X_i, X_j]$ es también invariante por la izquierda, se tiene $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$.

Las constantes c_{ij}^k reciben el nombre de *constantes de estructura* de G con respecto a la base $\{X_i\}$. La antisimetría del paréntesis y la identidad de Jacobi implican que las constantes de estructura deben satisfacer las relaciones

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \tag{4.5}$$

y

$$c_{ij}^m c_{mk}^l + c_{jk}^m c_{mi}^l + c_{ki}^m c_{mj}^l = 0 \quad (Identidad\ de\ Jacobi) \tag{4.6}$$

4.2. La representación adjunta y la forma de Maurer-Cartan

Primero vamos a definir la función A_g

4.2.1 Definición. Sea $g \in G$ grupo de Lie y

$$\begin{aligned} A_g : & G \longrightarrow G \\ & g' \longmapsto A_g(g') := gg'g^{-1} \end{aligned}$$

Lo interesante es que A_g es un isomorfismo en el grupo de Lie. Además, $A_{gg'} = A_g \circ A_{g'}$ para todos $g, g' \in G$.

Para trabajar con los grupos, se utiliza el hecho de que estos forman clases de equivalencia, y entonces es más fácil trabajar con algún representante de la clase. A este representante lo llamamos un representante del grupo. Formalmente la definición es

4.2.2 Definición. Sea V un espacio vectorial, G un grupo de Lie y $Gl(V)$ el conjunto de transformaciones lineales en V invertibles. Una representación de G sobre V es un homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow Gl(V)$ del grupo G al grupo $(Gl(V), \circ)$.

Un representante singular es la representación adjunta del grupo, la cual se define como

4.2.3 Proposición. *La función*

$$\begin{aligned} \varphi : & G \longrightarrow Gl(T_eG) \\ & g \longmapsto \varphi(g) := d\ A_g|_e : Ad_g \end{aligned}$$

es una representación de G sobre T_eG, llamada la representación adjunta

Ahora vamos a definir lo que es la invarianza por la izquierda o por la derecha de una 1-forma sobre el grupo de Lie. Sobre el grupo, los vectores interesantes son los vectores invariantes por la izquierda o la derecha, este concepto lo podemos trasladar al espacio cotangente de la siguiente forma.

4.2.4 Definición. Sea $\omega_g \in T_g^*G$, G grupo de Lie. ω_g es *invariante por la izquierda* si para todos $g, g' \in G$

$$(L_g^*)_{g'}(\omega_{g'}) = \omega_{g^{-1}g'}$$

o ω_g es *invariante por la derecha si*

$$(R_g^*)_{g'}(\omega_{g'}) = \omega_{g'g^{-1}}$$

Notar que

$$(L_g^*)_{g'} : T_{g'}^*G \longrightarrow T_{L_g^{-1}(g')}^*G = T_{g^{-1}g'}^*G$$

y

$$(R_g^*)_{g'} : T_{g'}^*G \longrightarrow T_{R_g^{-1}(g')}^*G = T_{g'g^{-1}}^*G$$

Al igual que los vectores invariantes por la izquierda o derecha, las 1-formas invariantes quedan determinadas por su valor en un punto, donde normalmente se escoge la identidad.

4.2.5 Proposición. *Si $\omega \in T^*G$ es invariante por la izquierda o por la derecha, entonces ω está determinada por su valor en la identidad del grupo.*

Esta proposición se cumple puesto que para el caso de invarianza por la izquierda se tiene que

$$\omega_g = (L^*_{g^{-1}})_e(\omega_e)$$

Ahora, ya podemos introducir la forma canónica de Maurer-Cartan. Su definición está dada como sigue

4.2.6 Definición. Sea G grupo de Lie y $\mathcal{G}$ su respectiva álgebra. La *forma canónica o de Maurer-Cartan* sobre el grupo de Lie G es la 1-forma $\omega_g \in T^*_gG \otimes \mathcal{G}$, con

$$\begin{aligned} \omega_g :& T_gG \longrightarrow T_eG \simeq \mathcal{G} \\ & X_g \longmapsto \omega_g(X_g) := dL_{g^{-1}}|_g(X_g) \end{aligned}$$

Por otra parte

4.2.7 Proposición. *Sea G un grupo de Lie y ω su forma de Maurer-Cartan. Entonces ω es invariante por la izquierda, es decir*

$$(L^*_g)_{g'}(\omega_{g'}) = \omega_{g^{-1}g'} \tag{4.7}$$

Con lo demostrado anteriormente y la proposición 4.2.5 se tiene que la forma de Maurer-Cartan está determinada por su valor en la identidad.

Si la forma de Maurer-Cartan es invariante por la izquierda, al tomar la acción derecha sobre ella se tiene el siguiente resultado

4.2.8 Proposición. *Sea G un grupo de Lie y ω su forma de Maurer-Cartan. Se sigue que*

$$(R^*_g)_{g'}(\omega_{g'}) = Ad_{g^{-1}} \circ \omega_{g'g^{-1}} \tag{4.8}$$

4.3. Subgrupos uniparámetricos

En cualquier grupo de Lie, los subgrupos uniparamétricos son importantes.

4.3.1 Definición. Un conjunto de elementos de G, $\{g_t\}$, con $t \in \mathbb{R}$ es un *subgrupo uniparamétrico* de G si $g_t g_s = g_{t+s}$ y g_t depende directamente del parámetro t.

Esto implica que $g_0 = e$ y que $g_{-t} = (g_t)^{-1}$. La aplicación de $\mathbb{R}$ en G dada por $t \mapsto g_t$ es entonces una curva (diferenciable) sobre G que se inicia en el origen.

4.3.2 Proposición. *Sea $\{g_t\}$, con $t \in \mathbb{R}$, un subgrupo uniparámetrico de G, entonces la curva $t \mapsto g_t$ es la curva integral que se inicia en e de algún campo vectorial invariante por la izquierda (o por la derecha).*

Capítulo 5

Modelo matemático de teorías de unificación

En este capítulo se desarrollará el modelo matemático para las teorías de unificación, tomando como base los haces fibrados. Posteriormente se introducirán los potenciales y campos de Yang-Mills para ver al campo electromagnético como un ejemplo de estos campos. Tratamos el campo electromagnético porque será necesario en el capítulo siguiente cuando lo usemos como parte de la aplicación del modelo matemático desarrollado en este capítulo al caso particular de la teoría de Kaluza-Klein (ver [10])

Sea P el haz fibrado principal $(P, B^4, \pi, G, U, \psi)$ con conexión ω y cuya fibra es un grupo paracompacto G y su base es un espacio riemanniano cuatro dimensional.

La base de vectores de TP es $\{\hat{e}_A\} = \{\hat{e}_\alpha, \hat{e}_a\}$ se compone de $\{\hat{e}_\alpha\}$ (índices con letras griegas), vectores que al ser proyectados en el espacio horizontal, en nuestro caso de 4 dimensiones, son distintos de cero y $\{\hat{e}_a\}$ (índices con letras latinas) vectores cuya proyección al espacio horizontal B^4 es cero. Es decir, para $p \in P$ podemos descomponer el espacio T_pP en un espacio horizontal H_p que se compone de vectores que al ser proyectados al espacio base nos dan un vector distinto de cero, y de un espacio vertical V_p de vectores que al ser proyectados al espacio base nos dan cero

$$T_pP = H_p \times V_p$$

por tanto, cualquier vector $v \in T_pP$ puede ser escrito unívocamente en la forma

$$v = v_H + v_V \tag{5.1}$$

con $v_H \equiv hor\ v \in H_p$ su componente horizontal y $v_V \equiv ver\ v \in V_p$ la correspondiente componente vertical.

Esta definición induce una métrica en P, ya que las hipótesis anteriores separan el espacio en una parte vertical, dada por el grupo G y otra horizontal, determinada por la sección cruzada σ.

Así, la métrica sobre P puede ser definida como (ver [3]):

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{U}_v, \hat{V}_v) = &\quad \tilde{g}(\hat{U}_v, \hat{V}_v) \\
\hat{g}(\hat{U}_H, \hat{V}_v) = &\quad 0 \\
\hat{g}(\hat{U}_H, \hat{V}_H) = &\quad g(d\pi(\hat{U}_H), d\pi(\hat{V}_H))
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

donde $\tilde{g}$, g y $\hat{g}$ son las métricas sobre G, sobre el espacio B^4 y sobre P respectivamente.

Sea $\{\hat{\omega}^A\} = \{\hat{\omega}^\alpha, \hat{\omega}^a\}$ base de las 1-formas definidas sobre P, compuesta de la base dual a $\{\hat{e}_\alpha\}$ y a $\{\hat{e}_a\}$. Por tanto, la métrica en P puede escribirse como combinación lineal de estas bases, es decir

$$\hat{g} = g_{\alpha\beta}\ \hat{\omega}^\alpha \otimes \hat{\omega}^\beta + I_{ab}\ \hat{\omega}^a \otimes \hat{\omega}^b \tag{5.3}$$

la cual es definida sobre todo P. Por definición, las proyecciones de los vectores base en TP a TU están dadas por:

$$d\pi(\hat{e}_\alpha) = e_\alpha \tag{5.4}$$

$$d\pi(\hat{e}_a) = 0 \tag{5.5}$$

donde $\{e_\alpha\}$ es base del espacio tangente del espacio base $U \in B^4$ y $\pi : P \longrightarrow B^4$ es la función de proyección.

