

Evolución numérica de dos campos escalares
autogravitantes con rompimiento espontáneo de
simetría

Héctor Raúl Olivares Sánchez
Departamento de Física
CINVESTAV-IPN
Asesor: Dr. Tonatiuh Matos Chassin

11 de agosto de 2014

Resumen

Se resuelven numéricamente las ecuaciones de Einstein en simetría esférica para encontrar la evolución en el tiempo de un sistema de dos campos escalares acoplados que presenta una transición de fase asociada a un rompimiento espontáneo de la simetría Z_2 . Esto se logra mediante el uso del código numérico OllinSphere2, que utiliza un esquema de diferencias finitas para resolver las ecuaciones del formalismo BSSN en coordenadas esféricas. Las condiciones iniciales de las que se parte son o bien campos homogéneos, o bien campos homogéneos con una perturbación Gaussiana en el origen. Durante la evolución se observan varios efectos físicos, tales como la transición de fase, un periodo inflacionario, la formación de estructuras en forma de cascarones, el crecimiento de una burbuja de vacío real en una región de vacío falso y la formación de paredes de dominio.

Índice

1	Introducción	5
2	Campos Escalares	7
2.1	Formulación Lagrangiana	7
2.2	Simetrías y leyes de conservación	9
2.3	Cuantización del campo escalar	10
2.4	Rompimiento espontáneo de simetría	13
2.4.1	Modelo de Nambu-Goldstone	13
2.4.2	Modelo de Higgs	14
2.4.3	Defectos topológicos	16
3	Relatividad General	19
3.1	Las ecuaciones de campo de Einstein	19
3.2	Los símbolos de Christoffel y la derivada covariante	20
3.3	Tensores de Riemann, Ricci y Einstein	22
3.4	El tensor de energía momento	24
3.4.1	Fluidos perfectos	24
3.4.2	Campos escalares	25
4	Cosmología	27
4.1	El principio cosmológico y la métrica FLRW	27
4.2	Fluidos	29
4.3	Inflación	30
4.3.1	Motivación para la inflación	30
4.3.2	Inflación por un campo escalar	32
4.3.3	Inflación híbrida	34
4.4	Metaestabilidad del vacío y fin el del Universo	35
5	Relatividad Numérica	37
5.1	Métodos de diferencias finitas	37
5.1.1	Discretización	37
5.1.2	Criterios para la elección de aproximaciones	39
5.1.3	Métodos explícitos e implícitos	40
5.1.4	Condiciones de frontera	42
5.1.5	Pruebas de convergencia	43
5.2	Formulación 3+1 de la Relatividad General	45
5.2.1	La El formalismo ADM	46
5.2.2	Constricciones Hamiltoniana y de momentos	48

5.2.3	Evolución en el formalismo ADM	49
5.2.4	El formalismo BSSNOK	50
6	Metodología	55
6.1	Descripción del sistema	55
6.2	Unidades	57
6.3	El código OllinSphere2	57
6.4	Elección de la foliación	58
6.5	Condiciones de frontera	58
6.6	Condiciones iniciales	59
6.7	Pruebas de convergencia	59
6.7.1	Condición inicial	59
6.7.2	Evolución	62
6.8	Elección del tamaño de paso y la malla	63
7	Análisis de resultados	65
7.1	Rompimiento de simetría	65
7.2	Inflación	66
7.3	Densidad de energía	66
7.4	Perfil de densidad y paredes de dominio.	67
8	Conclusiones	73
8.1	Perspectivas	74

Capítulo 1

Introducción

El concepto de rompimiento espontáneo de simetría ha llegado a ser muy popular en la física actual, especialmente después de la posible observación del bosón de Higgs anunciada en el año 2012. Aunque es muy común asociar dicho concepto con la teoría electrodébil del modelo estándar, en realidad tiene muchas más aplicaciones, que van desde la superconductividad hasta la teoría de cuerdas. En este trabajo se realizan simulaciones numéricas muy generales de un sistema simple dotado de esta propiedad: dos campos escalares acoplados evolucionando bajo las ecuaciones de Einstein.

Estudiar sistemas con rompimiento espontáneo de simetría en el contexto de la relatividad general es interesante por muchas razones. Una transición de fase asociada a un rompimiento espontáneo de simetría pudo haber sido la causa del fin de la época inflacionaria en el Universo temprano y existe la hipótesis de que una transición de fase similar podría desencadenar, en el futuro, el fin del Universo como lo conocemos.

Una de las aplicaciones más populares en cosmología es el mecanismo de inflación híbrida, ideado por Liddle, en el que es el rompimiento espontáneo de simetría de un campo escalar lo que detiene la inflación. Los modelos de inflación híbrida en general son difíciles de resolver analíticamente más que en casos muy idealizados y resultan ser muy sensibles a las condiciones iniciales. Aunque existen trabajos donde se han hecho simulaciones numéricas para averiguar qué condiciones iniciales conducen a una inflación exitosa, éstos se han realizado utilizando campos homogéneos, y todavía es una pregunta abierta en qué medida las inhomogeneidades del campo podrían afectar el desarrollo de la inflación [1]. En este sistema físico, la relatividad general juega un papel esencial, ya que son sus ecuaciones las que describen la expansión acelerada del Universo durante esa etapa, y por esta razón, contar con simulaciones de rompimiento de simetría con campos perturbados en relatividad general puede ser muy importante.

Otra fenómeno interesante que puede suceder en un sistema con rompimiento espontáneo de simetría en relatividad general es un “evento de metaestabilidad del vacío”. Éste consiste en que en una región, inicialmente en un estado de falso vacío, una burbuja de vacío real cataliza la caída de toda la región a un estado de vacío auténtico. No es necesario suponer un rompimiento espontáneo de simetría para tener un sistema con vacíos falsos, sin embargo, éstos estados son una característica de los sistemas que presentan transiciones de fase de este tipo. Hasta la fecha no se sabe si el Universo en que vivimos se encuentra o no

en un estado de falso vacío, por lo que en principio es posible que un evento de tal naturaleza se desencadenara en él, cambiando las propiedades de la materia y sus interacciones como las conocemos, y por lo tanto destruyendo todo a su paso sin previo aviso. Esta idea fue concebida por primera vez por Coleman y de Luccia en 1980 [2], quienes estudiaron de forma analítica varias características de tal evento. Algunas simulaciones en 3D de cómo se expandirían burbujas de vacío auténtico en una región de falso vacío fueron realizadas por Gleiser, Rogers y Thorarinson en el 2007 [3], quienes sin embargo utilizan varias aproximaciones y no emplean relatividad general, dejando la puerta abierta a nuevas investigaciones.

Si bien en el sistema estudiado en este trabajo el rompimiento de simetría se interpreta como una transición de fase guiada por un parámetro de orden, una simulación más compleja podría usarse para considerar transiciones de fase térmicas como las que se supone ocurrieron en el universo temprano, tales como la electrodébil y la quirial. En la hipótesis de materia oscura escalar, también se contempla la posibilidad de que la materia oscura haya sufrido una transición de fase térmica en los inicios del Universo [4]. En ese sentido, las simulaciones presentes en este trabajo son un primer paso hacia una simulación realista de tales fenómenos, cuya descripción más precisa requeriría de una dinámica para la temperatura.

El resto de este trabajo está organizado de la siguiente forma: en los capítulos 3.4.2, 3 y 4, se explican brevemente algunos conceptos teóricos de teoría cuántica de campos (enfocada a campos escalares y rompimiento espontáneo de simetría), relatividad general y cosmología (enfocada a inflación), respectivamente. Estos son necesarios para describir el sistema e interpretar los resultados numéricos obtenidos. En el capítulo 5 se describen primero los métodos numéricos del tipo que se usó para realizar las simulaciones, y posteriormente se expone la formulación 3+1 de la relatividad general, que proporciona la fundamentación teórica para poder definir en qué consiste una evolución en el tiempo de un sistema gravitacional (esto no es trivial, ya que la teoría es covariante) y para plantear las ecuaciones de evolución del sistema numérico en la manera en que se plantean. El capítulo 6 expone los detalles de cómo se realizaron las simulaciones (cómo funciona a grandes rasgos el código, qué unidades se utilizaron, etc.), mientras que en el 7 se exponen e interpretan los resultados obtenidos. El capítulo final está dedicado a resumir lo que se obtuvo en este trabajo y a indicar posibles líneas de investigación futuras.

Capítulo 2

Campos Escalares

En este capítulo se expondrán algunos conceptos básicos de la teoría de campos clásica y cuántica que serán de utilidad más adelante, en el capítulo dedicado a la inflación y para describir el sistema que se estudia en este trabajo.

Primero se estudiará la teoría de campos desde el punto de vista de la formulación Lagrangiana y la relación entre las simetrías de un sistema y las cantidades conservadas. Con este conocimiento se definirá lo que es un campo escalar.

Posteriormente, se procederá a cuantizar el campo escalar, a partir de lo cual se expondrá el concepto de rompimiento espontáneo de simetría.

Se revisarán dos mecanismos importantes por los que un sistema puede mostrar tal característica: el de Nambu-Goldstone y el de Higgs.

Finalmente, se estudiará un fenómeno importante que sucede en los sistemas con rompimiento espontáneo de simetría, que es la formación de defectos topológicos, especialmente paredes de dominio. La información presente en este capítulo proviene en su mayoría del libro de texto de F. Mandl y G. Shaw [5].

2.1 Formulación Lagrangiana

En la formulación Lagrangiana de la mecánica, se parte de la suposición de que la evolución de un sistema físico puede encontrarse a partir de una función L , llamada Lagrangiana, que depende de un conjunto de coordenadas independientes (q^1, q^2, \dots, q^N) , y que satisface el principio de mínima acción. Éste pide que la integral

$$S[q^i, \dot{q}^i] = \int_C L(q^i, \dot{q}^i) dt' \quad (2.1)$$

evaluada sobre la trayectoria C entre el estado inicial y final, y llamada *acción*, tenga un valor extremo para la trayectoria real que sigue el sistema. Al número de coordenadas independientes N se le llama número de grados de libertad.

A un sistema con un número infinito de grados de libertad se le llama *campo*. Se considera que en cada punto del espacio existen N coordenadas generalizadas $\phi_r(x^\mu)$, $r = 1, 2, \dots, N$, por lo que se define la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha})$ de modo que

$$L = \int_V \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}) d\mathbf{x} \quad (2.2)$$

y la ec. 2.1 toma la forma:

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}) d^4x \quad (2.3)$$

Donde Ω es una región en el espacio-tiempo. Muchas veces los términos *Lagrangiano* y *densidad Lagrangiana* se usan indistintamente. Cabe mencionar que a lo largo de todo este capítulo se adoptará el convenio de sumación de índices repetidos y la métrica de Minkowski para el espacio-tiempo.

Del principio de mínima acción aplicado a las ecs. 2.1 y 2.3, se llega a las ecuaciones de Euler-Lagrange, que dan la dinámica de los sistemas con un número finito de grados de libertad:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad (2.4)$$

y de los campos:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} = 0 \quad (2.5)$$

al igual que para los sistemas con grados de libertad finitos se pueden definir momentos conjugados

$$p_i := \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} L, \quad (2.6)$$

para los campos se pueden definir densidades de momentos conjugados a partir de la densidad Lagrangiana:

$$\pi_r(x) := \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}_r} \mathcal{L}. \quad (2.7)$$

Del mismo modo, también se puede definir una densidad Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \pi_r \dot{\phi}_r - \mathcal{L} \quad (2.8)$$

que al integrarse sobre todo el espacio a un tiempo t da la función Hamiltoniana del sistema.

Para proceder a la cuantización de un sistema mecánico con grados de libertad finitos, las coordenadas y momentos generalizados se promueven a operadores que cumplen las relaciones de conmutación canónicas:

$$[q^i, p_j] = i\hbar \delta_j^i \quad (2.9)$$

y

$$[q^i, q^j] = [p_i, p_j] = 0. \quad (2.10)$$

En la cuantización de los campos, éstos y sus momentos conjugados se promueven a operadores de Heisenberg que cumplen la versión continua de las relaciones de conmutación 2.9 y 2.10:

$$[\phi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = i\hbar \delta_{rs} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.11)$$

y

$$[\phi_r(\mathbf{x}, t), \phi_s(\mathbf{x}', t)] = [\pi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = 0. \quad (2.12)$$

2.2 Simetrías y leyes de conservación

La invariancia de un sistema respecto a alguna transformación implica la existencia de una cantidad conservada. Una transformación que deja sin cambios a un sistema se llama comúnmente una *simetría*. Al aplicar tal transformación a un sistema se obtiene una descripción equivalente de éste. Así, para un sistema de partículas, a la simetría de traslación en una dirección corresponde la conservación del momento lineal en esa dirección, a la simetría de rotación al rededor de un eje, corresponde la conservación del momento angular sobre ese mismo eje, y a la simetría de traslación temporal corresponde la conservación de la energía. La justificación matemática para relacionar la existencia de simetrías con cantidades conservadas es el llamado Teorema de Noether.

En mecánica cuántica, dos descripciones equivalentes de un mismo sistema están relacionadas por una transformación unitaria. Estas transformaciones pueden escribirse de la forma:

$$U = e^{i\alpha T}, \quad (2.13)$$

donde α es un parámetro continuo real y T es un operador Hermitiano.

Al escribir la transformación en forma infinitesimal

$$U \approx 1 + i\delta\alpha T \quad (2.14)$$

y aplicarla al operador Hamiltoniano, resulta:

$$H + \delta H = H + i\delta\alpha [T, H]. \quad (2.15)$$

Por otra parte, de la ecuación de movimiento de Heisenberg para un operador A que no depende explícitamente del tiempo,

$$\frac{d}{dt}A = [A, H], \quad (2.16)$$

puede verse que en efecto, que, si el Hamiltoniano permanece sin cambio después de aplicar la transformación, es decir, si $\delta H = 0$, entonces $[T, H] = 0$ y T es una cantidad conservada.