Por otra parte, como P es un haz fibrado (ver Figura 5.1) entonces es localmente un producto cartesiano de un conjunto abierto $U \in B^4$ con la fibra G y existe un homeomorfismo φ, llamado la trivialización de P tal que

$$
\begin{aligned}
\varphi : &P \longrightarrow U \times G \\
&x \longmapsto (b, g)
\end{aligned}
$$

También se tiene la proyección canónica de $U \times G$ sobre U, dada por

$$
\begin{aligned}
\pi_1 : &U \times G \longrightarrow U \\
&(x, a) \longmapsto x
\end{aligned}
$$

de tal forma que

$$\pi = \pi_1 \circ \varphi$$

Ahora, las proyecciones de los vectores base en TP a $T(U \times G)$ están dadas por:

$$d\varphi(\hat{e}_\alpha) = B^\beta_\alpha e_\beta - A^m_\alpha e_m \tag{5.6}$$

$$d\varphi(\hat{e}_a) = C^\beta_a e_\beta + D^m_a e_m \tag{5.7}$$

donde $\{e_m\}$ es una base invariante por la izquierda del espacio tangente de G, es decir, a $\mathcal{G}$. Estas últimas ecuaciones se cumplen porque $d\varphi(\hat{e}_\alpha)$ y $d\varphi(\hat{e}_a)$ pertenecen al espacio tangente de $U \times G$,

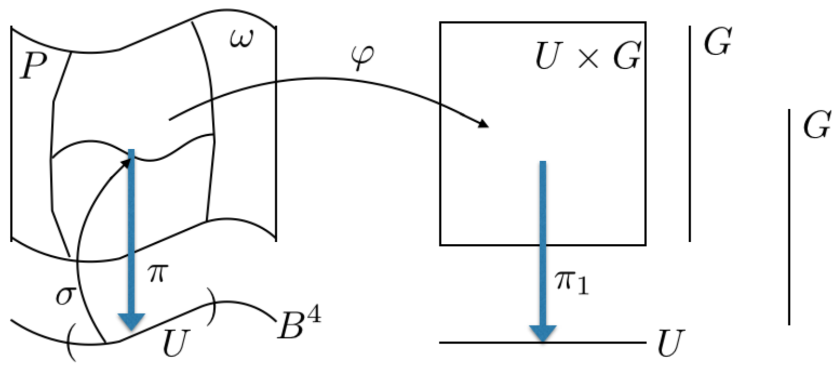

Figura 5.1: Matos, T. (2017). El haz fibrado principal P, invariante ante el grupo (la fibra) G y base el espacio tiempo plano B^4. σ es una sección cruzada del haz, π es la proyección y φ es una trivialización compatible con σ. Tomado de [3]

entonces se escriben como combinación lineal de la base $\{e_\alpha, e_m\}$. Pero aplicando la regla de la cadena dada por la ecuación (1.15) en las ecuaciones (5.4) y (5.5), para después comparar con las ecuaciones (5.6) y (5.7), se tiene que:

$$d\pi(\hat{e}_\alpha) = d(\pi_1 \circ \varphi)(\hat{e}_\alpha) = d\pi_1 \circ d\varphi(\hat{e}_\alpha) = B^\beta_\alpha e_\beta = e_\alpha \tag{5.8}$$
$$d\pi(\hat{e}_a) = d(\pi_1 \circ \varphi)(\hat{e}_a) = d\pi_1 \circ d\varphi(\hat{e}_a) = C^\beta_a e_\beta = 0 \tag{5.9}$$

Por tanto, $B^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha$ y $C^\beta_a = 0$. El conjunto $d\pi(\hat{e}_a) = D^m_a e_m$ es una base del espacio tangente de G (invariante por la izquierda), el cual podemos reescribir como $D^m_a e_m \longrightarrow e_a$. Entonces

$$d\varphi(\hat{e}_\alpha) = e_\alpha - A^m_\alpha e_m \tag{5.10}$$
$$d\varphi(\hat{e}_a) = e_a \tag{5.11}$$

es decir, la base de $T(U \times G)$ es

$$\bar{e}_A = \begin{cases} e_\alpha - A^m_\alpha e_m \\ e_a \end{cases} \tag{5.12}$$

y la base del espacio cotangente correspondiente, para que sea una base dual a $\{\bar{e}_A\}$, es

$$\bar{\omega}_A = \begin{cases} \omega^\alpha \\ \omega^a + A^a_\alpha \omega^\alpha \end{cases} \tag{5.13}$$

donde $\{\omega^\alpha\}$ es la base dual de $\{e_\alpha\}$ y $\{\omega^a\}$ es la base dual de $\{e_a\}$. Usando esta base del espacio cotangente, podemos escribir la métrica $\bar{g}$ del haz P en la trivialización $U \times G$ como

$$\bar{g} = g_{\alpha\beta}\omega^\alpha \otimes \omega^\beta + I_{nm}(\omega^n + A^n_\alpha \omega^\alpha) \otimes (\omega^m + A^m_\beta \omega^\beta) \tag{5.14}$$

La métrica de la ecuación (5.14) es del espacio $U \times G$, para convertirla a P vamos a calcular la imagen recíproca de φ. Sea $\omega \in T^*(U \times G)$, la imagen recíproca dada por la ecuación (1.16), se escribe como

$$\varphi^*\omega = \omega \circ \varphi_* \tag{5.15}$$

aplicando la imagen recíproca a los vectores de la base $\{\bar{\omega}^A\}$ dados en la ecuación (5.13), evaluándolos en la base $\{\hat{e}_A\}$ y usando las ecuaciones (5.10) y (5.11) , se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{array}{lclclcl} \varphi^*(\omega^\alpha)(\hat{e}_\alpha) & = & \omega^\alpha(d\varphi(\hat{e}_\alpha)) & = & \omega^\alpha(e_\alpha - A^m_\alpha e_m) & = & 1 \\ \varphi^*(\omega^\alpha)(\hat{e}_a) & = & \omega^\alpha(d\varphi(\hat{e}_a)) & = & \omega^\alpha(e_a) & = & 0 \\ \varphi^*(\omega^a + A^a_\alpha\omega^\alpha)(\hat{e}_a) & = & (\omega^a + A^a_\alpha\omega^\alpha)(d\varphi(\hat{e}_a)) & = & (\omega^a + A^a_\alpha\omega^\alpha)(e_a) & = & 1 \\ \varphi^*(\omega^a + A^a_\alpha\omega^\alpha)(\hat{e}_\alpha) & = & (\omega^a + A^a_\alpha\omega^\alpha)(d\varphi(\hat{e}_\alpha)) & = & (\omega^a + A^a_\alpha\omega^\alpha)(e_\alpha - A^m_\alpha e_m) & = & 0 \end{array} \tag{5.16}$$

Para demostrar que

$$\varphi^*(\omega^\alpha) = \hat{\omega}^\alpha \tag{5.17}$$

y

$$\varphi^*(\omega^a + A^a_\alpha\omega^\alpha) = \hat{\omega}^a \tag{5.18}$$

se toma en cuenta que la imagen recíproca de $\{\bar{\omega}^A\}$ son uno-formas en T^*P que se pueden expresar como combinación de la base $\{\hat{\omega}^A\}$. Haremos el caso de la ecuación (5.17)

$$\varphi^*(\omega^\alpha) = E_\beta\hat{\omega}^\beta + F_b\hat{\omega}^b \tag{5.19}$$

evaluando esta última ecuación en $\hat{e}_\alpha$ y usando 5.16 (con la convención de suma de Einstein) se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi^*(\omega^\alpha)(\hat{e}_\alpha) &= E_\beta\hat{\omega}^\beta(\hat{e}_\alpha) + F_b\hat{\omega}^b(\hat{e}_\alpha) \\ &= E_\beta\ \delta^\beta_\alpha \\ &= E_\alpha \\ &= 1 \end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned} \varphi^*(\omega^\alpha)(\hat{e}_a) &= E_\beta\hat{\omega}^\beta(\hat{e}_a) + F_b\hat{\omega}^b(\hat{e}_a) \\ &= F_b\delta^b_a \\ &= F_a \\ &= 0 \end{aligned}$$

de donde se tiene que $\varphi^*(\omega^\alpha) = E_\beta\hat{\omega}^\beta = \hat{\omega}^\alpha$ lo cual demuestra (5.17). Para (5.18) se siguió el mismo procedimiento.

Usando estas relaciones, se encuentra que al aplicar la imagen recíproca a la métrica $\bar{g}$

$$\varphi^*\bar{g} = g_{\alpha\beta}\ \hat{\omega}^\alpha \otimes \hat{\omega}^\beta\ +\ I_{nm}\ \hat{\omega}^n \otimes \hat{\omega}^m \tag{5.20}$$

que es básicamente la ecuación (5.3).

Ahora, vamos a ver que las componentes $A^a_\beta \omega^\beta e_a$ pertenecen a la conexión del haz P proyectado en B^4.

Para cada $p \in P$ es posible establecer una familia bien definida de aplicaciones lineales

$$T_pP \longrightarrow \mathcal{G} \quad por \quad v \longrightarrow v\hat{e}r\ v.$$

Esta familia define una uno-forma ω sobre P con valores en $\mathcal{G}$.

$$\omega(v) \equiv v\hat{e}r\ v \in \mathcal{G} \ \ y \ \ \omega(hor\ v) = 0\ para\ todo\ v \in T_pP. \tag{5.21}$$

Es decir, la uno-forma de conexión ω asigna un cero a los vectores horizontales y un elemento del álgebra de Lie correspondiente a los vectores verticales. Podemos escribir ω como

$$\omega = \hat{\omega}^a e_a \tag{5.22}$$

Esto es así, ya que

$$\omega(\hat{e}_\alpha) = \hat{\omega}^a(\hat{e}_\alpha)e_a = 0 \tag{5.23}$$
$$\omega(\hat{e}_b) = \hat{\omega}^a(\hat{e}_b)e_a = \delta^a_b e_a = e_b \tag{5.24}$$

Con este resultado, podemos proyectar la conexión ω de P a $U \subset B^4$. Para hacer esto, definimos una sección cruzada usando la trivialización φ

$$\sigma : \varphi^{-1} \circ \bar{I}d : U \longrightarrow P$$

donde $\bar{I}d$ es la función definida por

$$\begin{aligned} \bar{I}d : & U \longrightarrow U \times G \\ & x \longmapsto (x, e) \end{aligned}$$

con e es la identidad en G. Entonces el la imagen recíproca de σ aplicado a ω está dado por

$$\begin{aligned} \sigma^*(\omega) &= (\bar{I}d^* \circ \varphi^{-1*})(\hat{\omega}^a e_a) \\ &= \bar{I}d^*((\omega^a + A^a_\beta \omega^\beta)e_a) \\ &= A^a_\beta \omega^\beta e_a \end{aligned}$$

esto es,

$$A = A^a_\beta \omega^\beta e_a \tag{5.25}$$

la proyección de la 1-forma de conexión hacia U.

5.1. Estructuras que se desprenden del modelo matemático

Una vez obtenida la métrica de la ecuación (5.14) podemos trabajarla con bases particulares, como la base coordenada para TB^4 y una base de campos vectoriales invariantes por la izquierda para TG, con el fin de obtener estructuras dentro de $U \times G$.

Para este caso vamos a usar las siguientes bases

- Para TB^4
  $e_\alpha = \partial_\alpha$ es decir, vamos a tomar la base coordenada
- Para $TG = \mathcal{G}$
  $e_a = t_a$ campos vectoriales linealmente independientes invariantes por la izquierda sobre G

Para la elección anterior de bases, tendremos que

$$[e_\alpha, e_\beta] = 0$$
$$[e_a, e_b] = f^c_{ab} e_c$$

La base para $T(U \times G)$, la base obtenida en la ecuación (5.12) queda como

$$\bar{e}_A = \begin{cases} \partial_\alpha - A^m_\alpha t_m \\ t_a \end{cases} \tag{5.26}$$

Esto se obtuvo mediante $d\varphi$, es decir,

$$d\varphi(\hat{e}_A) = \bar{e}_A \tag{5.27}$$

las relaciones de conmutación para la base $\bar{e}_A$ están dadas por

$$[\bar{e}_a, \bar{e}_b] = f^c_{ab} \bar{e}_c$$

$$[\bar{e}_\alpha, \bar{e}_b] = 0$$
$$[\bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta] = -F^c_{\alpha\beta} \bar{e}_c \tag{5.28}$$

por lo que las relaciones de conmutación en $\hat{e}_A$ son

$$[\hat{e}_a, \hat{e}_b] = f^c_{ab} \hat{e}_c$$
$$[\hat{e}_\alpha, \hat{e}_b] = 0$$
$$[\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta] = -F^c_{\alpha\beta} \hat{e}_c$$

otra base para $T(U \times G)$ podría ser solamente la base $\tilde{e}_A = \{e_\alpha, e_a\}$ formada por las bases de TB^4 y TG, supongamos que $\check{e}_A$ es base de TP tal que

$$d\varphi(\check{e}_A) = \tilde{e}_A$$

con

$$d\varphi(\check{e}_\alpha) = e_\alpha = \partial_\alpha$$
$$d\varphi(\check{e}_a) = e_a = t_a.$$

Para la base $\check{e}_A$ tenemos los siguientes conmutadores

$$[\check{e}_\alpha, \check{e}_\beta] = 0$$
$$[\check{e}_\alpha . \check{e}_a] = 0$$
$$[\check{e}_a, \check{e}_b] = f^c_{ab}\check{e}_c.$$

Las relaciones obtenidas en la ecuación (5.26), se puede interpretar como cambiar las derivadas parciales en el sistema por la derivada covariante

$$D_\alpha \equiv \bar{e}_\alpha = \partial_\alpha - A^a_\alpha t_a \tag{5.29}$$

en un espacio interno. Sin embargo, lo que definimos es una conexión en este espacio interno, donde se cumple una relación de conmutación para la derivada covariante dada por

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &= D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu \\
&= (\partial_\mu - A^a_\mu t_a)(\partial_\nu - A^b_\nu t_b) - (\partial_\nu - A^b_\nu t_b)(\partial_\mu - A^a_\mu t_a) \\
&= \partial_\mu\partial_\nu - \partial_\mu A^b_\nu t_b - A^a_\mu t_a \partial_\nu + A^a_\mu t_a A^b_\nu t_b - \partial_\nu\partial_\mu + \partial_\nu A^a_\mu t_a + A^b_\nu t_b \partial_\mu - A^b_\nu t_b A^a_\mu t_a \\
&= -\partial_\mu A^b_\nu t_b + A^a_\mu t_a A^b_\nu t_b + \partial_\nu A^a_\mu t_a - A^b_\nu t_b A^a_\mu t_a \\
&= -t_b \partial_\mu A^b_\nu + t_a \partial_\nu A^a_\mu + A^a_\mu A^b_\nu t_a t_b - A^b_\nu A^a_\mu t_b t_a \\
&= -t_c(\partial_\mu A^c_\nu - \partial_\nu A^c_\mu) + A^a_\mu A^b_\nu (t_a t_b - t_b t_a)
\end{aligned}$$

usando que $[t_a, t_b] = t_a t_b - t_b t_a = f^c_{ab} t_c$ en la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &= -t_c(\partial_\mu A^c_\nu - \partial_\nu A^c_\mu) + A^a_\mu A^b_\nu (t_a t_b - t_b t_a) \\
&= t_c(\partial_\nu A^c_\mu - \partial_\mu A^c_\nu) + A^a_\mu A^b_\nu f^c_{ab} t_c \\
&= t_c(\partial_\nu A^c_\mu - \partial_\mu A^c_\nu + f^c_{ab} A^a_\mu A^b_\nu)
\end{aligned}$$

haciendo

$$F^c_{\mu\nu} = \partial_\mu A^c_\nu - \partial_\nu A^c_\mu - f^c_{ab} A^a_\mu A^b_\nu \tag{5.30}$$

y

$$F_{\mu\nu} = F^c_{\mu\nu} t_c \tag{5.31}$$

entonces

$$[D_\mu, D_\nu] = -F_{\mu\nu} \tag{5.32}$$

Con esta conexión podemos definir la curvatura del espacio. La diferencia aquí es que el espacio interno no necesariamente tiene una métrica y la conexión A^a_μ es diferente a los símbolos de Christoffel.

Con el nuevo enfoque planteado en este trabajo, la traslación matemática de la idea heurística de un espacio-tiempo clásico de 4 dimensiones equipado con dimensiones extras, es la estructura de un haz fibrado principal $\pi : P \longrightarrow B^4$ de una variedad P que es $(4+k)$-dimensional, con una fibra que es una variedad compacta G de dimensión k.

Kaluza y Klein usaron una fibración con la fibra como el círculo S^1, esta fibra lleva el potencial electromagnético. Suponga ahora que $(P, \hat{g})$ es una variedad de Lorentz 5-dimensional equipada con una fibración S^1, $\pi : P \longrightarrow B^4$ sobre una variedad de Lorentz de 4 dimensiones B^4.

5.2. Yang-Mills

La teoría de Yang–Mills, que emerge por un lado de la geometría diferencial y por otro lado de la física moderna, en particular de la mecánica cuántica, es una generalización de la teoría de Maxwell del electromagnetismo (ver [11] y [12]).