En el caso de una teoría de campo Lagrangiana, si se realiza una variación $\delta\phi_r$ en el campo ϕ_r ,

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x) = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x), \quad (2.17)$$

el cambio en la densidad Lagrangiana es

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\delta\phi_{r,\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\delta\phi_r\right) := \partial_\alpha f^\alpha. \quad (2.18)$$

Así, si el Lagrangiano no cambia después de la transformación, se tiene una ecuación de continuidad para la integral de f^0 sobre el espacio, que es entonces una cantidad conservada.

Un ejemplo muy importante de esto resulta de realizar la transformación infinitesimal de coordenadas

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha + \varepsilon_\beta^\alpha x^\beta + \delta^\alpha \quad (2.19)$$

donde δ y ε_β^α son parámetros infinitesimales y $\varepsilon_\beta^\alpha = -\varepsilon_\alpha^\beta$. El transformar las coordenadas de esta manera causa que los campos se transformen

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x) = \phi_r(x) + \frac{1}{2}\varepsilon_\beta^\alpha S_{\alpha rs}^\beta \phi_s(x), \quad (2.20)$$

donde $S_{\alpha rs}^\beta$ son coeficientes que dependen de las propiedades de transformación del campo, es decir, de cómo se “mezclan” sus componentes al transformarse (por ejemplo si es un vector, un tensor, etc.). Si se realiza una traslación pura, es decir, se aplica la transformación con $\varepsilon_\beta^\alpha = 0$, la ecuación de continuidad que se obtiene es:

$$\partial_\alpha \mathcal{T}^{\alpha\beta} := \partial_\alpha \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \frac{\partial \phi_r}{\partial x_\beta} - \mathcal{L} g^{\alpha\beta} \right\} = 0. \quad (2.21)$$

Sustituyendo las ecs. 2.7 y 2.8 en $\mathcal{T}^{0\alpha}$ e integrando, se pueden obtener cuatro cantidades conservadas:

$$\begin{aligned} cP^0 &= H \\ P^j &= \int_V d^3\mathbf{x} \pi_r(x) \partial_j \phi_r(x) \end{aligned} \quad (2.22)$$

que corresponden a la energía total y a los momentos lineales en las tres direcciones espaciales.

Si en lugar de la transformación anterior se considera una rotación pura ($\delta = 0, \varepsilon_\beta^\alpha \neq 0$), entonces la ecuación de continuidad que resulta es:

$$\partial_\alpha \mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} S_{rs}^{\beta\gamma} \phi_s + [x^\beta \mathcal{T}^{\alpha\gamma} - x^\gamma \mathcal{T}^{\alpha\beta}] = 0. \quad (2.23)$$

Aquí hay seis cantidades conservadas, asociadas con los momentos angulares del campo. Si bien en este cálculo se realizó para campos clásicos, en la ec. 2.23 se puede vislumbrar un concepto que tradicionalmente se considera cuántico. Mientras que la expresión entre corchetes puede asociarse fácilmente al momento angular “orbital” del campo, el primer término contribuye también a la cantidad conservada, pero además de estar relacionado con los giros en las coordenadas, está relacionada con las propiedades de transformación del campo. Este término es entonces la versión “clásica” del espín. En el caso de un campo de una sola componente, es decir, un campo escalar, no hay diferentes componentes que se mezclen, por lo que las $\mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma}$ sólo contienen la parte del momento angular orbital. Por lo tanto, un campo escalar, al ser cuantizado, sólo puede representar partículas de espín cero.

2.3 Cuantización del campo escalar

En esta sección se obtendrá primero la ecuación de Klein-Gordon, que es la que rige la dinámica de un campo escalar, y luego se procederá a cuantizar el campo usando las ideas presentadas en las secciones anteriores.

La energía, el momento y la masa en reposo de una partícula en relatividad especial están relacionadas por la expresión

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2. \quad (2.24)$$

Por otra parte, en la teoría cuántica no relativista, la energía y el momento corresponden a los siguientes operadores diferenciales en la representación de posición:

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla \quad E \rightarrow i\hbar\partial_t.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ec. 2.24, se obtiene la ecuación “tradicional” de Klein-Gordon:

$$(\square + \mu^2)\phi = 0 \quad (2.25)$$

con $\mu = mc/\hbar$. En muchos libros donde se presenta la ecuación de Klein-Gordon se habla de las dificultades de interpretarla como la ecuación de onda de una partícula única. Una de las más importantes es que no es posible interpretar $\phi^*\phi$ como una densidad de probabilidad. Al interpretar a ϕ como un campo cuantizado en el que están presentes muchas partículas, estas dificultades ya no se presentan [5]. Aquí se considera que ϕ es real, lo cual corresponde a partículas neutras.

La ecuación 2.25 puede obtenerse a partir de la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2. \quad (2.26)$$

Es fácil generalizar la ecuación de movimiento del campo observando que la densidad Lagrangiana 2.26 es un caso particular en que el potencial del campo es $V(\phi) = (1/2)\mu^2\phi^2$. Usando un potencial general en la ec. 2.26 y desarrollando las ecuaciones de Euler-Lagrange 2.5, la ecuación de Klein-Gordon queda:

$$(\square + V_{,\phi})\phi = 0. \quad (2.27)$$

Sin embargo, para el resto de esta sección, se seguirá usando la ec. 2.25 para ilustrar cómo se lleva a cabo la cuantización del campo. En realidad, todos los potenciales desarrollados a segundo orden en serie de potencias al rededor de un mínimo local van a dar lugar a ecuaciones con la forma de 2.25, por lo que pueden considerarse ecuaciones para un campo de partículas con cierta masa más algún tipo de autointeracción que depende de la forma específica del potencial desarrollado a órdenes más altos.

A partir de la densidad Lagrangiana 2.26 y de la ec. 2.7 se pueden obtener los momentos generalizados para el campo de Klein-Gordon:

$$\pi(x) = \frac{1}{c^2}\dot{\phi}(x) \quad (2.28)$$

Al sustituir la ec. 2.28 en 2.11 y 2.12, puede verificarse que 2.28 y ϕ cumplen las relaciones de conmutación necesarias.

El siguiente paso es expandir ϕ en un conjunto completo de soluciones. Esto se puede hacer utilizando series de Fourier en un volumen V sobre el que se imponen condiciones de frontera periódicas:

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) \quad (2.29)$$

$$\phi^+(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} a(\mathbf{k})e^{-ikx} \quad (2.30)$$

$$\phi^-(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} a^\dagger(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}x} \quad (2.31)$$

donde $k^0 = \omega_{\mathbf{k}}/c = (\mu^2 - \mathbf{k}^2)^{1/2}$, lo que corresponde a una partícula relativista con $E = \hbar\omega_{\mathbf{k}} = (m^2 c^4 + c^2 \hbar^2 \mathbf{k}^2)^{1/2}$.

De las expansión en modos de Fourier y las relaciones de conmutación 2.11 y 2.12, se pueden obtener las siguientes relaciones de conmutación para los operadores correspondientes a los coeficientes de Fourier:

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (2.32)$$

y

$$[a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = 0. \quad (2.33)$$

Las ecs. 2.32 y 2.33 muestran que los coeficientes de Fourier operadores satisfacen las mismas relaciones de conmutación que los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico siempre y cuando sean de la misma \mathbf{k} . Es decir, corresponden a la creación y absorción de un cuanto de campo. Igual que para el oscilador armónico, se puede definir un operador número para cada \mathbf{k} : $N(\mathbf{k}) = a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})$.

El Hamiltoniano y el momento total (ecs. 2.22) pueden escribirse en términos de estos operadores a través de las ecs. 2.29, 2.30 y 2.31.

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}}(N + 1/2) \quad (2.34)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\mathbf{k}(N + 1/2) \quad (2.35)$$

Dado que los operadores $a^\dagger(\mathbf{k})$ representan la creación de un cuanto de campo con momento \mathbf{k} , estados con diferente número de partículas pueden ser obtenidos a partir del estado de vacío $|0\rangle$ aplicándolos sucesivamente. Más estados pueden obtenerse como superposiciones de los ya generados.

Por último, hay que hacer una observación sobre las ecs. 2.34 y 2.35. Incluso en el estado de vacío, que no contiene ningún cuanto de campo ($N = 0$), ambas expresiones dan cantidades infinitas. Algunos autores [5] argumentan que esto no es importante, ya que sólo las diferencias de energía son observables, y la “constante infinita” puede simplemente ignorarse. Sin embargo, en el contexto de la relatividad general, es la densidad de energía y momentos, y no las diferencias en estos entre un estado y otro, lo que origina la curvatura del espacio-tiempo.

Otra forma de evitar las cantidades infinitas es utilizar lo que se conoce como *ordenamiento normal*, y que consiste en ordenar los coeficientes de Fourier antes de cuantizar de modo que cuando sean promovidos a operadores, actúen siempre primero los operadores de creación y luego los de aniquilación.

Esto elimina la constante infinita en H y \mathbf{P} , de manera que el valor esperado de ambos en el vacío es cero.

2.4 Rompimiento espontáneo de simetría

El concepto de rompimiento espontáneo de simetría adquirió mucho interés en teoría cuántica de campos a partir de que proporcionó un mecanismo para dotar de masa a los leptones y bosones de norma Z y W^\pm en la teoría electrodébil sin hacer que ésta perdiera la renormalizabilidad y la invarianza de norma. Este mecanismo es el conocido mecanismo de Higgs, del cuya validez el descubrimiento una partícula similar al bosón de Higgs en 2013 podría ser una espectacular confirmación.

En esta sección se explicará el concepto de rompimiento espontáneo de simetría y se dedicarán dos apartados a analizar dos modelos simples donde aparece: el de Nambu-Goldstone y una versión simplificada del de Higgs. Un rompimiento espontáneo de simetría ocurre cuando el Lagrangiano posee dicha simetría, pero el estado base está degenerado, y un estado base particular no la posee. Una vez que el sistema “elige” ese estado base, se dice que rompe la simetría de forma *espontánea*. La palabra *espontáneo* se refiere a que nunca se agregó un término asimétrico al Lagrangiano, y éste sigue siendo simétrico, la simetría se rompió por propiedades que el mismo sistema simétrico tenía.

Un ejemplo muy familiar es el de un material ferromagnético. El estado base de este sistema es aquel en que todos los espines de las moléculas están orientados en la misma dirección, pero no está especificado *cúal* dirección. Entonces existe una infinidad de posibles estados de mínima energía, todos con el vector de magnetización, \mathbf{M} , orientado hacia una dirección diferente. El Lagrangiano nunca pierde su simetría: todas las direcciones de la magnetización son equivalentes. Pero una vez elegido un estado base, el sistema ya no la posee.

En teoría cuántica de campos, el estado base es el vacío. El rompimiento espontáneo de simetría puede ocurrir sólo si el vacío está degenerado, lo que corresponde a la idea poco intuitiva de que existen distintos “vacíos”, cada uno caracterizado por una cantidad (análoga a la magnetización en el caso del ferromán) que no es invariante respecto a las transformaciones de simetría del Lagrangiano. Si se desea que todos estos vacíos mantengan la invarianza ante transformaciones de Lorentz, entonces tal cantidad debe ser el valor esperado de un campo escalar $\langle 0|\phi(x)|0\rangle = c$.

A continuación se expondrán los modelos de Nambu-Goldstone y de Higgs, en los que las simetrías que se rompen son la invarianza de fase global y la invarianza de fase local (o de norma), respectivamente. La exposición se hará considerando campos clásicos.

2.4.1 Modelo de Nambu-Goldstone

Considérese la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \mu^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4, \quad (2.36)$$

que es invariante ante las transformaciones

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = \phi(x)e^{i\alpha} \\ \phi^*(x) &\rightarrow \phi'^*(x) = \phi^*(x)e^{-i\alpha}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Para que la energía esté acotada por abajo, en este modelo se requiere que $\lambda > 0$, pero μ^2 puede elegirse positivo o negativo. Si $\mu^2 > 0$, el sistema presenta

un solo mínimo central en $\phi = 0$ y el comportamiento que se espera es de oscilaciones al rededor de ese mínimo. Si se ignora el término $\lambda|\phi|^4$, se recupera el caso de un campo escalar cargado (por ser complejo) con masa. El término $\lambda|\phi|^4$ puede tratarse como una perturbación que, al cuantizar, corresponde a una autointeracción entre las partículas del campo.

El caso en que $\mu^2 < 0$ es el que presenta el rompimiento espontáneo de simetría. En este caso, $\phi = 0$ corresponde a un máximo en lugar de a un mínimo, y hay todo un círculo de mínimos dado por:

$$\Phi_0 = \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda} \right)^{1/2} e^{i\theta} \quad (2.38)$$

Aquí no se puede usar teoría de perturbaciones al rededor de $\phi = 0$, ya que a orden cero el campo tiene una masa imaginaria, lo que no se puede corregir a ningún orden finito en teoría de perturbaciones [5]. En lugar de eso, se puede desarrollar al rededor de un mínimo.

Todos los mínimos son equivalentes, por lo que se puede elegir aquel en $\theta = 0$ para simplificar y desarrollar \mathcal{L} en potencias al rededor de él.

$$\frac{1}{\sqrt{(2)}} v := \phi_0(\theta = 0) \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & \frac{1}{2} \partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \sigma^2 - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \sigma^2 \\ & + \frac{1}{2} \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta \\ & - \lambda v \sigma [\sigma^2 + \eta^2] - \frac{1}{4} \lambda [\sigma^2 + \eta^2]^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde $(\sigma(x) + i\eta(x))/\sqrt{2}$ es una desviación respecto al mínimo. La primera línea de 2.40 puede interpretarse como el Lagrangiano de un campo escalar real masivo, la segunda como el de un campo escalar no masivo y la tercera como términos de interacción.

Al cuantizar, resultan partículas de masa $\sqrt{2\lambda v^2}$ y partículas sin masa relacionadas con el campo η , que son consecuencia de la degeneración del estado base en la dirección tangencial al círculo. Estas partículas se conocen como *bosones de Goldstone* y nunca han sido observadas en la naturaleza, por lo que no son una característica deseable de un modelo. En la sección siguiente se verá que en el modelo de Higgs no están presentes. Sin embargo, el valor esperado del campo original en el vacío es $\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \phi_0$, distinto para cada estado de vacío, por lo que se cumple la condición para el rompimiento espontáneo de simetría.