Cuando el lagrangiano tiene alguna simetría interna dada por un grupo de transformaciones de norma, debería ser posible escoger en cada punto del espacio una transformación de norma diferente, sin que eso hiciese que las ecuaciones de la teoría fueran alteradas. Así, Yang y Mills buscaron el lagrangiano más general para un campo con invariancia de norma local.

De hecho, la electrodinámica cuántica ya era una teoría con invariancia de norma local, donde el grupo de norma era precisamente el grupo de Lie $U(1)$. El resultado del trabajo de Yang y Mills fue una generalización del lagrangiano de la electrodinámica cuántica, donde ahora el grupo de norma es un grupo no conmutativo.

5.2.1. Potenciales y campos de Yang Mills

Los campos de Yang-Mills derivan de m 1-formas con valores sobre el álgebra de Lie asociada al grupo de norma. Estas 1-formas funcionan como el potencial vectorial del campo electromagnético. Cada uno de estos potenciales a viene dado como

$$A^a = A^a_\beta \omega^\beta \tag{5.33}$$

A partir de estas 1-formas puede definirse un operador diferentencial o derivada covariante del campo definida como

$$D_\mu = \partial_\mu - eA^a_\mu e_a \tag{5.34}$$

donde e es un parámetro real llamado constante de acoplamiento de Yang-Mills y e_a formal la base del álgebra de Lie con conmutadores

$$[e_a, e_b] = f^c_{ab} e_c \tag{5.35}$$

5.2.2. Campos de Yang-Mills

Lo que se denomina campo de Yang-Mills viene dado por un conjunto de componentes de la intensidad de campo que matemáticamente se obtienen a partir de los potenciales vectoriales de la sección anterior. Es importante notar que una 1-forma como las descritas anteriormente puede ser interpretado matemáticamente como una conexión sobre un fibrado principal. Concretamente, a partir de las componentes de la 1-forma A que toma valores en el álgebra de Lie asociada al grupo de norma pueden calcularse las componentes físicas que caracterizan el campo de Yang-Mills propiamente dicho que matemáticamente es la 2-forma F dada por

$$F = dA + A \wedge A, \quad A = A^a_\beta \omega^\beta e_a \tag{5.36}$$

donde d es la derivada exterior y $\wedge$ es el producto cuña. Expresado en componentes la relación anterior puede expresarse como

$$F^c_{\mu\nu} = \partial_\mu A^c_\nu - \partial_\nu A^c_\mu - e f^c_{ab} A^a_\mu A^b_\nu. \tag{5.37}$$

Por tanto, la ecuación (5.25) que es la proyección de ω en T^*U corresponde al campo de Yang-Mills para esta teoría.

5.2.3. Electromagnetismo

El caso más simple posible de campo de Yang-Mills es uno cuyo norma es unidimensional y por tanto el grupo de norma es conmutativo. El campo electromagnético puede ser visto como un ejemplo de campo de Yang-Mills cuyo grupo de norma es $U(1)$ cuya álgebra de Lie asociada es isomorfa al espacio euclídeo unidimensional $\mathbb{R}$ (ver [13]).

El cuadripotencial es un tensor definido como

$$A_\mu = (-\Psi, \mathbf{A}) \tag{5.38}$$

donde Ψ y $\mathbf{A}$ son el potencial eléctrico y el potencial vector magnético respectivamente. Este tensor de campo electromagnético es una uno-forma,para obtener el tensor de Faraday tenemos que tomar su derivada exterior, es decir, $F = dA$ que de acuerdo con la definición 1.3.5 obtenemos

$$F = A_{\mu,\nu}\; dx^\nu \wedge dx^\mu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\; dx^\mu \otimes dx^\nu \tag{5.39}$$

por otra parte, como el operador $\wedge$ es antisimétrico, entonces F es antisimétrico y sus componentes están dadas por

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & A_{x,t} - A_{t,x} & A_{y,t} - A_{t,y} & A_{z,t} - A_{t,z} \\ -(A_{x,t} - A_{t,x}) & 0 & A_{y,x} - A_{x,y} & A_{z,x} - A_{x,z} \\ -(A_{y,t} - A_{t,y}) & -(A_{y,x} - A_{x,y}) & 0 & A_{z,y} - A_{y,z} \\ -(A_{z,t} - A_{t,z}) & -(A_{z,x} - A_{x,z}) & -(A_{z,y} - A_{y,z}) & 0 \end{pmatrix} \tag{5.40}$$

entonces

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{5.41}$$

Por lo general, también se escriben las componentes del tensor de Faraday en términos de las componentes del campo eléctrico y magnético como sigue

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{5.42}$$

De la ecuación (5.39) podemos ver que también se puede escribir como (ver [12])

$$F = E_i dx^i \wedge dt + \frac{1}{2}\epsilon_{i,j,k} B^i dx^j \wedge dx^k \tag{5.43}$$

Además, comparando las componentes de las matrices, se puede ver que

$$\mathbf{E} = -(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\Psi) \tag{5.44}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{5.45}$$

donde claramente se ha definido el vector eléctrico $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ y el vector magnético $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$.

Si al cuadripotencial A le agregamos el gradiente de alguna función escalar ϵ, entonces

$$A \longrightarrow A' = A + d\epsilon \tag{5.46}$$

que en componentes queda

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \epsilon \tag{5.47}$$

con esta transformación de norma en el cuadripotencial vemos que el tensor de Faraday es invariante puesto que

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu \epsilon) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu \epsilon) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ &= F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

o que también se puede ver como

$$F = dA' = d(A + d\epsilon) = dA \tag{5.48}$$

puesto que $dd\epsilon = 0$. Por tanto, tenemos que el potencial vector magnético cambia como

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\epsilon \tag{5.49}$$

dejando el campo magnético invariante, y además el potencial eléctrico cambia como

$$\Psi \longrightarrow \Psi' = \Psi - \partial_t \epsilon \tag{5.50}$$

con estas dos condiciones tanto el campo magnético como el campo eléctrico permanecen invariantes.

5.2.4. Ecuaciones de Maxwell

Para llegar a las ecuaciones de Maxwell,primero vamos a aplicar el operador de Hodge a la base formada por $\{dx, dy, dz, dy\}$ de donde obtenemos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
*(dx \wedge dt) =& - dy \wedge dz \\
*(dy \wedge dt) =& dx \wedge dz \\
*(dz \wedge dt) =& dy \wedge dx \\
*(dx \wedge dy) =& dz \wedge dt \\
*(dy \wedge dz) =& dx \wedge dt \\
*(dz \wedge dx) =& dy \wedge dt \\
*(dt \wedge dz \wedge dy) =& - dx \\
*(dt \wedge dx \wedge dz) =& - dy \\
*(dt \wedge dy \wedge dx) =& - dz \\
*(dx \wedge dz \wedge dy) =& - dt
\end{aligned}$$

Tomando la diferencial exterior de F (ecuación (5.43)) obtenemos que

$$\begin{aligned}
dF =& E_{x,y} dy \wedge dx \wedge dt + E_{x,z} dz \wedge dx \wedge dt + E_{y,x} dx \wedge dy \wedge dt + E_{y,z} dz \wedge dy \wedge dt + \\
& E_{z,x} dx \wedge dz \wedge dt + E_{z,y} dy \wedge dz \wedge dt + B_{x,t} dt \wedge dy \wedge dz + B_{x,x} dx \wedge dy \wedge dz + \\
& B_{y,t} dt \wedge dz \wedge dx + B_{y,y} dy \wedge dz \wedge dx + B_{z,t} dt \wedge dx \wedge dy + B_{z,z} dz \wedge dx \wedge dy
\end{aligned}$$

Ahora, aplicando el operador de Hodge

$$\begin{aligned}
*dF =& E_{y,x} dz - E_{x,y} dz + B_{z,t} dz + \\
& E_{x,z} dy - E_{z,x} dy + B_{y,t} dy + \\
& E_{z,y} dx - E_{y,z} dx + B_{x,t} dx + \\
& B_{x,x} dt + B_{y,y} dt + B_{z,z} dt
\end{aligned}$$

que se puede escribir como

$$*dF = \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{x} + \nabla \cdot \vec{B} dt + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{x} \tag{5.51}$$

como $dF = 0$ entonces $*dF = 0$ por lo que obtenemos dos de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{5.52}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \tag{5.53}$$

Para obtener las otras dos ecuaciones de Maxwell calculamos primero

$$*F = E_x dz \wedge dy + E_y dx \wedge dz + E_z dy \wedge dx + B_x dx \wedge dt + B_y dy \wedge dt + B_z dz \wedge dt$$

después de sacar la diferencial exterior y nuevamente el operador de Hodge, obtenemos que

$$\begin{aligned} *d*F = &- (E_{x,x} + E_{y,y} + E_{z,z})dt \\ &+ (-E_{x,t} + B_{z,y} - B_{y,z})dx \\ &+ (-E_{y,t} + B_{x,z} - B_{z,x})dy \\ &+ (-E_{z,t} + B_{y,x} - B_{x,y})dz \end{aligned}$$

que se puede escribir como

$$*d*F = -\nabla \cdot \vec{E}dt - \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \cdot d\vec{x} + \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{x}$$

tomando el caso de vacío, sin fuentes de carga o corrientes, llegamos a las siguientes dos ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{5.54}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = 0 \tag{5.55}$$

Capítulo 6

Kaluza-Klein

En este capítulo aplicamos el modelo matemático de teorías de unificación, desarrollado en el capítulo anterior, a la unificación de gravitación con electromagnetismo, es decir, obtendremos la teoría de Kaluza-Klein desde el enfoque de haces fibrados y no desde las condiciones usadas en el planteamiento de esta teoría (ver [14] y [15]).

6.1. *Ansatz* de Kaluza-Klein

La idea de que el mundo probablemente tenga más de 4 dimensiones es debido a Kaluza (1921), quien con una brillante percepción se dio cuenta que una variedad de 5 dimensiones podría ser usada para unificar la teoría de relatividad de Einstein con la teoría de electromagnetismo de Maxwell. Después de algunos retrasos, Einstein apoyó la idea, pero Klein aportó mayor ímpetu (1926), él hizo la conexión a la teoría cuántica al asumir que la dimensión extra fuera microscópicamente pequeña, con una magnitud conectada vía la constante de Planck h a la magnitud de la carga del electrón e [16].

A pesar de su elegancia, esta versión de la teoría de Kaluza-Klein fue eclipsada por el desarrollo de la mecánica ondulatoria y posteriormente por la teoría cuántica de campo. Sin embargo, el desarrollo de física de partículas condujo eventualmente al resurgimiento del interés en teoría de campo de más dimensiones como medio para la unificación de interacciones físicas de corto y largo alcance. Así, la teoría de Kaluza-Klein sentó las bases para desarrollos modernos como la supergravedad (11 dimensiones) y supercuerdas (10 dimensiones) [16].

La teoría tradicional de Kaluza-Klein es esencialmente relatividad general en 5 dimensiones, pero restringida por dos condiciones. Físicamente, ambas tienen la motivación de explicar por qué percibimos las 4 dimensiones del espacio-tiempo y (aparentemente) no vemos la quinta dimensión. Sin embargo, matemáticamente, estas restricciones son diferentes. Las condiciones son las siguientes:

- La llamada condición *cilíndrica* fue introducida por Kaluza, y consiste en hacer cero todas las derivadas parciales con respecto a la quinta coordenada. Esta es un restricción muy fuerte que tiene que ser aplicada desde el principio de los cálculos. Su principal cualidad es que reduce la complejidad algebraica de la teoría a un nivel manejable [17].

- La condición de compactificación fue introducida por Klein, y consiste en la suposición que la quinta dimensión no es solamente pequeña en tamaño pero que también tiene una topología cerrada (i.e. un círculo si estamos considerando solamente una dimensión extra). Esta es una restricción que debe ser aplicada retroactivamente a una solución. Su principal cualidad es que introduce periodicidad y permite usar Fourier y otras descomposiciones de la teoría.

Ahora hay 15 potenciales adimensionales, los cuales son elementos independientes en un tensor métrico simétrico en 5 dimensiones, g_{AB} (seguimos la convención $A, B = 0, 1, 2, 3, 4$ y $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$). Las primeras 4 coordenadas son del espacio-tiempo con x^0 la coordenada temporal, mientras que la dimensión extra $x^4 = l$ es referida como la coordenada *interna*. En perfecta analogía con la relatividad general, uno puede formar un tensor de Ricci de 5 dimensiones R_{AB}, y un escalar de Ricci de 5 dimensiones R y un tensor de Einstein de 5 dimensiones $G_{AB} \equiv R_{AB} - \frac{1}{2} R g_{AB}$ [16].

Se esperaría que las ecuaciones de campo fueran $G_{AB} = kT_{AB}$ con k una constante de proporcionalidad al tensor energía-momento de 5 dimensiones. Pero lo último es desconocido, así que desde el tiempo de Kaluza-Klein en adelante se ha hecho mucho trabajo con la forma de las ecuaciones de campo para el vacío $G_{AB} = 0$. Equivalentemente, las ecuaciones son

$$R_{AB} = 0 \quad (A, B = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{6.1}$$

Estas 15 relaciones sirven para determinar las 15 componentes de g_{AB}, al menos en principio.

En la práctica, esto es imposible sin algunas suposiciones iniciales sobre g_{AB}. Esto usualmente se conecta con la situación física que se esté investigando. En problemas gravitacionales, una suposición como $g_{AB} = g_{AB}(x^c)$ es comúnmente llamada una elección de coordenadas, mientras que en física de partículas es comúnmente llamada una elección de norma.

Kaluza estaba interesado en electromagnetismo, y se dio cuenta que $g_{\alpha\beta}$ puede ser expresado en una forma que involucre el potencial A_α que aparece en la teoría de Maxwell. Él adoptó la condición cilíndrica mencionada arriba, pero también hizo $g_{44} = cte.$

El enfoque de la teoría de Kaluza-Klein se ilustra bien con

$$g_{AB} = g_{AB}(x^\alpha) \quad , \quad g_{44} = \Phi(x^\alpha) \tag{6.2}$$

(se impone que ninguna de las componentes del tensor g_{AB} dependa de la coordenada adicional x^4).

6.2. Kaluza-Klein visto como caso particular

Como caso particular vamos a usar todo lo que se ha venido planteando a lo largo de este trabajo para unificar la gravitación con el electromagnetismo [3].

La métrica de la ecuación (5.14) también puede ser escrita en un sistema coordenado

$$\begin{array}{ccc} \omega^{\alpha} & \longrightarrow & dx^{\alpha} \\ \omega^{n} & \longrightarrow & dx^{n} \\ A^{a}_{\alpha} & \longrightarrow & ekA^{a}_{\alpha} \\ I_{ab} & \longrightarrow & g_{ab} \end{array}$$

Esto produce

$$\bar{g} = g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta} + g_{nm}\, (dx^{n} + ekA^{n}_{\alpha}dx^{\alpha}) \otimes (dx^{m} + ekA^{m}_{\beta}dx^{\beta}) \tag{6.3}$$

la cual se conoce como la métrica de Kaluza-Klein, vamos a tomar $g_{\alpha\beta}$ como la métrica de FRW (desarrollada en el capítulo 2).

También, vamos a tomar a G como el grupo S^1 para la métrica de Kaluza-Klein que se escribió en la ecuación (6.3), porque como se dijo anteriormente, el campo electromagnético puede ser visto como un ejemplo de campo de Yang-Mills cuyo grupo de norma es $U(1)$, y que topológicamente $U(1) = S^1$ (ver [14]).

Para este caso, los índices del alfabeto griego corren del 0 al 3. Como estamos trabajando con S^1 como G entonces hay una sola coordenada que será $x^4 = \theta$, ya que θ parametriza el círculo unitario S^1. La métrica queda como

$$\bar{g} = g_{\alpha\beta}dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta} + \Phi\, (d\theta + ekA_{\alpha}dx^{\alpha}) \otimes (d\theta + ekA_{\beta}dx^{\beta}) \tag{6.4}$$

en esta métrica κ es una constante dimensional (con dimensiones de longitud) que básicamente hace a las constantes de estructura f^{c}_{ab} números adimensionales (y puede ser interpretada como una escala de longitud típica del espacio interno)

$$[e_a, e_b] = \frac{1}{\kappa} f^{c}_{ab} e_c$$

esta constante se relaciona con la constante de gravitación G. Además, en la métrica se ha introducido la constante de acoplamiento e de Yang-Mills (adimensional en el sistema natural $\hbar = c = 1$).