2.4.2 Modelo de Higgs

En el modelo de Higgs, en lugar de tener un Lagrangiano con simetría de fase global, se tiene uno con simetría de fase local, es decir una transformación de norma. En el modelo realista que se utiliza en el modelo estándar, el Lagrangiano es invariante ante una transformación de norma $SU(2) \times U(1)$, sin embargo en este apartado se tratará con una versión simplificada del modelo, invariante ante transformaciones de norma del grupo $U(1)$.

Al tratarse de un sistema con invariancia de fase local, las derivadas parciales que aparecían en el modelo de Nambu-Goldstone se sustituyen por derivadas covariantes:

$$D_\mu \phi := (\partial_\mu + iqA_\mu)\Phi \quad (2.41)$$

y se agrega a la densidad Lagrangiana la correspondiente al campo de norma:

$$\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad \text{con} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu. \quad (2.42)$$

La densidad Lagrangiana que resulta

$$\mathcal{L}(x) = D^\mu \phi^* D_\mu \phi - \mu^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.43)$$

es invariante ante transformaciones de norma

$$\phi \rightarrow \phi e^{-iqf(x)} \quad \phi^* \rightarrow \phi^* e^{iqf(x)} \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f \quad (2.44)$$

Puede hacerse el mismo análisis que se utilizó para el modelo de Nambu-Goldstone. Considerando $\mu^2 < 0$ y expandiendo al rededor de un estado de vacío, se encuentra:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}\partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2 \\ & - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu A^\mu \\ & + \frac{1}{2}\partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + qv A^\mu \partial_\mu \eta \\ & + \text{términos de interacción} \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde significado de σ y η es el mismo que en el apartado anterior.

En el Lagrangiano 2.45 se pueden reconocer, sin tomas en cuenta los términos de interacción, un campo escalar con masa asociado a σ , un campo vectorial con masa A_μ y un campo escalar sin masa asociado a η . Aparentemente, al ir de la expresión 2.43 a 2.45, pasamos de tener un campo escalar complejo, con dos grados de libertad, y un campo vectorial sin masa, con dos grados de libertad, es decir cuatro grados de libertad en total; a tener dos campos escalares reales y un campo vectorial con masa, esto es, cinco grados de libertad. Esto no puede ser posible porque no pueden crearse grados de libertad sólo por expresar el mismo sistema en términos de otras variables. Además el término que mezcla los A_μ con las derivadas de η en la ec. 2.45 muestra que A_μ y η no son coordenadas normales como lo eran σ y η en el modelo de Nambu-Goldstone.

Efectivamente, η no es un grado de libertad físico, ya que puede elegirse una función $f(x)$ que al insertarse en la ec. 2.44 haga que ϕ sea real en todo punto. Debido a la invariancia de norma de \mathcal{L} , existe la libertad para escoger esa función sin cambiar las propiedades físicas del sistema, por lo que la densidad Lagrangiana 2.45 puede reescribirse:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \sigma^2 \\
& - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (qv)^2 A_\mu A^\mu \\
& - \lambda v \sigma^3 - \frac{1}{4} \lambda \sigma^4 + \frac{1}{2} q^2 A_\mu A^\mu [2v\sigma + \sigma^2].
\end{aligned} \tag{2.46}$$

El primer renglón es la densidad Lagrangiana de un campo escalar real con masa; el segundo, la de un campo vectorial con masa, y el tercero son términos de interacción. En resumen, uno de los dos grados de libertad del campo escalar complejo ϕ fue transferido al campo vectorial A_μ , que así pasó de tener dos a tres grados de libertad, los característicos de un campo vectorial con masa. De este modo, el campo adquirió masa sin que se rompiera la invariancia de norma del Lagrangiano, sin agregar bosones de Goldstone (aunque sí agregando un bosón masivo, conocido como *bosón de Higgs*) y sin eliminar la renormalizabilidad del sistema [5].

2.4.3 Defectos topológicos

Al incorporar efectos de temperatura en el modelo, puede ser que arriba de una temperatura crítica T_c , el valor preferido del campo escalar sea el origen, a pesar de que al analizar el potencial sea un punto inestable [6]. Se dice que arriba de esa temperatura, la simetría está *restaurada* y abajo está *rota*, y que a la temperatura T_c ocurre una *transición de fase*. Por ejemplo, se cree que en la historia temprana del universo los bosones Z y W^\pm no tenían masa, hasta que ocurrió la transición de fase electrodébil y la fuerza débil quedó en la forma en que la conocemos [7].

Sería poco realista pensar que un campo fuera totalmente homogéneo, y lo más probable sería pensar que tiene pequeñas fluctuaciones al rededor de un valor preferido. Debido a que en una transición de fase que involucre un rompimiento espontáneo de simetría un valor preferido del campo se convierte en un punto inestable, esas perturbaciones pueden dar lugar a que el sistema elija distintos mínimos en diferentes regiones del espacio. Entre dos de estas regiones existirá entonces lo que se denomina un *defecto topológico*, una región en que el sistema se queda atrapado entre un mínimo y otro sin caer en ninguno de los dos. Al mecanismo antes descrito se le conoce como *mecanismo de Kibble* [7]. Un defecto topológico tiene concentra una energía mayor a la del espacio alrededor de él, se mueve con su propia dinámica y en general tiene una existencia prolongada, ya que para eliminarlo toda una región del espacio tendría que ser llevada a otro estado de vacío distinto, lo que necesitaría una gran cantidad de energía.

En un material ferromagnético pueden observarse éstas regiones, que en ese caso se denominan *paredes de dominio* y que se extienden por un grosor de 100 a 150 átomos, entre dos zonas prácticamente homogéneas con diferente dirección de magnetización.

Según la naturaleza del sistema, los defectos topológicos pueden ser unidimensionales (*cuerdas*), bidimensionales (*paredes*) o de una sola dimensión. El tipo de defecto topológico depende de la naturaleza del sistema. Así, por ejemplo, un sistema que rompe la simetría Z_2 tiene sólo dos estados de mínima energía posibles, por lo que formará paredes de dominio; mientras que en uno

donde se rompe la simetría $U(1)$ el sistema puede variar gradualmente de un estado de vacío al otro, por lo que el defecto que se formará será una cuerda.

Al estudiar un sistema con rompimiento espontáneo de simetría es interesante buscar defectos topológicos y analizar sus propiedades.

Capítulo 3

Relatividad General

3.1 Las ecuaciones de campo de Einstein

En nuestros días está establecido con bastante certeza que las leyes que describen la dinámica del campo gravitacional son las ecuaciones de Einstein. Numerosos esfuerzos han sido destinados a verificar con gran precisión sus predicciones, especialmente durante la última mitad del siglo pasado, y hasta ahora todas las pruebas han sido superadas exitosamente [8].

No es de esperarse que siempre siga siendo así, ya que la teoría aún no puede obtenerse como el límite macroscópico de una teoría cuántica, por lo que más allá de cierto nivel de precisión en las mediciones, algunas correcciones debidas a fenómenos cuánticos deberían comenzar a ser apreciables.

Se han propuesto varias modificaciones a estas ecuaciones, principalmente motivadas por observaciones cosmológicas como la expansión acelerada del Universo y el problema de la materia oscura, incluso diseñadas para coincidir con las mediciones a la escala del sistema solar. Sin embargo, hay formas alternativas de explicar tales observaciones sin recurrir a modificar teoría gravitacional actual, además de que modificaciones mencionadas suelen adolecer de ciertos defectos, o simplemente tener formas demasiado complicadas para preferirlas a las ecuaciones de Einstein a menos que éstas lleguen a predecir sin asomo de duda resultados erróneos para algún experimento [9].

En este trabajo se adoptará, tal vez arbitrariamente, el punto de vista de que las ecuaciones de Einstein describen correctamente la dinámica del campo gravitacional a la escala en que evoluciona el sistema bajo estudio. Así, en este capítulo no se busca justificar la forma de las ecuaciones, sino sólo presentarlas y explicar conceptos que serán necesarios primero en el capítulo 5 para plantear correctamente un sistema de ecuaciones que describa la evolución del campo gravitacional, y luego en el capítulo 7 para analizar correctamente los resultados. Por lo tanto, en la exposición se presentarán las ecuaciones de Einstein y luego se irán descomponiendo para ir explicando cada parte. La información contenida en este capítulo se obtuvo de las referencias [9], [10] y en menor medida de [7].

Las ecuaciones de Einstein se expresan:

$$\boxed{G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}} \quad (3.1)$$

A las cantidades $G_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}$ se les llama *tensor de Einstein* y *tensor de energía-momento*, respectivamente. G es la constante gravitacional de la teoría Newtoniana y c es la velocidad de la luz. El tensor de Einstein contiene información sobre la geometría del espacio tiempo y el tensor de energía momento contiene información sobre propiedades de la materia y al energía contenidas en éste.

El tensor de Einstein puede expresarse en términos de otro tensor, llamado tensor de Ricci, que a su vez es una contracción del tensor de Riemann, que contiene información importante sobre la curvatura de un espacio. El tensor de Riemann se calcula partiendo de cantidades llamadas *símbolos de Christoffel*, que aparecen al definir derivadas en un espacio curvo. En las siguientes secciones (3.2 y 3.3) se explicará más detalladamente cada una de estas cantidades y en la 3.4 se mostrará como se construye el tensor de energía-momento para fluidos y campos escalares.

Antes de proseguir, hace falta hacer un comentario sobre las unidades de medida. En el resto de este capítulo y de este trabajo se emplean las unidades que se conocen como geometrizadas. Hay varios sistemas de unidades geometrizadas, pero todos tienen en común que en ellas $G = c = 1$. Para poder tener $c = 1$, las unidades de distancia y de tiempo se ajustan de modo que la unidad de tiempo sea el tiempo que la luz tarda en viajar una unidad de distancia. Al hacer esta elección, la distancia queda medida en las mismas unidades que el tiempo y la masa en las mismas unidades que la energía.

De forma similar, al adoptar $G = 1$, las masa resulta tener las mismas unidades que la distancia, de modo que en un sistema que tiene cantidades con dimensiones de longitud, tiempo, masa y energía a distintas potencias, todas las cantidades quedan en términos de potencias de una sola unidad, que somos libres de escoger. El sistema de unidades no está completamente especificado hasta elegir esa unidad, que puede ser el metro, el kilogramo, el electrón-volt, etc. Otra consecuencia interesante de adoptar unidades geometrizadas proviene de la expresión para la masa de Planck:

$$M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}. \quad (3.2)$$

Puede verse que al adoptar un sistema de unidades geometrizadas, la constante de Planck reducida queda numéricamente igual a la masa de Planck al cuadrado en ese sistema:

$$\hbar = M_p^2 \quad (3.3)$$

3.2 Los símbolos de Christoffel y la derivada covariante

Considérese un espacio de N dimensiones en el que cada punto está identificado por un conjunto de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^N) . El elemento de línea en tal espacio se define

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.4)$$

y a las cantidades $g_{\mu\nu}$ se les llama *componentes del tensor métrico* o de la *métrica*. En la ec. 3.4 y en todo este trabajo se utiliza el convenio de sumación

3.2. LOS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL Y LA DERIVADA COVARIANTE 21

de índices repetidos.

La métrica también sirve para “subir y bajar” los índices de las cantidades A^μ y A_μ , a las que antiguamente se les llamaba componentes de los vectores contravariantes y covariantes, respectivamente. En la actualidad, se les llama componentes de *vectores* y *uno-formas* debido a una interpretación geométrica más moderna.

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (3.5)$$

De la misma forma puede usarse en tensores de mayor rango, como $F_{\delta\epsilon\zeta}^{\alpha\beta\gamma}$. El tensor $g^{\mu\nu}$ es tal que $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 1$.

En el caso más general, los vectores base del sistema coordenado no permanecen constantes en todo punto del espacio. La razón de cambio de las componentes de un vector base respecto a una coordenada será en general distinta de cero, pero además será también un vector, por lo que a su vez puede escribirse como una combinación lineal de los vectores base en ese punto:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha := \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu. \quad (3.6)$$

Los coeficientes $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ de la combinación lineal se denominan *símbolos de Christoffel*. Los símbolos de Christoffel son importantes para calcular derivadas en sistemas de coordenadas curvilíneas. Ya que en un sistema general de dichas coordenadas no sólo las componentes de un campo vectorial cambian de un punto a otro, sino también los vectores base, para obtener la derivada de un campo vectorial en cierta dirección no basta con derivar sus componentes respecto a las coordenadas, sino que también es necesario derivar los vectores base. A esta derivada que toma en cuenta el cambio en los vectores base se le llama *derivada covariante* y se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \vec{e}_\alpha. \quad (3.7)$$

Al escribir en notación de componentes, la derivada covariante se denota con un “;” para distinguirla de la derivada parcial, que se denota con una “,”. Así, la expresión 3.7 toma la forma:

$$V_{;\beta}^\alpha := V_{,\beta}^\alpha + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha. \quad (3.8)$$

Puede verse que para un sistema en que los vectores base son constantes en el espacio, específicamente para las coordenadas cartesianas, los símbolos de Christoffel se anulan y la derivada covariante se reduce a la derivada parcial.

Por medio de varias manipulaciones algebraicas, los símbolos de Christoffel pueden escribirse en términos de derivadas de la métrica:

$$\Gamma_{\mu\beta}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} (g_{\mu\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\beta,\nu}) \quad (3.9)$$

Para terminar esta sección, cabe mencionar que existe otra forma de derivación en el cálculo tensorial que no necesita de los símbolos de Christoffel y ni siquiera de la métrica para definirse. Los detalles de su significado geométrico y sus

propiedades no se mencionarán aquí y sólo se enunciará su definición operacional porque será de utilidad al discutir la formulación 3+1 de la relatividad general.