La derivada covariante que está escrita en la ecuación (5.29) queda como

$$D_{\alpha} = \partial_{\alpha} - e\kappa A^{a}_{\alpha} t_a \tag{6.5}$$

donde A^{a}_{α} son los potenciales de Yang-Mills y $t_a \in \mathcal{G}$ es la base del espacio tangente a G, el grupo de invariancia de la teoría de norma. El conmutador de la derivada covariante escrita en la ecuación (5.32) es

$$[D_{\mu}, D_{\nu}] = -e\kappa F_{\mu\nu} \tag{6.6}$$

con $F_{\mu\nu} = F^{c}_{\mu\nu} t_c$ y

$$F^{c}_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A^{c}_{\nu} - \partial_{\nu} A^{c}_{\mu} - e f^{c}_{ab} A^{a}_{\mu} A^{b}_{\nu} \tag{6.7}$$

Puesto que se tiene una sola coordenada entonces

$$f^c_{ab} = 0 \tag{6.8}$$

lo que nos lleva a

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{6.9}$$

desde aquí se puede ver que $F_{\mu\nu}$ representa el tensor de Faraday (ecuación (5.41)) y por tanto las 4 ecuaciones de Maxwell (sección 5.2.4) se desprenden de la estructura en nuestro haz fibrado. Ahora, poniendo esta métrica en la base $\tilde{\omega}_A$, es decir, la base dual a $\tilde{e}_A$, tenemos que

$$\tilde{g}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} + e^2\kappa^2\Phi A_\alpha A_\beta & e\kappa\Phi A_\beta \\ e\kappa\Phi A_\alpha & \Phi \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

con $\Phi = \Phi(x^\alpha)$.

y su inversa es

$$\tilde{g}^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\alpha\beta} & -e\kappa A^\alpha \\ -e\kappa A^\beta & e^2\kappa^2 A^2 + \frac{1}{\Phi} \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

6.2.1. Relación de norma del cuadripotencial

Otra de las formas de encontrar la relación de norma en el cuadripotencial consiste en hacer una traslación a lo largo de la dimensión extra, es decir

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu \\ x'^4 &= x^4 + e\kappa\ \epsilon(x^\alpha) \end{aligned}$$

ahora, usando un cambio de coordenadas en la métrica $\tilde{g}_{AB}$ dado por

$$\tilde{g}_{A'B'} = \tilde{g}_{AB}\frac{\partial x^A}{\partial x'^A}\frac{\partial x^B}{\partial x'^B} \tag{6.12}$$

en la componente $\tilde{g}_{\mu'4'}$ se tiene que

$$\tilde{g}_{\mu'4'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^4}{\partial x'^4}\tilde{g}_{\nu 4} + \frac{\partial x^4}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^4}{\partial x'^4}\tilde{g}_{44}$$

sustituyendo los valores de la métrica

$$e\kappa\Phi A'_\mu = e\kappa\Phi A_\nu\ \delta^\nu_\mu + e\kappa\Phi\partial_\mu\epsilon$$

que queda como

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\epsilon \tag{6.13}$$

la ecuación anterior es la ecuación (5.47) y A_μ representa el cuadripotencial (ver sección 5.2.3).

Por tanto, cualquier movimiento a lo largo de x^4 se puede interpretar como una transformación de norma de A_μ (relación de norma del cuadripotencial).

6.2.2. Ecuaciones de campo

A partir de la métrica dada en (6.10) y su inversa dada en (6.11) podemos calcular los símbolos de Christoffel dados por la ecuación (2.12)

$$\tilde{\Gamma}^a_{bc} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{ad}(\partial_b \tilde{g}_{dc} + \partial_c \tilde{g}_{db} - \partial_d \tilde{g}_{bc}) \tag{6.14}$$

(ver Apéndice A) y con ellos hacer el cálculo del tensor de Ricci, dado por la fórmula

$$\tilde{R}_{ab} = \tilde{R}^c_{acb} = \partial_c \tilde{\Gamma}^c_{ab} - \partial_b \tilde{\Gamma}^c_{ca} + \tilde{\Gamma}^c_{cd}\tilde{\Gamma}^d_{ab} - \tilde{\Gamma}^c_{bd}\tilde{\Gamma}^c_{ac} \tag{6.15}$$

de donde se obtiene que las componentes de este tensor están dadas por

$$\tilde{R}_{44} = \frac{1}{4\Phi}(\partial^\nu \Phi)(\partial_\nu \Phi) + \frac{e^2\kappa^2}{4}\Phi^2 F^{\alpha\nu}F_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\Box\Phi$$

$$\tilde{R}_{\beta 4} = \frac{e\kappa}{2}\Phi g^{\alpha\nu}\nabla_\nu F_{\beta\alpha} + \frac{3e\kappa}{4}F_{\beta\nu}\partial^\nu\Phi + e\kappa A_\beta \tilde{R}_{44}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{\mu\nu} =& R_{\mu\nu} - \frac{1}{2\Phi}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi + \frac{1}{4\Phi^2}(\partial_\mu\Phi)(\partial_\nu\Phi) - \frac{e^2\kappa^2}{2}\Phi g^{\delta\gamma}F_{\mu\delta}F_{\nu\gamma} + e^2\kappa^2 A_\mu A_\nu \tilde{R}_{44}\\ &+ e\kappa A_\mu(\tilde{R}_{\nu 4} - e\kappa A_\nu \tilde{R}_{44}) + e\kappa A_\nu(\tilde{R}_{\mu 4} - e\kappa A_\mu \tilde{R}_{44})\end{aligned}$$

Ahora, usando estos resultados (ver Apéndice B) , se obtiene que el escalar de curvatura es

$$\tilde{R} = R - \frac{1}{\Phi}\Box\Phi + \frac{1}{2\Phi^2}(\partial_\alpha\Phi)(\partial^\alpha\Phi) - \frac{e^2\kappa^2}{4}\Phi F^{\delta\gamma}F_{\delta\gamma}$$

tomando en cuenta todo lo anterior, se obtienen las componentes del tensor de Einstein (ver Apéndice C) $\tilde{G}_{AB}$, si hacemos $\tilde{G}_{AB} = 0$ obtendremos las ecuaciones de campo, estas serían

- Debido a $\tilde{G}_{44}$ o equivalentemente $\tilde{R}_{44} = 0$

$$\frac{e^2\kappa^2}{4}\Phi^2 F^{\alpha\nu}F_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}\Box\Phi - \frac{1}{4\Phi}(\partial^\nu\Phi)(\partial_\nu\Phi) \tag{6.16}$$

- Debido a $\tilde{G}_{\beta 4}$

$$\nabla^\alpha F_{\beta\alpha} = -\frac{3}{2}\frac{\partial^\nu\Phi}{\Phi}F_{\beta\nu} \tag{6.17}$$

- Debido a $\tilde{G}_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu} =& \frac{e^2\kappa^2}{2}\Phi(g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) + \frac{1}{2\Phi}(\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi - g_{\mu\nu}\Box\Phi)\\ &- \frac{1}{4\Phi^2}((\partial_\mu\Phi)(\partial_\nu\Phi) - g_{\mu\nu}(\partial_\alpha\Phi)(\partial^\alpha\Phi))\end{aligned} \tag{6.18}$$

Por otra parte el tensor de energía-momento electromagnético $T^{EM}_{\mu\nu}$ se define como

$$T^{EM}_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \tag{6.19}$$

y si además hacemos $\Phi = \varphi^2$ las tres ecuaciones anteriores se vuelven

- $$\Box\varphi = \frac{e^2\kappa^2}{4}\varphi^3 F^{\alpha\nu} F_{\alpha\nu} \tag{6.20}$$

- $$\nabla^\alpha F_{\beta\alpha} = -3\frac{\partial^\nu\varphi}{\varphi} F_{\beta\nu} \tag{6.21}$$

- $$G_{\mu\nu} = \frac{e^2\kappa^2}{2}\varphi^2 T^{EM}_{\mu\nu} + \frac{1}{\varphi}(\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\Box\varphi) \tag{6.22}$$

en estas unidades $e = 1$. Por tanto, nos quedan las tres ecuaciones de campo donde el campo escalar φ es fuente del campo electromagnético y viceversa, para las ecuaciones (6.20) y (6.21).

Para (6.22), el tensor de Einstein en 4 dimensiones tiene contribuciones del campo electromagnético y del campo escalar, en esta ecuación, $\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\Box\varphi$ se puede ver como el tensor de energía-momento para el campo escalar φ y

$$G_{\mu\nu} = \frac{e^2\kappa^2}{2}\varphi^2 T^{EM}_{\mu\nu} + \frac{1}{\varphi} T^{CE}_{\mu\nu} \tag{6.23}$$

con

$$T^{CE}_{\mu\nu} = \nabla_\mu\nabla_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\Box\varphi$$

en la primera parte, de la ecuación (6.23), φ se porta como una constante gravitacional variable porque modula el acoplamiento del tensor de energía-momento electromagnético $T^{EM}_{\mu\nu}$ y la curvatura del espacio-tiempo. En la segunda parte también modula el acoplamiento del tensor de energía-momento para el campo escalar φ, $T^{CE}_{\mu\nu}$.

Para el caso particular en que $\varphi = v = cte$ las ecuaciones de campo se reducen a

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2 v^2}{2}\, T^{EM}_{\mu\nu}$$

$$\nabla^\alpha F_{\beta\alpha} = 0$$

como $\frac{\kappa^2 v^2}{2}$ es una constante, entonces podemos hacer $\frac{\kappa^2 v^2}{2} = 8\pi G$ entonces tenemos

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\, T^{EM}_{\mu\nu} \tag{6.24}$$

$$\nabla^\alpha F_{\beta\alpha} = 0 \tag{6.25}$$

que son las ecuaciones de Einstein y Maxwell en cuatro dimensiones, pero extraídas de una teoría de 5 dimensiones en el vacío. Sin embargo, estas relaciones imponen la condición

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0$$

que es equivalente a

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0 = 2(B^2 - E^2) \tag{6.26}$$

implicando

$$E^2 = B^2 \tag{6.27}$$

es decir, cuando el campo escalar φ es una constante, obtenemos las ecuaciones de Einstein y Maxwell para el caso particular en que el módulo del campo eléctrico es igual al del campo magnético.

Conclusiones

La teoría de Kaluza-Klein es un logro como idea precursora para la utilización de un nuevo método en física, el método de las dimensiones extra. Esta idea fue tomada nuevamente pero ahora desde el enfoque de haces fibrados.

Logramos geometrizar las interacciones de la naturaleza, aunque el tratamiento que manejamos no es cuantizable. Pero para este caso particular no tuvimos problemas puesto que el electromagnetismo y relatividad general son clásicos, al aplicar todo lo obtenido de los haces fibrados llegamos a la métrica y suposiciones de Kaluza-Klein sin usar ninguna suposición ni condición inicial.

La teoría multidimensional a la que llegamos fue aplicada al caso de gravitación y electromagnetismo (representado por el grupo $U(1)$), de la cual se desprendió naturalmente toda la teoría de electromagnetismo.

De las ecuaciones de campo obtenidas, tenemos que el campo escalar es fuente del campo electromagnético y viceversa. Por otra parte, el tensor de Einstein tiene contribuciones tanto del campo electromagnético como del campo escalar. Al aplicar la condición de la teoría de Kaluza-Klein ($\varphi = cte$), logramos separar el electromagnetismo de la teoría de la relatividad general (ecuaciones de Einstein y Maxwell) para el caso particular en el que $E^2 = B^2$.

Apéndice A

Como para este caso particular, la base $\tilde{e}_A$ es una base holónoma (ver definición 1.2.25) tenemos que las expresiones para los símbolos de Christoffel (de lo obtenido en la ecuación (2.12)) es

$$\tilde{\Gamma}^a_{bc} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{ad}(\partial_b \tilde{g}_{dc} + \partial_c \tilde{g}_{db} - \partial_d \tilde{g}_{bc})$$

usando esta expresión calculamos las siguientes cantidades

- $\tilde{\Gamma}^4_{44}$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^4_{44} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{4d}(\partial_4 \tilde{g}_{d4} + \partial_4 \tilde{g}_{d4} - \partial_d \tilde{g}_{44}) \\
&= \frac{1}{2}\tilde{g}^{4d}(-\partial_d \tilde{g}_{44}) \\
&= \frac{1}{2}(-ekA^\beta)(-\partial_\beta \Phi) \\
&= \frac{ek}{2}A^\beta \partial_\beta \Phi
\end{aligned}$$

- $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\mu}$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\mu} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha d}(\partial_\beta \tilde{g}_{d\mu} + \partial_\mu \tilde{g}_{d\beta} - \partial_d \tilde{g}_{\beta\mu}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(\partial_\beta g_{\gamma\mu} + \partial_\mu g_{\gamma\beta} - \partial_\gamma g_{\beta\mu}) + \frac{1}{2}e^2\kappa^2 g^{\alpha\gamma}(\Phi A_\mu F_{\beta\gamma} + \Phi A_\beta F_{\mu\gamma} - A_\beta A_\mu \partial_\gamma \Phi) \\
&= \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \frac{1}{2}e^2\kappa^2 g^{\alpha\gamma}(\Phi A_\mu F_{\beta\gamma} + \Phi A_\beta F_{\mu\gamma} - A_\beta A_\mu \partial_\gamma \Phi)
\end{aligned}$$

- $\tilde{\Gamma}^4_{\alpha\beta}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^4_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{4d}(\partial_\alpha \tilde{g}_{d\beta} + \partial_\beta \tilde{g}_{d\alpha} - \partial_d \tilde{g}_{\alpha\beta}) \\
&= \frac{1}{2}\tilde{g}^{4\gamma}(\partial_\alpha \tilde{g}_{\gamma\beta} + \partial_\beta \tilde{g}_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma \tilde{g}_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}\tilde{g}^{44}(\partial_\alpha \tilde{g}4\beta + \partial_\beta \tilde{g}_{4\alpha}) \\
&= \frac{1}{2}(-ekA^\gamma)(\partial_\alpha g_{\gamma\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) \\
&\quad - \frac{1}{2}e^3\kappa^2 A^\gamma(\Phi A_\beta \partial_\alpha A_\gamma + \Phi A_\alpha \partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma(\Phi A_\alpha A_\beta)) + \frac{e\kappa}{2\Phi}(\partial_\alpha(\Phi A_\beta) + \partial_\beta(\Phi A_\alpha)) \\
&= -e\kappa A_\nu \Gamma^\nu_{\alpha\beta} + \frac{ek}{2}(\partial_\alpha A_\beta + \partial_\beta A_\alpha) + \frac{ek}{2\Phi}(A_\beta \partial_\alpha \Phi + A_\alpha \partial_\beta \Phi) \\
&\quad + \frac{e^3\kappa^3 A^\gamma}{2}(\Phi A_\beta F_{\gamma\alpha} + \Phi A_\alpha F_{\gamma\beta} + A_\alpha A_\beta \partial_\gamma \Phi)
\end{aligned}
$$

- $\tilde{\Gamma}^4_{4\nu}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^4_{4\nu} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{4d}(\partial_4 \tilde{g}_{d\nu} + \partial_\nu \tilde{g}_{d4} - \partial_d \tilde{g}_{4\nu}) \\
&= \frac{1}{2}\tilde{g}^{4\alpha}(\partial_4 \tilde{g}_{\alpha\nu} + \partial_\nu \tilde{g}_{\alpha 4} - \partial_\alpha \tilde{g}_{4\nu}) + \frac{1}{2}\tilde{g}^{44}(\partial_4 \tilde{g}_{4\nu} + \partial_\nu \tilde{g}_{44} - \partial_4 \tilde{g}_{4\nu}) \\
&= \frac{1}{2}\tilde{g}^{4\alpha}(\partial_\nu \tilde{g}_{\alpha 4} - \partial_\alpha \tilde{g}_{4\nu}) + \frac{1}{2}\tilde{g}^{44}(\partial_\nu \tilde{g}_{44}) \\
&= \frac{1}{2}(-e\kappa A^\alpha)(\partial_\nu(e\kappa\Phi A_\alpha) - \partial_\alpha(e\kappa\Phi A_\nu)) + \frac{1}{2}(e^2\kappa^2 A^2 + \frac{1}{\Phi})\partial_\nu \Phi \\
&= \frac{e^2\kappa^2}{2}\Phi A^\alpha F_{\alpha\nu} + \frac{e^2\kappa^2}{2}A_\nu A^\alpha \partial_\alpha \Phi + \frac{1}{2\Phi}\partial_\nu \Phi
\end{aligned}
$$

- $\tilde{\Gamma}^\nu_{44}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^\nu_{44} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{\nu b}(\partial_4 \tilde{g}_{b4} + \partial_4 \tilde{g}_{b4} - \partial_b \tilde{g}_{44}) \\
&= -\frac{1}{2}\tilde{g}^{\nu\alpha}\partial_\alpha \tilde{g}_{44} \\
&= -\frac{1}{2}g^{\nu\alpha}\partial_\alpha \Phi
\end{aligned}
$$

- $\tilde{\Gamma}^\alpha_{4\beta}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{4\beta} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha b}(\partial_4 \tilde{g}_{b\beta} + \partial_\beta \tilde{g}_{b4} - \partial_b \tilde{g}_{4\beta}) \\
&= \frac{e\kappa}{2} g^{\alpha\gamma}(\partial_\beta(\Phi A_\gamma) - \partial_\gamma(\Phi A_\beta)) - \frac{e\kappa}{2} A^\alpha \partial_\beta \Phi \\
&= \frac{e\kappa}{2} g^{\alpha\gamma}(\Phi F_{\beta\gamma} - A_\beta \partial_\gamma \Phi)
\end{aligned}
$$

Apéndice B

Para el cálculo del escalar de curvatura se usará la contracción del tensor de Ricci dada por

$$\tilde{R} = \tilde{R}^a_a = \tilde{g}^{ab}\tilde{R}_{ab} \tag{28}$$

que se escribe como

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu} + 2\tilde{g}^{\mu 4}\tilde{R}_{\mu 4} + \tilde{g}^{44}\tilde{R}_{44} \\
&= g^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu} - 2e\kappa A^{\mu}\tilde{R}_{\mu 4} + (e^2\kappa^2 A^2 + \frac{1}{\Phi})\tilde{R}_{44} \\
&= g^{\mu\nu}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2\Phi}\nabla_\nu\nabla_\mu\Phi + \frac{1}{4\Phi^2}(\partial_\mu\Phi)(\partial_\nu\Phi) - \frac{e^2\kappa^2}{2}\Phi g^{\delta\gamma}F_{\mu\delta}F_{\nu\gamma} + e^2\kappa^2 A_\mu A_\nu\tilde{R}_{44} \\
&\quad + e\kappa A_\mu(\tilde{R}_{\nu 4} - e\kappa A_\nu\tilde{R}_{44}) + e\kappa A_\nu(\tilde{R}_{\mu 4} - e\kappa A_\mu\tilde{R}_{44})) - 2e\kappa A^\mu\tilde{R}_{\mu 4} + e^2\kappa^2 A^2\tilde{R}_{44} + \frac{1}{\Phi}\tilde{R}_{44} \\
&= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2\Phi}g^{\mu\nu}\nabla_\nu\nabla_\mu\Phi + \frac{1}{4\Phi^2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\Phi)(\partial_\nu\Phi) - \frac{e^2\kappa^2}{2}\Phi g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} \\
&\quad + \frac{1}{\Phi}(\frac{e^2\kappa^2}{4}\Phi^2 F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + \frac{1}{4\Phi}(\partial^\nu\Phi)(\partial_\nu\Phi) - \frac{1}{2}\Box\Phi) \\
&= R - \frac{1}{\Phi}\Box\Phi + \frac{1}{2\Phi^2}(\partial_\alpha\Phi)(\partial^\alpha\Phi) - \frac{e^2\kappa^2}{4}\Phi F^{\delta\gamma}F_{\delta\gamma}
\end{aligned}$$