El corchete de Lie de dos vectores \vec{U} y \vec{V} se denota $[\vec{U}, \vec{V}]$ y se puede obtener en términos de las derivadas covariantes de la siguiente forma:

$$[\vec{U}, \vec{V}] = U^\beta V_{;\beta}^\alpha - V^\beta U_{;\beta}^\alpha \quad (3.10)$$

Puede demostrarse que si f es una función escalar, el corchete de Lie satisface la relación:

$$[\vec{U}, f\vec{V}] = f[\vec{U}, \vec{V}] + \vec{V}(U^\alpha \cdot f_{;\alpha}) \quad (3.11)$$

que es similar a la regla de Leibniz para los operadores diferenciales, por lo que la derivada de Lie respecto a \vec{U} de un vector y un escalar se define:

$$\mathcal{L}_{\vec{U}}\vec{V} := [\vec{U}, \vec{V}] \quad \mathcal{L}_{\vec{U}}f := U^\alpha \cdot f_{;\alpha}. \quad (3.12)$$

A pesar de que en la ec. 3.10 se expresó el corchete de Lie en términos de derivadas covariantes, en realidad es posible mostrar que éste puede hallarse sin hacer referencia a ellas:

$$[\vec{U}, \vec{V}]^\alpha = U^\beta V_{;\beta}^\alpha - V^\beta U_{;\beta}^\alpha. \quad (3.13)$$

3.3 Tensores de Riemann, Ricci y Einstein

Debido a que la relatividad general trata con espacios curvos, es importante dar una definición precisa de curvatura. Para esto es importante mencionar que existen dos tipos de curvatura, la llamada *extrínseca* y la *intrínseca*. Intuitivamente, la curvatura extrínseca puede entenderse como la de un cilindro. Visto desde fuera es curvo, pero dos líneas paralelas dibujadas en su superficie permanecen paralelas siempre, igual que sucede en el espacio Euclidiano. Lo mismo no se puede decir de una esfera, que posee curvatura intrínseca. La relatividad general trata sólo de la curvatura intrínseca del espacio-tiempo, por lo que es la que se definirá de forma más precisa en esta sección. Durante esta capítulo, siempre que se hable de curvatura, se tratará de curvatura intrínseca.

La cuantificación de la curvatura viene del concepto de *transporte paralelo*. Si los vectores $\vec{V}(x^\mu)$ y $\vec{V}(x^\mu + \delta x^\mu)$ son paralelos y de la misma longitud en puntos infinitesimalmente cercanos de una curva, entonces se dice que \vec{V} fue transportado paralelamente a lo largo de esa curva. Matemáticamente, el requisito para tener transporte paralelo del vector \vec{V} a lo largo del vector \vec{U} es:

$$U^\beta V_{;\beta}^\alpha = 0 \quad (3.14)$$

En espacios curvos, es imposible definir campos vectoriales globalmente paralelos. Es posible definir paralelismo local, es decir, cómo mover un vector de un punto a otro manteniéndolo en paralelo y de la misma longitud entre puntos infinitesimalmente cercanos, pero esto depende de la trayectoria tomada, por lo que sólo un tipo de definición de paralelismo es como la del párrafo anterior es posible (ver fig. 3.1).

Considérese ahora que se necesita calcular la variación en un vector que ha sido transportado paralelamente por una trayectoria cerrada formada por cuatro

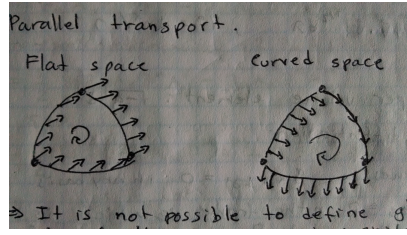


Fig. 3.1: Transporte paralelo de un vector a lo largo de una trayectoria cerrada, en un espacio plano y en un espacio curvo (esta imagen es provisional).

segmentos de líneas coordenadas correspondientes a las coordenadas x^σ y x^λ , formado por los cuatro puntos (a, b) , $(a + \delta a, b)$, $(a + \delta a, b + \delta b)$ y $(a, b + \delta b)$.

Como los vectores a lo largo de los que se realiza el transporte paralelo son vectores base, la ec. 3.14 toma la forma:

$$V_{,\beta}^\alpha = -V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha. \quad (3.15)$$

Integrando la expresión 3.15 respecto a x^σ para encontrar el vector transportado se obtiene:

$$V^\alpha(a + \delta a, b) = V^\alpha(a, b) - \int_{x^\lambda=b} \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha V^\mu dx^\sigma \quad (3.16)$$

Se pueden obtener cuatro expresiones análogas a 3.16, una por cada lado de la trayectoria. Sumándolas todas y aproximando a primer orden, la expresión para el cambio total en el vector es:

$$\delta V^\alpha = \delta a \delta b [\Gamma_{\mu\sigma,\lambda}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^\alpha + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\mu\lambda}^\nu] V^\mu \quad (3.17)$$

La ec. 3.17 muestra que la variación en el vector es proporcional al “área” encerrada en la trayectoria, pero también a la cantidad entre corchetes que depende de la geometría del espacio. A esta cantidad se le llama el *tensor de Riemann*

$$R_{\mu\lambda\sigma}^\alpha := \Gamma_{\mu\sigma,\lambda}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^\alpha + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \quad (3.18)$$

y cumple las propiedades de simetría

$$R^{\alpha\beta\mu\nu} = -R^{\alpha\beta\nu\mu} = -R^{\beta\alpha\mu\nu} = R^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (3.19)$$

Debido a estas propiedades sólo existe una contracción de este tensor que no se anula. Esta contracción es el *tensor de Ricci*:

$$R_{\alpha\beta} := R_{\alpha\mu\beta}^\mu \quad \text{que cumple} \quad R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}. \quad (3.20)$$

Contrayendo el tensor de Ricci con la métrica, se obtiene el *escalar de Ricci*:

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (3.21)$$

Finalmente, el *tensor de Einstein* se define a partir del tensor y el escalar de Ricci:

$$G^{\alpha\beta} := R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} = G^{\beta\alpha} \quad (3.22)$$

Este el tensor que aparece en el lado izquierdo de las ecs. de Einstein 3.1.

3.4 El tensor de energía momento

En las secciones anteriores analizó el miembro izquierdo de las ecuaciones de Einstein. Al principio de este capítulo se mencionó que el tensor de energía-momento contiene información sobre la materia y la energía contenida en el espacio-tiempo. En esta sección se verá cómo construir dicho tensor para el caso de un fluido y un campo escalar.

Para el resto de la exposición se considerará un espacio-tiempo con coordenadas $x^\mu = (t, x^i)$ donde los índices griegos corren de 0 a 4 y los latinos de 1 a 3.

Una manera simple muy general de definir las componentes del tensor de energía-momento es la siguiente:

$$T^{\alpha\beta} := \text{densidad de flujo de la componente } \alpha \text{ del momento a través de una superficie de } x^\beta \text{ constante.} \quad (3.23)$$

donde por “momento” se entiende el 4-momento p^μ , cuyas componentes, al igual que en relatividad especial, en las unidades que se están usando son (E, p^1, p^2, p^3) .

De modo que las componentes de $T^{\alpha\beta}$ tienen el siguiente significado:

T^{00}	Densidad de energía
T^{i0}	Densidad de momento
T^{0j}	Flujo de energía a través de la superficie coordenada j
T^{ij}	Flujo de momento i a través de la superficie coordenada j

Puede demostrarse que el tensor de energía momento es simétrico $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$.

3.4.1 Fluidos perfectos

Un fluido perfecto se define como uno que no tiene viscosidad y que no conduce el calor. El que no exista conducción de calor significa que en un sistema de referencia que se mueve junto con el fluido (que se denomina *sistema momentáneamente comóvil*) no existe flujo de energía en el espacio, por lo que en dicho sistema $T^{0j} = 0$. El que no exista viscosidad significa que no existen fuerzas paralelas al flujo del fluido, por lo que las únicas fuerzas presentes son aquellas perpendiculares a la interfaz entre un elemento de volumen y otro, es decir las que generan la presión. Por lo tanto, el tensor de energía momento de un fluido perfecto en el sistema momentáneamente comóvil de un elemento de fluido en un punto del espacio y en un instante es:

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Observando que en el sistema momentáneamente comóvil el vector unitario asociado al tiempo, \vec{e}_0 , es idéntico a la 4-velocidad del fluido U^α y que toda métrica es localmente equivalente a la de Minkowski, el tensor de energía-momento es:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)U^\alpha U^\beta + pg^{\alpha\beta} \quad (3.25)$$

La ec. 3.25 es una ecuación tensorial, y por lo tanto es válida en todos los sistemas de referencia.

3.4.2 Campos escalares

En la sección 2.2 se encontraron varias ecuaciones de conservación asociadas a simetrías de un Lagrangiano. En especial, se encontraron las ecuaciones de continuidad para la densidad de energía y las densidades de momentos, correspondientes a la invariancia ante traslaciones en el espacio y en el tiempo (ecs. 2.21). Las densidades y flujos $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ que se obtuvieron son entonces precisamente lo que se necesita para construir el tensor de energía momento.

Para un campo escalar, sólo existe una componente del campo. Si el Lagrangiano tiene la forma de la ec. 2.26, al sustituirlo en la ec. 2.21 resulta:

$$T^{\alpha\beta} = \partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi - g^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \partial^\lambda \phi \partial_\lambda \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 \right) \quad (3.26)$$

o para un potencial general:

$$T^{\alpha\beta} = \partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi - g^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \partial^\lambda \phi \partial_\lambda \phi - \frac{1}{2} V(\phi) \right). \quad (3.27)$$

Por último, hay es necesario hacer una observación. En la sección 2.2 se encontró que, para campos, las densidades y flujos que ahora resultaron ser las componentes del tensor de energía momento satisfacen ecuaciones de continuidad, las ecs. 2.21, lo que implica que

$$G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \quad (3.28)$$

Las ecs. 3.28 son a su vez una consecuencia de unas identidades en geometría diferencial, llamadas *identidades de Bianchi*. Debido a la relación entre $G^{\alpha\beta}$ y $T^{\alpha\beta}$ establecida por las ecuaciones de Einstein, resulta que las identidades de Bianchi *implican* que

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \quad (3.29)$$

Esto significa que, bajo cualquier circunstancia, las componentes del tensor energía momento deben satisfacer ecuaciones de conservación.

Capítulo 4

Cosmología

4.1 El principio cosmológico y la métrica FLRW

El propósito de la cosmología es presentar una historia coherente de la evolución del Universo. Para esto se vale de la teoría de la relatividad general, el modelo estándar de partículas elementales y algunos elementos de física más allá del modelo estándar que aún necesitan ser explicados [11]. Estos conocimientos descansan sobre la base de un principio que no proviene propiamente de la ciencia, sino de la metafísica, pero cuyas consecuencias son consistentes con lo que hasta ahora se ha observado. Éste es el *principio cosmológico*, que se explicará a continuación.

Uno de los conceptos que ha sido de mayor utilidad para la ciencia es el considerar que la condición en que nos encontramos no tiene nada de especial, y que es esencialmente igual a las condiciones del resto del Universo. A esta suposición se le llama el *principio cosmológico*. Así, el pensar que la Tierra no es el centro del Universo, sino que es similar a otros cuerpos que pueden observarse desde aquí, condujo directamente a la formulación del modelo heliocéntrico. Del mismo modo, el suponer que el hombre no es una criatura diferente al resto de los animales permitió entender la historia de nuestra especie en términos de la evolución. Del mismo modo, para estudiar el Universo partimos, como primera aproximación, de que éste es similar en todas partes, así que partimos de un Universo *homogéneo e isótropo*.

Por supuesto, esta suposición no puede mantenerse siempre. La situación en que estamos en relación al resto del Universo en realidad sí es especial. Cada planeta tiene sus propias características, como su clima, su campo magnético y su geología. La característica del nuestro es la capacidad de albergar vida. Del mismo modo, cada animal tiene sus propias características: diferentes tipo de piel, un esqueleto particular o distintos tipos de alimentación. Llendo más a detalle, ninguna persona es exactamente igual a otra, ni siquiera los gemelos. En el caso del Universo, ninguna galaxia es igual a otra, y en general cada región es única. La utilidad del principio cosmológico reside en que todas las regiones son similares “en lo general”, aunque cada una tenga sus características particulares.

La métrica que se utiliza como primera aproximación para estudiar el Universo se obtiene, no como solución a las ecuaciones de Einstein (aunque puede demostrarse que lo es), sino partiendo de los requisitos de homogeneidad e

isotropía. Esta es la métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker, cuyo elemento de línea en coordenadas esféricas se escribe:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1+kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \quad (4.1)$$

A la cantidad $a(t)$ se le llama *factor de escala universal*. A distancias calculadas con las diferencias entre las coordenadas espaciales se les llama *distancias comóviles*, mientras que la *distancia física* es la que se obtiene del elemento de línea. El factor de escala se elige de modo que en el momento actual $a = 1$, es decir, en la actualidad la distancia física coincide con la distancia comóvil. El factor k está relacionado con la curvatura del universo, $k > 0$ corresponde a un Universo cerrado, $k = 0$ a uno plano y $k < 0$ a uno abierto.

En este capítulo no se adoptará el sistema de unidades geometrizadas. Insertando esta métrica en las ecuaciones de Einstein, la componente tiempo-tiempo da una ecuación de evolución para el factor de escala, que se conoce como ecuación de Friedmann:

$$H^2 := \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad (4.2)$$

Donde a H se le llama *constante de Hubble*. Aunque por razones históricas H suele expresarse en unidades de (km/s)/Mpc, en realidad tiene las unidades de tiempo o distancia inverso. En un sistema de unidades con $c = 1$ se puede definir una distancia $R_H := H^{-1}$, conocida como el *radio de Hubble*. Derivando la ec. 4.2 y combinando con la conservación del tensor de energía-momento (ec. 3.29), para un Universo plano se obtiene la ecuación:

$$\ddot{a} = -\sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \frac{\dot{a}}{2\rho^{1/2}} (\rho + 3p) \quad (4.3)$$

Es útil definir una cantidad llamada *densidad crítica* ρ_c , que corresponde a la densidad de energía del Universo si la curvatura espacial fuera nula. De la ec. 4.2 resulta:

$$\frac{8\pi G\rho_c}{3} = H^2. \quad (4.4)$$

Otras cantidades útiles son los llamados parámetros cosmológicos Ω_X . Para una componente X del universo,

$$\Omega_X := \frac{\rho_X}{\rho_c}. \quad (4.5)$$

El parámetro cosmológico del total de materia-energía en el Universo es simplemente $\Omega = \rho/\rho_c$. Se puede decir que la curvatura contribuye a la densidad total del Universo con un parámetro cosmológico “efectivo”

$$\Omega_k := \frac{k}{(aH)^2} = k/\dot{a}^2. \quad (4.6)$$

De modo que la ec. de Friedmann puede escribirse:

$$\Omega - 1 = \Omega_k. \quad (4.7)$$

Materia	w	$\rho \propto$
Bariones y materia oscura	0	a^{-3}
Materia ultrarelativista	1/3	a^{-4}
Energía oscura	-1	Independiente de a

Table 4.1: Ecuación de estado y dependencia entre la densidad y el factor de escala para diversos tipos de fluidos cosmológicos.

4.2 Fluidos

En el capítulo 3 se expusieron las ecuaciones de Einstein, que describen la forma en que la presencia de materia o energía afecta la geometría del espacio-tiempo. Para cerrar el sistema, hacen falta ecuaciones para la dinámica de la materia-energía. En el caso de que ésta sea un fluido perfecto como los estudiados en la sección 3.4.1, su dinámica estará descrita por una ecuación de estado de la forma:

$$p = w\rho, \quad (4.8)$$

donde p y ρ tienen el mismo significado que en el capítulo 3 y w es un parámetro adimensional que depende del tipo de materia en consideración. La ec. 4.8 está relacionada de cierto modo con la ecuación de estado de un gas ideal. En un universo homogéneo en expansión como el descrito por la métrica FLRW, es posible relacionar una relación entre la densidad de energía y el factor de escala. La relación general es:

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)} \quad (4.9)$$

Hasta donde se sabe actualmente, los componentes del Universo son materia ordinaria o bariónica, materia oscura, materia ultrarelativista como la radiación y los neutrinos y energía oscura. En la tabla 4.1 se muestra el parámetro w que corresponde a cada una de ellas y la relación entre su densidad y el factor de escala.

La historia de los modelos cosmológicos ampliamente aceptados, desde principios del siglo XX hasta la actualidad, puede resumirse a muy grandes rasgos de la siguiente manera [12]:

En 1917, Einstein propuso un modelo de Universo homogéneo basado en la relatividad general. Al buscar que fuera estático, incorporó una constante cosmológica, Λ , que cancelaba la expansión. El modelo de Einstein resultó ser inestable, y fue abandonado en favor de un modelo en expansión sin constante cosmológica, que pareció ser confirmado por las observaciones de Hubble, publicadas en 1929. En la década de 1960, las mediciones del fondo cósmico de microondas (CMB) de Penzias y Wilson y otras observaciones favorecieron un modelo de origen del Universo conocido como Big Bang Caliente, en el que éste pasa por un era en que la mayor parte de su densidad es debida a radiación (era de dominación de radiación), antes de entrar a la era dominada por la materia, a la que en ese entonces se creía pertenecía la época actual. Para 1998, nuevas observaciones habían dejado claro que (1) el Universo es plano; (2) que

la mayoría de la densidad de energía en él se debe a componentes “oscuros” no bariónicas, una con propiedades muy similares a la materia bariónica pero no interactuante con ésta más que mediante la gravedad, y la otra (3) una especie de energía del vacío que causa una expansión acelerada del Universo y que domina la densidad de energía de éste en la época actual ($\Omega_\Lambda \approx 0.7$). A estas dos nuevas componentes del Universo se les llama *materia oscura* y *energía oscura*, respectivamente.

Durante mucho tiempo hubo serios problemas para explicar algunas observaciones cosmológicas desde el paradigma del Big Bang caliente. Una solución muy exitosa a ellos fue la propuesta debida a Starobinski y Guth (independiente, en 1979 y 1981) de que antes de la época de dominación de radiación existió una época dominada por una forma de energía del vacío, que causó una expansión acelerada del Universo. Esta suposición es conocida como *modelo inflacionario*, y actualmente goza de mucha aceptación en la comunidad científica [12]. En la siguiente sección se explicarán brevemente los problemas que soluciona este modelo y se darán algunos detalles más sobre él.

4.3 Inflación

4.3.1 Motivación para la inflación

El modelo inflacionario se propuso para resolver cuatro problemas: el del Universo plano, el del horizonte, el del origen de las perturbaciones y el de los monopolos. A continuación se explicará cada uno de ellos y cómo suponiendo un periodo de inflación pueden resolverse.

Problema del Universo plano

El problema del Universo plano consiste en que todas las observaciones indican que actualmente y durante mucho tiempo atrás, $\Omega_k \leq 10^{-2}$. Esto no es algo de esperarse, ya que de acuerdo con las ecs. 4.2 y 4.7, durante la época de dominación de materia $|\Omega_k| \propto t^{2/3}$ y durante la de dominación de radiación $|\Omega_k| \propto t^{2/3}$. Es decir, sólo es posible tener un Universo tan plano y a la vez tan viejo como el nuestro si desde el inicio $|\Omega_k| = |\Omega - 1|$ era ya muy cercano a cero.

El que esto fuera así requeriría un ajuste muy fino de la densidad de energía original para que fuera aproximadamente la crítica, un ajuste que es poco común en la física y que no parece tener ninguna justificación, fuera de que así es como se observa.

Sin embargo, observando la ec. 4.6, puede notarse que $\Omega_k \propto \dot{a}^{-2}$, por lo que en un periodo en que la expansión se acelerara en lugar de desacelerarse se tendría que $\dot{a}^{-2} \rightarrow 0 \implies \Omega_k \rightarrow 0$. Considerando una época de expansión acelerada en que, por simplicidad, $H(t)$ es constante, puede calcularse que para que el Universo sea tan plano como es en ésta época, es necesario que haya al menos tanta expansión durante la época inflacionaria como hubo después de ella. Para cuantificar la expansión, se utiliza la cantidad N , a la que se llama número de e-folds y que se define:

$$\text{Número de e-folds entre } a_1 \text{ y } a_2 = N := \ln a_2 - \ln a_1. \quad (4.10)$$

Entonces se necesita que haya al menos tantos e-folds de inflación como e-folds transcurridos después de la inflación. Este número está calculado en aproximadamente 67, aunque la mínima estimación en la literatura es de 37 [12].

Problema del horizonte

El horizonte de partículas $d_H(t_1, t_2)$ se define como la distancia al tiempo t_2 entre dos fotones emitidos desde el mismo punto y al mismo tiempo t_1 , pero en direcciones opuestas. Este horizonte es entonces la máxima distancia entre dos eventos causalmente conectados.

$$d_H := 2a(t_2) \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} = 2a_2 \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{a^2 H(a)}, \quad (4.11)$$

donde a_1 y a_2 son los factores de escala en los tiempos t_1 y t_2 . De la ec. de Friedmann (4.2), durante la dominación de radiación, $H \propto a^{-2}$,

$$\implies d_H(t_1, t_2) = \frac{2}{H_2} \frac{a_2 - a_1}{a_2} \approx \frac{2}{H_2} = 2R_H, \quad (4.12)$$

donde en la aproximación se supuso que $a_2 \gg a_1$.

Ahora bien, R_H puede ser calculado para la época en que se emitió el CMB, y resulta subtender unos cuantos grados en la esfera celeste. Dado que ése es el radio de conexión causal sin suponer inflación, sería de esperarse que el CMB consistiera de varias regiones homogéneas de diámetro $2R_H$ aproximadamente, pero en lugar de eso se ve sumamente homogéneo, todo a una temperatura de $2.72548 \pm 0.00057\text{K}$. ¿Cómo es eso posible si no está causalmente conectado? Nótese que, incluso extrapolando hacia $a_1 = 0$ se obtiene el mismo resultado, ya que esto es equivalente a la aproximación que se tomó en la ec. 4.12.

La respuesta viene de analizar nuevamente la ec. 4.11. Resulta que la integral es acotada cuando $a_1 \rightarrow 0$ dependiendo del valor de \dot{a} . En concreto, si \dot{a} aumenta al disminuir a , la integral diverge cuando $a_1 \rightarrow 0$. Al calcular bajo qué condiciones toda la esfera celeste puede estar causalmente conectada, éstas resultan ser las mismas que para el problema del Universo plano.

Problema del origen de las perturbaciones

Éste problema es muy similar al del horizonte y no es independiente de éste. Debido a que el Universo en realidad es inhomogéneo, es necesario encontrar un mecanismo físico que genere sus inhomogeneidades. Para su estudio, éstas suelen descomponerse en modos de Fourier; sin embargo, como el Universo está en expansión, la longitud de onda física de estos modos depende del factor de escala:

$$\lambda(t) = \frac{2\pi a(t)}{k} \quad (4.13)$$

donde k no es la curvatura, sino el número de onda de cada modo.

Antes se dijo que, durante el dominio de la radiación, $a \propto t^{1/2}$ y $R_H \propto t$, de modo que el radio de Hubble crece más rápido que las inhomogeneidades. De extrapolar esta tendencia hacia el pasado, resulta que en algún momento estas últimas fueron mayores al radio de Hubble, incluso las “pequeñas”, de la escala

de un cúmulo de galaxias (1 Mpc). Igual que antes, una perturbación coherente no podría ser tan grande que excediera el radio de conexión causal. Al analizar el espectro de potencias de las inhomogeneidades, sería de esperarse que éste fuera el característico del ruido blanco para las que eran mayores a R_H en su tiempo. Sin embargo, esto no es así, y en lugar de eso es el característico de perturbaciones coherentes.

Para resolver este problema, hay que considerar desde el principio la razón entre la longitud de onda de las inhomogeneidades y el radio de Hubble:

$$\frac{\lambda(t)}{R_H(t)} = \frac{2\pi a(t) \dot{a}(t)}{k a(t)} = \frac{2\pi \dot{a}(t)}{k}. \quad (4.14)$$

De la ec. 4.14, puede verse que en un periodo de expansión acelerada, la perturbaciones pueden crecer más rápido que el radio de Hubble. Eventualmente éstas pueden salir de aquel y volver a entrar tiempo después, cuando el periodo de expansión acelerada termina, y el radio de Hubble crece más rápido en comparación y vuelve a abarcarlas. Nuevamente, suponiendo que en la expansión acelerada H es constante, la condición para que lo arriba descrito ocurra es el que el número de e-folds de inflación iguale al transcurrido después de la inflación.

Problema de los monopolos

Sin entrar en muchos detalles, algunas teorías de física más allá del modelo estándar predicen la formación de monopolos magnéticos y otras reliquias exóticas y estables en el origen del Universo. Éstas partículas suelen tener grandes masas en reposo, por lo que se diluyen con a^{-3} , igual que la materia ordinaria y la materia oscura, y más lentamente que la radiación, por lo que encontrarlas debería ser más frecuente en la actualidad de lo que es (nunca se ha encontrado ninguno). Si se supone que la formación de estas reliquias ocurrió antes del periodo inflacionario, éste constituye un buen mecanismo para diluirlas tanto que incluso pueda no quedar ninguna de ellas dentro de una esfera del radio del Universo observable.

Sobre este argumento, el cosmólogo Martin Rees escribió: “los escépticos sobre la física exótica no deberían estar muy impresionados por un argumento teórico que explique la ausencia de partículas que a su vez son solamente hipotéticas. La medicina preventiva siempre resulta ser cien por ciento efectiva para una enfermedad que no existe!” [13]. Sin embargo, explicar la ausencia de monopolos fue una de las motivaciones originales de la inflación para Guth, como puede verse en su artículo de 1981 [14].

Ahora que se han discutido los problemas que se resuelven postulando el periodo de inflación al inicio del universo, es necesario discutir el problema de cómo generarlo.

4.3.2 Inflación por un campo escalar

Inspeccionando la ec. 4.3, puede verse que para tener un universo en expansión acelerada, se necesita que $\rho + 3p < 0$, es decir, que la presión sea negativa y mayor que $\rho/3$. La forma más fácil de lograrlo es introduciendo una constante cosmológica Λ en las ecuaciones de Einstein. Un Universo con constante cosmológica, y por lo tanto H constante, se llama Universo de *de Sitter*. Sin

embargo esto no es una buena solución porque sabemos que esa expansión acelerada terminó en algún momento, y no es fácil pensar en un mecanismo que “apague” la constante cosmológica.

La siguiente opción es considerar un campo escalar clásico (o uno cuántico pero coherente) que rueda lentamente por un valle de potencial casi plano. A este campo se le llama el *inflatón*. Para un campo escalar homogéneo, la presión y la densidad están dadas por (ver ecs. 3.24 y 3.27):

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi) \quad (4.15)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi) \quad (4.16)$$

y la evolución del campo está dada por la ecuación de Klein-Gordon:

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + V_{,\Phi}(\Phi) = 0. \quad (4.17)$$

Esta ecuación tiene la forma de la de un oscilador armónico amortiguado, con el término de fricción dado por la expansión del Universo. Considerando que el inflatón en algún momento decaerá en las partículas que existen en la actualidad, la ec. 4.17 debería escribirse

$$\ddot{\Phi} + (3H + \Gamma_{\Phi})\dot{\Phi} + V_{,\Phi}(\Phi) = 0 \quad (4.18)$$

Donde el Γ_{Φ} es una tasa de decaimiento. Sin embargo aquí puede dejar de tomarse en cuenta, ya que se supone que la fricción debida a la expansión del Universo en ese momento es mucho mayor que la debida al decaimiento del inflatón.

El campo provocará una expansión acelerada mientras se cumpla que $V(\Phi) \gg (1/2)\dot{\Phi}^2$. Ésta se conoce como la *primera condición de rodamiento lento* (*slow roll* en inglés). La segunda condición de rodamiento lento asegura que la primera se cumpla por suficiente tiempo como para tener una inflación sostenida. Ésta es que $|\ddot{\Phi}| \ll 3H|\dot{\Phi}|$.