Apéndice C

Para calcular las componentes del tensor de Einstein se usará la ecuación

$$\tilde{G}_{ab} = \tilde{R}_{ab} - \tilde{g}_{ab}\frac{\tilde{R}}{2} \tag{29}$$

con esta expresión llegamos a lo siguiente

- $\tilde{G}_{44}$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{44} &= \tilde{R}_{44} - \tilde{g}_{44}\frac{\tilde{R}}{2} \\
&= \tilde{R}_{44} - \Phi\frac{\tilde{R}}{2} \\
&= \frac{1}{4\Phi}(\partial^{\nu}\Phi)(\partial_{\nu}\Phi) + \frac{e^2\kappa^2}{4}\Phi^2 F^{\alpha\nu}F_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\Box\Phi - \frac{\Phi}{2}(R - \frac{1}{\Phi}\Box\Phi + \frac{1}{2\Phi^2}(\partial_{\alpha}\Phi)(\partial^{\alpha}\Phi) \\
&- \frac{e^2\kappa^2}{4}\Phi F^{\delta\gamma}F_{\delta\gamma}) \\
&= \frac{3e^2\kappa^2}{8}\Phi^2 F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\Phi R
\end{aligned}$$

- $\tilde{G}_{\beta 4}$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{\beta 4} &= \tilde{R}_{\beta 4} - \tilde{g}_{\beta 4}\frac{\tilde{R}}{2} \\
&= \tilde{R}_{\beta 4} - \frac{e\kappa}{2}\Phi A_{\beta}\tilde{R} \\
&= \frac{e\kappa}{2}\Phi g^{\alpha\nu}\nabla_{\nu}F_{\beta\alpha} + \frac{3e\kappa}{4}F_{\beta\nu}\partial^{\nu}\Phi + e\kappa A_{\beta}\tilde{R}_{44} - \frac{e\kappa}{2}\Phi A_{\beta}\tilde{R} \\
&= \frac{e\kappa}{2}\Phi g^{\alpha\nu}\nabla_{\nu}F_{\beta\alpha} + \frac{3e\kappa}{4}F_{\beta\nu}\partial^{\nu}\Phi + e\kappa A_{\beta}(\tilde{R}_{44} - \frac{1}{2}\Phi\tilde{R}) \\
&= \frac{e\kappa}{2}\Phi g^{\alpha\nu}\nabla_{\nu}F_{\beta\alpha} + \frac{3e\kappa}{4}F_{\beta\nu}\partial^{\nu}\Phi + e\kappa A_{\beta}\tilde{G}_{44}
\end{aligned}$$

- $\tilde{G}_{\mu\nu}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}_{\mu\nu} &= \tilde{R}_{\mu\nu} - \tilde{g}_{\mu\nu}\frac{\tilde{R}}{2} \\
&= \tilde{R}_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu} + e^2\kappa^2\Phi A_\mu A_\nu)\frac{\tilde{R}}{2} \\
&= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2\Phi}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi + \frac{1}{4\Phi^2}(\partial_\mu\Phi)(\partial_\nu\Phi) - \frac{e^2\kappa^2}{2}\Phi g^{\delta\gamma}F_{\mu\delta}F_{\nu\gamma} + e^2\kappa^2 A_\mu A_\nu \tilde{R}_{44} \\
&\quad + e\kappa A_\mu(\tilde{R}_{\nu 4} - e\kappa A_\nu \tilde{R}_{44}) + e\kappa A_\nu(\tilde{R}_{\mu 4} - e\kappa A_\mu \tilde{R}_{44}) - \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} + e^2\kappa^2\Phi A_\mu A_\nu)(R - \frac{1}{\Phi}\Box\Phi \\
&\quad + \frac{1}{2\Phi^2}(\partial_\alpha\Phi)(\partial^\alpha\Phi) - \frac{e^2\kappa^2}{4}\Phi F^{\delta\gamma}F_{\delta\gamma}) \\
&= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + e^2\kappa^2 A_\mu A_\nu(\tilde{R}_{44} - \frac{1}{2}\Phi\tilde{R}) - \frac{e^2\kappa^2}{2}\Phi(g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) \\
&\quad - \frac{1}{2\Phi}(\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi - g_{\mu\nu}\Box\Phi) + \frac{1}{4\Phi^2}((\partial_\mu\Phi)(\partial_\nu\Phi) - g_{\mu\nu}(\partial_\alpha\Phi)(\partial^\alpha\Phi)) \\
&\quad + e\kappa A_\mu(\tilde{R}_{\nu 4} - e\kappa A_\nu \tilde{R}_{44}) + e\kappa A_\nu(\tilde{R}_{\mu 4} - e\kappa A_\mu \tilde{R}_{44}) \\
&= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + e^2\kappa^2 A_\mu A_\nu \tilde{G}_{44} - \frac{e^2\kappa^2}{2}\Phi(g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) \\
&\quad - \frac{1}{2\Phi}(\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi - g_{\mu\nu}\Box\Phi) + \frac{1}{4\Phi^2}((\partial_\mu\Phi)(\partial_\nu\Phi) - g_{\mu\nu}(\partial_\alpha\Phi)(\partial^\alpha\Phi)) \\
&\quad + e\kappa A_\mu(\tilde{G}_{\nu 4} - e\kappa A_\nu \tilde{G}_{44}) + e\kappa A_\nu(\tilde{G}_{\mu 4} - e\kappa A_\mu \tilde{G}_{44})
\end{aligned}
$$

Bibliografía

[1] Macho, M. *Kaluza y la quinta dimensión*, https://ztfnews.wordpress.com/2014/01/19/kaluza-y-la-quinta-dimension/

[2] Zaloznik, A. *Kaluza-Klein theory*, Universidad de Ljubljana, 2012 http://mafija.fmf.uni-lj.si/seminar/files/2011_2012/KaluzaKlein_theory.pdf

[3] Matos, T. & Wiederhold, P. *Principios matemáticos para ciencias exactas*, Colofón, México, 2017.

[4] O'Neill, B. *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, California, 1983.

[5] Torres del Castillo, G.F. *Differentiable manifolds: a theoretical physics approach*, Springer, Nueva York, 2012.

[6] Schutz, B. *A first course in general relativity*, Cambridge University Press, Nueva York, 2009.

[7] Demaret, J. & Lambert, D. *¿Cuál es la forma del universo?*, Mundo científico.

[8] Ryden, B. *Introduction to Cosmology*, Addison Wesley, Ohio, 2002.

[9] Poor, A. *Diferential Geometric Structures*, Dover Publications, Mineola, 1981.

[10] Hermann, R. *Yang-Mills, Kaluza-Klein, and the Einstein program*, Math Sci Press, Massachusetts, 1978.

[11] García, O. *Existencia de Yang-Mills y del salto de masa*, http://garf.ub.es/milenio/img/Yang-Mills.pdf

[12] Kubyshin, Y. & Volobúev Í. *Geometría diferencial y álgebras de Lie y sus aplicaciones en la teoría de campos*, Editorial URSS, Moscú, 1998.

[13] Balart, L. *Teorías de gauge*, Universidad católica de Chile, Chile, http://www.fis.puc.cl/ jalfaro/tesis/balartlic.pdf

[14] Collion, S. & Vaugon, M. *Multi-Fibers Bundles as a New Model for High-dimensional Space-times*, arXiv:1709.04171

[15] Vaugon, M., Vaugon, B., Collion, S., Dellinger, M. & Faget, Z. *A mathematicians' view of geometrical unification of classical physics in high-dimensional space-time*, arXiv:1010.1516

[16] Wesson, P. *Space-Time-Matter: Modern Kaluza-Klein theory*, World Scientific Publishing, Singapur, 1999.

[17] Mejías, A. *Breviario de teorías Kaluza-Klein*, Universidad de los Andes (ULA) Mérida-Venezuela, http://casanchi.com/fis/breviarioteoriaskk01.pdf