Ambas condiciones pueden escribirse con la ayuda de los parámetros de rodamiento lento ϵ y η , definidos por primera vez por Liddle y Lyth [12].

$$\epsilon := \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V_{,\Phi}}{V} \right)^2 \quad (4.19)$$

$$\eta := \frac{1}{8\pi G} \frac{V_{,\Phi\Phi}}{V} \quad (4.20)$$

$$\implies \epsilon \ll 1, \eta \ll 1. \quad (4.21)$$

Los parámetros ϵ y η son de gran utilidad para delimitar la validez de los modelos de inflación usando las observaciones, ya que se puede establecer una relación entre ellos, el espectro de potencias y la razón entre modos tensoriales y escalares de las inhomogeneidades del Universo.

Lo que se ha descrito hasta ahora es muy general. Existen varios modelos de inflación en la literatura, que difieren tanto en el potencial que usan como en la manera en que inicia y se concluye el periodo inflacionario. En el libro de texto de Liddle y Lyth [7] puede encontrarse una revisión muy clara y concisa de varios de éstos. Los potenciales de la forma Φ^α pertenecen a la categoría usualmente llamada *inflación caótica*, aquellos en que las condiciones de rodamiento

lento se satisfacen cerca de un máximo local del potencial se llaman modelos de colina (*hilltop models*), y un subconjunto de éstos que involucra un rompimiento espontáneo de simetría se conoce como *nueva inflación*. Todos estos modelos tienen en común que la etapa inflacionaria se termina cuando se dejan de cumplir las condiciones de rodamiento lento al acercarse el campo a un mínimo del potencial. Hay otra categoría de modelos en la que el fin de la inflación se da al ocurrir una transición de fase asociada a un rompimiento espontáneo de simetría de un campo escalar “cascada” χ , que sucede cuando el inflatón pasa a través de un valor crítico. Éstos se conocen como modelos de *inflación híbrida*.

4.3.3 Inflación híbrida

Un potencial típico de la inflación híbrida es de la forma:

$$V(\phi, \Phi) = V_0 + \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2 + \frac{1}{4}\lambda\chi^4 + \frac{1}{2}\lambda'\chi^2\phi^2. \quad (4.22)$$

Si el valor de expectación del inflatón en el vacío es $\langle\phi\rangle = M$, el potencial 4.22 puede reescribirse:

$$V(\phi, \Phi) = \frac{1}{4}\lambda(\chi^2 - M^2)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\lambda'\chi^2\phi^2 \quad (4.23)$$

Puede verse que éste potencial posee la simetría global $\chi \rightarrow -\chi$ (llamada simetría Z_2), que está espontáneamente rota en el vacío, pero queda restaurada para $\phi > \phi_c := m_\chi^2/\sqrt{\lambda'}$, por lo que ocurre una transición de fase en la que el inflatón se identifica con el parámetro de orden. Abajo de ϕ_c , el campo cascada se desestabiliza, y la inflación termina cuando éste y el inflatón descienden rápidamente a sus valores de expectación en el vacío.

El modelo antes descrito puede complicarse de muchas formas. Una de ellas es agregando una pequeña depresión en el centro del potencial del campo cascada para formar un estado estable, de modo que la llegada al valor de expectación sea posible sólo cuánticamente a través del efecto túnel. En ese caso, el estado metaestable del centro denomina *estado de falso vacío*, mientras que los mínimos absolutos corresponden a *estados de vacío real*. La densidad de energía que produce la expansión acelerada es la del potencial en el vacío falso, y ésta termina cuando se produce el tunelamiento. Entonces se empieza a formar una burbuja de vacío real que se expande a una velocidad cercana a la de la luz, destruyendo en vacío falso.

Podría pensarse que en este caso, el inflatón ni siquiera sigue siendo necesario siempre que la tasa de tunelamiento sea suficientemente pequeña: el campo cascada podría permanecer en el falso vacío causando la inflación y luego tunelar hacia el vacío real terminándola. De hecho, esta era la idea de los primeros modelos inflacionarios, como el de Guth, que en la actualidad se conocen como *vieja inflación*. Sin embargo, después se demostró que esto no funcionaría, ya que si el Universo se siguiera expandiendo con la densidad de energía de la época inflacionaria, las burbujas de vacío real nunca podrían unirse. Es por esto que es necesario que el inflatón disminuya la energía del vacío falso antes de que el tunelamiento suceda [7].

4.4 Metaestabilidad del vacío y fin el del Universo

De la misma forma en que un tunelamiento hacia el estado de vacío actual fue posiblemente el causante del fin de la era inflacionaria, un tunelamiento similar podría causar en el futuro el fin del Universo como lo conocemos. Esta posibilidad fue explorada por primera vez por Coleman y de Luccia en 1980 [2], quienes estudiaron la expansión de una burbuja de vacío real incorporando los efectos de gravitación.

El incluir la gravitación en los cálculos es de mucha importancia. Esto pudo verse especialmente al final de la sección 4.3: incluso en un sistema con varios mínimos de potencial, el cero de la densidad de energía no puede escogerse libremente en relatividad general, ya que diferentes elecciones afectarían el valor de la constante cosmológica. De este modo, si el vacío actual en el que se encuentra al Universo no es el vacío real, existe el peligro de que en cierto momento se forme en él una burbuja de vacío auténtico que crezca y eventualmente lo sustituya por “otro Universo” con un valor de la constante cosmológica distinto y posiblemente algunas leyes de la física diferentes.

Dependiendo del valor de la nueva constante cosmológica puede ser que el nuevo Universo siga teniendo una geometría similar o adquiera una métrica anti-de Sitter (lo mismo que la de de Sitter, pero con el signo de la constante cosmológica opuesto), lo que lo haría inestable y eventualmente colapsaría [2].

Una de las características más inquietantes de este escenario, es que, a diferencia de la muerte térmica que posiblemente le aguarda al Universo dentro de millones de millones de años, un evento de este tipo podría suceder en cualquier momento. Sin embargo, el hecho de que haya existido por tanto tiempo puede ser una señal de que o está en un vacío auténtico o está en un vacío falso sumamente estable.

Cuando se empezó a planear la construcción de aceleradores de partículas cada vez más potentes, algunas personas temían que la alta densidad de energía que fueran capaces de concentrar fuera suficiente para desestabilizar el vacío falso del Universo e iniciar una burbuja como las descritas arriba. Estudios para determinar que esto no sucedería fueron, como lo muestra el último reporte del grupo de evaluación de seguridad del LHC [15]. Los experimentos que actualmente se realizan de forma controlada en este tipo de laboratorios no son más energéticos que los bombardeos de rayos cósmicos que la atmósfera ha recibido durante millones de años, por lo que no representan un peligro para el estado de vacío actual del Universo.

Capítulo 5

Relatividad Numérica

5.1 Métodos de diferencias finitas

5.1.1 Discretización

Prácticamente en todas las ramas de la física es necesario tratar con campos, es decir, con funciones continuas de varias variables definidas en un dominio continuo. Algunos ejemplos son los campos electromagnéticos y la densidad de carga en electromagnetismo, los campos de velocidad en hidrodinámica y la temperatura en la termodinámica de procesos fuera del equilibrio. Debido a que los campos son funciones de varias variables, su dinámica se expresa por medio de ecuaciones diferenciales parciales. Así, los campos electromagnéticos son soluciones a las ecuaciones de Maxwell, los campos de velocidad de un fluido Newtoniano obedecen las ecuaciones de Navier-Stokes, y la temperatura de una pieza de material fuera de equilibrio obedece la ecuación de Fourier. En relatividad general, los campos cuya dinámica se desea conocer son las componentes de la métrica del espacio-tiempo y las ecuaciones que dictan su comportamiento son las ecuaciones de Einstein.

Las ecuaciones diferenciales parciales que describen la evolución de campos físicos son la mayoría de las veces imposibles de resolver analíticamente. Las únicas excepciones suelen ser casos muy idealizados, cuyas soluciones ayudan a nuestra comprensión de la física, pero son inútiles en situaciones realistas. No es necesario tener situaciones muy elaboradas para que sea más práctico obtener una solución numérica que una analítica en un problema de ecuaciones diferenciales parciales. Basta con tener fronteras irregulares (por ejemplo el ala de un avión en hidrodinámica) o algunos términos no lineales para que decidir que no vale la pena intentar una solución analítica y en lugar de buscarla, usar el poder de la computadora para encontrar una numérica.

Existen varios métodos para resolver numéricamente una ecuación diferencial parcial o un sistema de ellas. Los más populares son el método de diferencias, el método de elemento finito y los métodos espectrales. Los tres poseen ventajas en diferentes aplicaciones, sin embargo en este trabajo se explicará únicamente el de diferencias finitas, que además es tal vez el más fácil de entender conceptualmente.

El método de diferencias finitas consiste en dos partes: preparar el dominio para poder tratarlo computacionalmente y simplificar las ecuaciones diferen-

ciales convirtiéndolas en ecuaciones algebraicas. Los campos están definidos sobre dominios continuos, es decir, se necesita un número infinito no contable de variables para especificarlos por completo. Además muchas veces los campos están definidos sobre todo el espacio, por lo que tienen un dominio infinito. Como es de esperarse, es imposible tratar por computadora un dominio con tales características. En lugar de buscar la solución en todo el espacio, se busca sólo en una región donde se espera que sucedan todos los fenómenos de interés, denominada el *dominio computacional*. Esta región está delimitada por fronteras que pueden ser de diferente tipo (reflejantes, periódicas, etc.), de las cuales se hablará más adelante. Debido a la imposibilidad de usar un número infinito de puntos en el dominio, se utiliza un conjunto finito suficientemente grande. Los puntos pueden estar o no separados uniformemente. A este conjunto de puntos del dominio se le llama la *mall*.

Para convertir las ecuaciones diferenciales en algebraicas, se utilizan aproximaciones en series de Taylor. Para proseguir con la explicación voy a considerar una mall en dos dimensiones x y t , y a suponer que los puntos están uniformemente separados entre sí por distancias Δx y Δt . Así, si u_{mn} es el m -ésimo punto en x , y el n -ésimo punto en t , $u_{mn} = u(x, t)$, entonces $u_{m+1n} = u(x + \Delta x, t)$ y $u_{mn+1} = u(x, t + \Delta t)$. Con esto en mente, la aproximación en serie de Taylor de u en los puntos $(x + \Delta x, t)$ y $(x - \Delta x, t)$ es:

$$u_{m+1n} = u_{mn} + u'(x, t)\Delta x + \frac{1}{2}u''(x, t)(\Delta x)^2 + \dots \quad (5.1)$$

$$u_{m-1n} = u_{mn} - u'(x, t)\Delta x + \frac{1}{2}u''(x, t)(\Delta x)^2 + \dots \quad (5.2)$$

Si se desea obtener una aproximación de segundo orden para la segunda derivada respecto a x en el punto (x, t) , pueden sumarse ambas ecuaciones y obtener

$$u''(x, t) = \frac{u_{m-1n} - 2u_{mn} + u_{m+1n}}{(\Delta x)^2} \quad (5.3)$$

El mismo procedimiento se puede utilizar para encontrar una aproximación de segundo orden para la segunda derivada respecto a t :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{u_{mn-1} - 2u_{mn} + u_{mn+1}}{(\Delta t)^2} \quad (5.4)$$

Por ejemplo, la ecuación de onda en una dimensión se escribe:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5.5)$$

Una aproximación en diferencias finitas de la ec. 5.5 usando las ecs. 5.3 y 5.4 es:

$$\rho^2(u_{m-1n} - 2u_{mn} + u_{m+1n}) - (u_{mn-1} - 2u_{mn} + u_{mn+1}) = 0 \quad (5.6)$$

Donde $\rho := c\Delta t/\Delta x$ se conoce como el parámetro de Courant. La ec. 5.6 tiene la propiedad de que u_{mn+1} puede despejarse y así, para aproximar el valor de la solución u en el nivel $n + 1$ sólo es necesario conocer los valores en

los niveles n y $n - 1$. Es importante mencionar que las aproximaciones dadas por las ecs. 5.3 y 5.4, y por lo tanto la expresión 5.6, no son únicas.

Es posible encontrar distintas aproximaciones de segundo orden para las derivadas combinando diferentes desarrollos en series de Taylor en varios puntos. Algunas de estas tendrán la propiedad que se menciona en el párrafo anterior, pero otras no. A las primeras se les llama aproximaciones *explícitas*, y en ellas la solución en el nivel n puede encontrarse únicamente a partir de la solución en los niveles previos. En las otras, el conocimiento de la solución en un punto requiere información sobre otros puntos en el mismo nivel. Esta información se obtiene invirtiendo una matriz no trivial, lo cual, aunque es computacionalmente más costoso, suele resultar en mejores propiedades del algoritmo, como mayor estabilidad. A esta segunda clase de aproximaciones se les llama *implícitas*.

5.1.2 Criterios para la elección de aproximaciones

Como se mencionó al final de la sección anterior, hay muchas maneras diferentes de aproximar una derivada en diferencias finitas. Esto es cierto a cualquier orden, y, de hecho, el número de posibles aproximaciones es infinito, incluso al mismo orden. Las aproximaciones pueden, por ejemplo, diferir entre sí por los puntos de la malla involucrados en ellas, o por si a su vez realizan o no promedios (con distintos pesos) entre aproximaciones a su vez obtenidas en distintos puntos o a distintos órdenes.

Para ayudarnos a decidir entre esta infinita variedad de aproximaciones posibles, existen tres criterios que pueden ser de gran ayuda: la consistencia, la convergencia y la estabilidad. Para una explicación más detallada de cada una de ellas, se puede consultar [16], así como las referencias ahí citadas.

La consistencia la propiedad local de que, en el límite continuo, la solución numérica se aproxime a la solución de la ecuación diferencial original y no a otra cosa. La mayoría de las veces la consistencia puede verificarse analíticamente a simple vista. Algunas excepciones que requieren un análisis un poco más detallado suelen aparecer cuando el sistema de coordenadas es singular en algún punto, como ocurre en el origen en coordenadas esféricas. Una solución a este problema, que es la que adopta el código usado en este trabajo, puede ser omitir el origen, y construir la malla de modo que éste quede en medio de dos puntos de ésta.

La consistencia es una propiedad muy importante porque si no se cumple, aunque sea tan sólo en un punto (como en el origen), no será posible obtener la solución correcta de la ecuación diferencial.

Hay un asunto particular de mucho interés sobre la consistencia de ciertos métodos de diferencias finitas, llamados “métodos explícitos”, de los que se hablará en la sección 5.1.3.

En éstos métodos, cada paso se va obteniendo a partir de los valores de la malla en el paso anterior, por lo que incorporan información sobre la causalidad. Cuando un sistema en el que los cambios o las señales se propagan a una velocidad c se evoluciona utilizando uno de éstos esquemas, es importante que en el cálculo de un punto del nivel $n + 1$ se consideren todos los puntos del nivel n que lo afectarían en el sistema físico real. La condición para que esto ocurra es que el dominio de dependencia numérico sea mayor que el físico, lo que se expresa en forma matemática por:

$$c \leq \Delta x / \Delta t \quad (5.7)$$

La ec. 5.7 se conoce como *condición de Courant-Friedrich-Lewy*, o *condición CFL*. Si no se cumple, no habrá consistencia, ya que aunque se “traduzcan” a diferencias finitas las derivadas de una ecuación diferencial parcial, se estaría dejando fuera información sobre la física del sistema, y el esquema en diferencias finitas nunca se aproximaría a la solución real al hacer $\Delta x \rightarrow 0$.

La propiedad de convergencia también se refiere a que la aproximación mejore al aumentar la resolución, sin embargo, es distinta a la consistencia porque se trata de una propiedad global. Un esquema de diferencias finitas converge si la aproximación mejora a un *tiempo finito* T . Incluso si las ecuaciones en diferencias finitas se reducen localmente a la ecuación diferencial parcial que se desea resolver, es posible que la aproximación no mejore en T , ya que aumentar la resolución implica también aumentar el número de pasos, y si el error asociado a cada paso no se reduce a un ritmo suficientemente rápido cuando $\Delta t \rightarrow 0$, es posible que al llegar a T se haya acumulado más en lugar de menos error. Por lo tanto, la consistencia no implica convergencia. Ésta propiedad suele ser difícil de probar analíticamente, pero fácil de probar numéricamente mediante lo que se denominan *pruebas de convergencia*, sobre las que se hablará más detenidamente en el apartado 5.1.5. Un hecho que es importante mencionar es que, aunque es fácil demostrar que un esquema en diferencias finitas converge, suele ser difícil demostrar si la función a la que converge es realmente la solución.

Finalmente, la estabilidad es la propiedad de que la solución en diferencias finitas no se amplifique arbitrariamente al cambiar T ó Δt .

Para concluir esta sección, menciono el teorema fundamental del análisis de métodos de diferencias finitas, conocido también como *Teorema de Lax* o *Teorema de Lax-Richtmyer*:

Dado un problema de valores iniciales bien planteado matemáticamente y una aproximación en diferencias finitas a éste que satisface la condición de consistencia, entonces la estabilidad es condición necesaria y suficiente para la convergencia. [16]

La importancia de este teorema reside en que la consistencia y la estabilidad suelen ser fáciles de probar, mientras que la convergencia a la solución deseada es difícil de probar, pero es el objetivo de toda aproximación en diferencias finitas. El teorema de Lax permite asegurar la convergencia probando la consistencia y la estabilidad.

5.1.3 Métodos explícitos e implícitos

Al final del apartado 5.1.1 se mencionó que existen métodos explícitos e implícitos. En este apartado se presentarán algunos ejemplos de tales métodos y de otra clase de la cual los explícitos son de cierto modo un caso particular. La exposición está orientada a presentar al final el método de Crank-Nicholson iterado (ICN), que es el utilizado en este trabajo. Siguiendo a la referencia [16], para ilustrar cada uno de los métodos se utilizará una aproximación en diferencias finitas de la ecuación de advección en una dimensión, una ecuación que surge en problemas de transporte:

$$\partial_t u + \lambda \partial_x u = 0 \quad (5.8)$$

La ecuación de advección es una ecuación de primer orden. Estudiar cómo resolver este tipo de ecuaciones es muy importante, ya que todas las ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales parciales pueden escribirse como sistemas de ecuaciones de primer orden al definir las derivadas de primer orden como variables auxiliares.

Un ejemplo ilustrativo de un método explícito tradicional es el método avanzado de Euler. En éste se aproximan a primer orden las derivadas espaciales y temporales de la siguiente forma:

$$\partial_t u \rightarrow \frac{u_{m\ n+1} - u_{m\ n}}{\Delta t} \quad (5.9)$$

$$\partial_x u \rightarrow \frac{u_{m+1\ n} - u_{m-1\ n}}{2\Delta x} \quad (5.10)$$

Sustituyendo en la ec. 5.8 y despejando el valor correspondiente al último paso en el tiempo, se obtiene:

$$u_{m\ n+1} = u_{m\ n} - \frac{\lambda \rho}{2} (u_{m+1\ n} - u_{m-1\ n}) \quad (5.11)$$

El método de Euler es inestable y por lo tanto inútil. Pero ilustra cómo funciona un método explícito: los valores en cada nuevo paso se calculan a partir de los ya encontrados en cada paso anterior. También ilustra que generalmente los métodos más sencillos no son los mejores. Sin embargo, existen otros métodos explícitos con buenas propiedades de estabilidad, tales como el método upwind, el de Lax-Friedrichs y el de Lax-Wendroff. Puede encontrarse una explicación concisa de éstos en la ref. [16]. Los tres métodos recién mencionados mejoran las propiedades de la aproximación incorporando información sobre la causalidad, aumentando el orden o tomando promedios. Otra forma en que mejoran las propiedades del método es haciéndolo implícito.

El método de Crank-Nicholson es una versión implícita del método de Euler. El método se convierte en implícito al calcular la derivada espacial como un promedio entre su aproximación en los niveles n y $n + 1$.

$$\frac{u_{m\ n+1} - u_{m\ n}}{\Delta t} + \lambda \frac{u_{m+1\ n+1} - u_{m-1\ n+1} + u_{m+1\ n} - u_{m-1\ n}}{4\Delta x} = 0 \quad (5.12)$$

Este método es estable para cualquier valor del parámetro de Courant, es decir “incondicionalmente estable” y resulta ser de segundo orden. Sin embargo, la matriz que resulta no siempre es fácil de invertir, y en sistemas no lineales esto resulta sumamente impráctico.

La tercera clase de métodos que mencioné al inicio de este apartado son los métodos de líneas. La idea principal en que se basan es en desacoplar las derivadas espaciales de las temporales, usando algún tipo de diferenciación en la parte espacial y luego integrando la parte temporal como si se tratara de una ecuación diferencial ordinaria. Las ecuaciones en un esquema de método de líneas tienen la forma:

$$\partial_t u = \mathbf{O}u, \quad (5.13)$$

donde \mathbf{O} es un operador en diferencias finitas. Un método de integración para la parte temporal puede ser por ejemplo el de Runge-Kutta de orden 4. Si se usa un método de integración de un solo paso, entonces el método de líneas se reduce a los métodos explícitos descritos arriba.

Un método muy popular en relatividad numérica es el método de Crank-Nicholson iterado. La premisa de este es intentar resolver el método implícito de Crank-Nicholson usando un algoritmo iterativo. Realmente no es necesario que el algoritmo itere hasta converger: ya que lo que se busca es resolver la ecuación diferencial original y no el sistema de Crank-Nicholson, sólo se busca llegar a una aproximación estable de segundo orden. El algoritmo iterativo consiste en partir del valor de $u(x, t)$ para acercarse al valor de $u(x, t + \Delta t/2)$ por medio de aproximaciones sucesivas, para luego usar esa información para calcular $u(x, t + \Delta t)$. Esquemáticamente:

$$\begin{aligned} u_m^{(1)} &= u_{mn} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{O} u_{mn}, \\ u_m^{(i)} &= u_{mn} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{O} u_{mn}^{(i-1)}, \quad (i = 2, 3, \dots, N) \\ u_{m \ n-1} &= u_{mn} + \Delta t \mathbf{O} u_m^{(N)}. \end{aligned}$$

Si $N = 0$, éste método se reduce al inestable de Euler; para $N = 1$ es el de Runge-Kutta de orden 2, que sigue siendo inestable, y finalmente, para $N = 2$ resulta el método estable de segundo orden que se ha vuelto estándar en relatividad numérica, y que es el usado en este trabajo.

5.1.4 Condiciones de frontera

Las secciones anteriores se enfocaron en explicar las consecuencias de utilizar la aproximación de discretizar el dominio de la solución de una ecuación diferencial parcial en los métodos de diferencias finitas. Sin embargo, al inicio de esta sección, se mencionó que no sólo era necesario discretizarlo, sino también hacerlo finito. Debido a que en los métodos que se han expuesto, la evolución de la solución en un punto depende del valor de los puntos vecinos en el nivel anterior, se debe adoptar una regla de evolución diferente en los puntos de la frontera del dominio computacional para evitar que hacer referencia a vecinos fuera del dominio, de los cuales no se tiene información.

La regla de evolución para los puntos en la frontera debe adaptarse de acuerdo al comportamiento que se desea que tenga la solución en esa región. Hay varias elecciones posibles, cada una con su utilidad en diferentes tipos de problemas.

Una elección común son las condiciones de frontera periódicas. En ellas se hace corresponder al primer punto más allá de un extremo del dominio con un punto en el extremo opuesto. Por ejemplo, si el dominio tiene M puntos para la coordenada x , el cálculo de $u_{M \ n+1}$, se realiza haciendo $u_{M+1 \ n} = u_{0 \ n}$. Esta situación puede corresponder al caso en que a un lado del dominio se supone la existencia de una copia de la solución del dominio computacional, o al caso de un dominio finito cuya topología conecta los puntos extremos (un sistema físico con tales características es, por ejemplo, una onda propagándose a lo largo de un aro).

Otra elección muy útil son las condiciones de frontera “de onda saliente”. Éstas están diseñadas para suprimir las componentes de la solución que se dirigen hacia adentro del dominio, simulando que las soluciones salen de éste y se pierden en el infinito. Para construir condiciones de frontera de este tipo, es necesario estudiar primero los modos normales de la ecuación diferencial, y así suprimir los que se dirijan hacia adentro [17].

Una misma condición de frontera puede ser útil en un caso e inútil en otro. En este trabajo no se utiliza ninguna de las arriba mencionadas, sino una muy simple que consiste en copiar el último punto del dominio. En el apartado 6.5 de la sección 6 se explicarán las razones de tal elección.

Además de especificar las condiciones de frontera, es necesario definir a partir de qué datos el sistema va a evolucionar, lo que se denomina *condición inicial*. Al igual que al resolver ecuaciones diferenciales ordinarias el orden de la ecuación determina el número de constantes de integración que se van a utilizar, el resolver un sistema en diferencias finitas, el orden determina el número de cantidades que se deben especificar en los datos iniciales. Por ejemplo, un sistema de segundo orden puede evolucionar a partir de los valores de una función y su derivada en el primer nivel de la malla, o de los valores de la función en dos niveles de ésta. En algunos casos, como es el de la relatividad general, las cantidades que deben especificarse como datos iniciales no son independientes una de otra, sino que satisfacen alguna ecuación de contricción.

5.1.5 Pruebas de convergencia

Para concluir esta sección sobre los métodos de diferencias finitas, se expondrá el tema de las pruebas de convergencia, cuya importancia se anticipó en el apartado 5.1.2. Al resolver ecuaciones diferenciales por métodos numéricos, es necesario tener siempre presente que lo que se obtiene no es la solución a la ecuación diferencial original, sino una aproximación a ella. Es muy importante no sólo obtener la solución, sino también analizar su comportamiento al variar la resolución. Lo que es de esperarse es que al aumentarla, se tenga una aproximación mejor. Si la solución converge como se espera, es posible hacer una estimación del error e incluso usar esta estimación para mejorar la aproximación.

Para analizar la convergencia es útil considerar que una solución numérica obtenida por el método de diferencias finitas puede representarse como una serie de potencias en el parámetro de discretización Δ :

$$u_{\Delta}(x, t) = u(x, t) + \Delta e_1(x, t) + \Delta^2 e_2(x, t) + \dots \quad (5.14)$$

A la ecuación 5.14 se le conoce como *expansión de Richardson*. En ésta, $u(x, t)$ representa la solución exacta y e_i funciones de error a orden i . Así, en una aproximación a segundo orden, $e_1 = 0$ pero $e_{i \geq 2} \neq 0$.

El error asociado a una aproximación con parámetro de discretización Δ se define $\epsilon_{\Delta}(x, t) = u(x, t) - u_{\Delta}(x, t)$. De acuerdo a la ecuación 5.14, si ϵ_{Δ_1} y ϵ_{Δ_2} son errores a distinta resolución y $\Delta_1 = r\Delta_2$, entonces

$$c(x, t) = \frac{\epsilon_{\Delta_1}}{\epsilon_{\Delta_2}} = r^n + O(\Delta). \quad (5.15)$$

Donde n es el orden de la aproximación. Cuando $\Delta \rightarrow 0$, $c(x, t) \rightarrow r^n$. A la cantidad c se le llama *factor de convergencia*. Dar seguimiento al error en cada

punto suele ser poco práctico, por lo que muchas veces se prefiere analizar alguna función escalar del error [17], tal como la norma L_1 ó L_2 , el valor máximo, o el valor en algún punto importante, como la frontera o el origen.

A las pruebas de convergencia que utilizan funciones escalares del error como las normas L_p se les llama pruebas de convergencia *globales*, mientras que a las que comparan los errores punto por punto se les llama *locales*. Las pruebas locales suelen ser cualitativas: se grafica la solución a diferentes resoluciones multiplicada por los factores de convergencia esperados y se verifica que las gráficas coincidan.

Si se realiza una prueba local usando la norma L_2 también debe cumplirse la relación:

$$c(t) = \frac{\|\epsilon_{\Delta_1}\|}{\|\epsilon_{\Delta_2}\|} \rightarrow r^n \quad \text{si } \Delta \rightarrow 0. \quad (5.16)$$

Si la ecuación 5.16 se cumple aproximadamente, entonces la aproximación numérica se encuentra en el régimen de convergencia. Los cálculos que no convergen con el orden deseado deben de rechazarse, mientras que los que están dentro del régimen de convergencia son aceptables [17].

En la mayoría de los casos no se conoce la solución exacta de la ecuación diferencial, por lo que para realizar las pruebas deben usarse tres resoluciones:

$$c(t) = \frac{\|u_{\Delta_1} - u_{\Delta_2}\|}{\|u_{\Delta_2} - u_{\Delta_3}\|} \quad (5.17)$$

Por último, para estimar el error del cálculo a la resolución más alta, también se parte de la expansión de Richardson. Restando la aproximación a diferentes resoluciones:

$$\begin{aligned} u_{\Delta_1} - u_{\Delta_2} &= e_n(\Delta_1^n - \Delta_2^n) + O(\Delta^{n-1}) \\ &= e_n\Delta_2^n(r^n - 1) + O(\Delta^{n-1}) \\ \Rightarrow \epsilon_{\Delta_2} &\approx \frac{1}{r^n - 1}(u_{\Delta_1} - u_{\Delta_2}) \end{aligned} \quad (5.18)$$

La aproximación del error es orden $n + 1$, o incluso $n + 2$ si se toman diferencias centradas. Este conocimiento aproximado del error puede utilizarse para mejorar la aproximación, usando lo que se conoce como *extrapolación de Richardson*, y que consiste en restarlo del cálculo a más alta resolución:

$$u \approx u_{\Delta_2} - \frac{1}{r^n - 1}(u_{\Delta_1} - u_{\Delta_2}) \quad (5.19)$$

Cabe mencionar que hay que tener cautela al utilizar la ec. 5.19, ya que, si los errores no son pequeños, puede empeorar en lugar de mejorar la aproximación.

Una vez que se han expuesto los métodos de esta sección, que son útiles para resolver diferenciales parciales, es necesario establecer el sistema de ecuaciones que se va a resolver. Éste es el objetivo de la siguiente sección, en la que se obtendrá una forma de las ecuaciones de Einstein apta para evolucionarse.

5.2 Formulación 3+1 de la Relatividad General

Aunque la manera más general de expresar las ecuaciones del campo gravitacional de Einstein es en forma covariante, a veces es conveniente utilizar una forma en que el espacio y el tiempo puedan distinguirse más claramente. Esto puede ser útil, por ejemplo, para encontrar la evolución en el tiempo del campo gravitacional a partir de condiciones iniciales (la solución un problema de Cauchy), o para estudiar la gravitación como una teoría de campo similar a la electrodinámica, y así construir una formulación Hamiltoniana que pueda servir para la cuantización de la gravedad.

A la formulación de las ecuaciones de Einstein que separa el espacio-tiempo en capas tridimensionales, correspondientes al espacio, y una dirección perpendicular a ellas, correspondiente al tiempo, se le conoce como formulación 3+1. Ésta no es la única formulación que permite encontrar la evolución de un sistema gravitacional a partir de condiciones iniciales, sin embargo, es intuitiva y es la más usada en relatividad numérica [18].

La mayor parte de la exposición de este capítulo está basada en los libros de texto de Alcubierre [18] y Baumgarte y Shapiro [19]. En el resto de este capítulo, los índices en letras griegas corren de 0 a 3 y aquellos en letras latinas de 1 a 3.

Para formular la relatividad general en 3+1, se parte de una métrica del espacio tiempo $g_{\mu\nu}$ y de una foliación o sincronización, es decir, una manera de dividir el espacio tiempo en un conjunto de hipersuperficies tipo espacio Σ_t . Cada una de estas hipersuperficies corresponde a un valor de una función t , llamada *función de tiempo universal*, es decir, es una hipersuperficies de nivel de esta función. Sin embargo, hay que puntualizar que t no necesariamente corresponde al tiempo propio de ningún observador.

Entre dos hipersuperficies Σ_t y Σ_{t+dt} , la geometría queda determinada por:

- La métrica espacial de la hipersuperficie, γ_{ij} , que sube y baja los índices de los tensores tridimensionales en Σ_t .
- La proporción α entre el lapso de tiempo propio $d\tau$ que separa ambas hipersuperficies, medido por los observadores que se mueven perpendicularmente a éstas (llamados *observadores Eulerianos*), y el cambio en la función de tiempo universal dt entre ellas. $\alpha(x^i, t)$ recibe el nombre de función lapso.
- La velocidad relativa entre los observadores Eulerianos y las líneas de coordenadas espaciales constantes $\beta^j(x^i, t)$

Las relaciones entre las cantidades que se acaban de presentar y las coordenadas, el tiempo propio y el elemento de línea, pueden resumirse en las siguientes ecuaciones:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (5.20)$$

$$d\tau = \alpha(x^i, t) dt \quad (5.21)$$

$$x^i_{t+dt} = x^i_t - \beta^i(x^j, t) dt \quad (5.22)$$

Se puede dar también una definición alternativa de γ_{ij} , α y β^i en términos de un vector ortonormal a la hipersuperficie, n^μ . Debido a que cada Σ_t se caracteriza por un valor constante de t , tal vector debe ser proporcional a $t^{;\mu}$:

$$n^\mu = -\alpha t^{;\mu} \quad (5.23)$$

por lo que α se puede definir:

$$\alpha = -(t^{;\mu} t_{;\mu})^{-1} \quad (5.24)$$

Así que en coordenadas convenientes para la foliación, $n^\mu = (-\alpha, 0, 0, 0)$. Por otra parte, de la ec. 5.22,

$$\beta^i = -\alpha(n^\mu x^i_{;\mu}) \quad (5.25)$$

De forma más general, las β^i pueden tomarse como las componentes de un vector β^μ con componentes $(0, \beta^1, \beta^2, \beta^3)$ en las mismas coordenadas convenientes.

La métrica espacial es ahora parte de la métrica inducida por la métrica global en la hipersuperficie:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \quad (5.26)$$

Además del vector n^μ se puede definir otro vector t^μ , paralelo a las líneas de coordenadas espaciales constantes:

$$t^\mu := \alpha n^\mu + \beta^\mu \quad (5.27)$$

que, en las mismas coordenadas, tiene componentes $(1, 0, 0, 0)$.

En general, $t^\mu \neq t^{;\mu}$, ya que el primero es perpendicular a las hipersuperficies, mientras que el segundo es paralelo a las líneas coordenadas espaciales. Ambos vectores serían iguales solamente si $\alpha = 1$ y $\beta^i = 0$.

Una vez definido este nuevo vector, resulta que α es su proyección normal a la hipersuperficie, y β^i son las componentes de su proyección paralela a ésta.

El nuevo vector puede escogerse de forma bastante libre, sin embargo debe de cumplir los siguientes requisitos para que la foliación sea útil:

- No debe ser completamente tangente a Σ_t , de otro modo las coordenadas espaciales no estarían bien definidas.
- Debe apuntar hacia el futuro.
- No importa si es de tipo tiempo, espacio, o nulo. Puede verse que si fuera de tipo espacio, las coordenadas se moverían más rápido que la luz de una hipersuperficie a la siguiente. Sin embargo, esto no es importante, porque las coordenadas pueden elegirse de cualquier manera sin que cambie la física. Los fenómenos no se van a propagar a velocidades mayores a la de la luz.

5.2.1 La El formalismo ADM

Hasta ahora se ha descrito la manera en que está parametrizada la métrica en la formulación 3+1. En esta sección se presentarán las ecuaciones de evolución en la formulación propuesta por Arnowitt-Deser-Misner (ADM). Si bien esta formulación es de cierto modo intuitiva, no es recomendable para realizar cálculos

numéricos, por lo que aquí se expone sólo con la finalidad de dar a conocer algunos conceptos que servirán más tarde para explicar la formulación BSSNOK, que es mucho más estable.

Para proseguir con la exposición, es necesario definir un nuevo tensor: la curvatura extrínseca, $K_{\mu\nu}$. La curvatura de las hipersuperficies definidas arriba tiene dos partes: una que viene de su geometría interna y una que viene de la manera en que están inmersa en el espacio cuadridimensional. La primera queda expresada en términos del tensor de Riemann tridimensional, que se calcula a partir de la métrica $\gamma_{\mu\nu}$, mientras que la segunda se cuantifica usando $K_{\mu\nu}$. De la misma forma que el tensor de Riemann, la curvatura extrínseca puede definirse a partir del cambio que sufre un vector en el transporte paralelo, en este caso el vector normal n^μ . Sin embargo, también es posible definirla de otro modo.

Sea P_β^α el operador de proyección

$$P_\beta^\alpha := \delta_\beta^\alpha + n^\alpha n_\beta \quad (5.28)$$

que por la ecuación 5.26 no es más que la métrica espacial inducida en la hipersuperficie. Entonces la curvatura extrínseca se define:

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &:= -P_\mu^\alpha n_{\nu;\alpha} \\ &= -(n_{\nu;\mu} + n_\mu n^\alpha n_{\nu;\alpha}) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Al comparar el segundo renglón de la ec. 5.29 con la definición de la derivada de Lie (ec. 3.12) y la definición de la métrica espacial (ec. 5.26), puede escribirse:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\vec{n}} \gamma_{\mu\nu} \quad (5.30)$$

Utilizando las propiedades de la derivada de Lie y la ec. 5.23, la ec. 5.30 se puede reescribir:

$$(\mathcal{L}_{\vec{t}} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}) \gamma_{\mu\nu} = -2\alpha K_{\mu\nu} \quad (5.31)$$

Por último, debido a la elección del sistema coordenado, $\mathcal{L}_{\vec{t}} = \partial_t$, por lo que

$$\partial_t \gamma_{ij} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} \quad (5.32)$$

ó

$$\boxed{\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i} \quad (5.33)$$

donde D_i son derivadas covariantes definidas con la métrica tridimensional.

Con esto se han obtenido las primeras ecuaciones de evolución del sistema. Para llegar a ellas, en ningún momento se recurrió a las ecuaciones de Einstein, por lo que se trata de ecuaciones puramente cinemáticas. En cambio, para obtener las ecuaciones de evolución de K_{ij} y así cerrar el sistema, sí se utilizarán, por lo que será en éstas últimas en las que estará contenida la dinámica.

5.2.2 Constricciones Hamiltoniana y de momentos

Para poder usar las ecuaciones de Einstein será necesario escribirlas en una versión 3+1, es decir, proyectarlas sobre la hipersuperficie y el vector \vec{n} normal a ella. En este apartado se obtendrán algunas proyecciones que no contienen derivadas en el tiempo, por lo que no son ecuaciones de evolución, sino constricciones cuya verificación paso a paso sirve para verificar que en todo momento la dinámica del sistema que se quiere evolucionar corresponde a la de las ecuaciones de Einstein.

Se puede empezar proyectando el tensor de Riemann 4-D sobre la hipersuperficie, utilizando los operadores P_ν^μ definidos antes. Después de varios cálculos, se obtiene:

$$P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma R_{\sigma\kappa\lambda\nu} = {}^{(3)}R_{\alpha\beta\mu\nu} + K_{\alpha\mu}K_{\beta\nu} - K_{\alpha\nu}K_{\beta\mu} \quad (5.34)$$

que se conoce como ecuación de Gauss-Codazzi.

Contrayendo una vez la ec. 5.34 con el vector normal, se obtiene:

$$P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda n^\nu R_{\sigma\kappa\lambda\nu} = D_\beta K_{\alpha\mu} - D_\alpha K_{\beta\mu} \quad (5.35)$$

que se conoce como la ecuación de Codazzi-Mainardi.

Ahora es momento de introducir las ecuaciones de Einstein 3.1. Al contraerlas dos veces con el vector normal, resulta:

$$n^\mu n^\nu G_{\mu\nu} = 8\pi n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = 8\pi\rho, \quad (5.36)$$

donde ρ representa la densidad de energía local percibida por los observadores Eulerianos. Por otra parte, contrayendo dos veces el tensor de Riemann en 4-D con el operador de proyección,

$$\begin{aligned} P^{\alpha\mu} P^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= (g^{\alpha\mu} + n^\alpha n^\mu)(g^{\beta\nu} + n^\beta n^\nu) R_{\alpha\beta\mu\nu} \\ &= R + 2n^\mu n^\nu R_{\mu\nu} = 2n^\mu n^\nu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) \\ &= 2n^\mu n^\nu G_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Pero de acuerdo a la ecuación de Gauss-Codazzi (5.34, contraída dos veces),

$$P^{\alpha\mu} P^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} \quad (5.38)$$

donde K es la traza de la curvatura extrínseca. A través de la ec. 5.37, se puede igualar el lado derecho de 5.38 con el de 5.40 para obtener:

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} = 16\pi\rho. \quad (5.39)$$

A la ec. 5.39 se le conoce como *constricción Hamiltoniana*. Como se mencionó al inicio, puede verse que no contiene derivadas temporales por lo que no es una ecuación de evolución.

A continuación se obtendrá otra relación importante proyectando las ecuaciones de Einstein de otra forma. Al contraerlas con el operador de proyección y el vector normal resulta:

$$P^{\alpha\mu} n^\nu G_{\mu\nu} = 8\pi P^{\alpha\mu} n^\nu T_{\mu\nu} = -8\pi j^\alpha, \quad (5.40)$$

donde j^α son las componentes de la densidad de momento percibida por los observadores Eulerianos. El resultado de contraer el tensor de Einstein también es:

$$P^{\alpha\mu}n^\nu G_{\mu\nu} = P^{\alpha\nu}n^\nu R_{\mu\nu}. \quad (5.41)$$

Sustituyendo la definición de P_β^α y la ecuación de Codazzi-Mainardi (ec. 5.35), la ec. 5.41 queda

$$\gamma^{\alpha\mu}n^\nu G_{\mu\nu} = D^\alpha K - D_\mu K^{\alpha\mu} = D_\mu(\gamma^{\alpha\mu}K - K^{\alpha\mu}). \quad (5.42)$$

Ahora es posible igualar el extremo derecho de 5.42 con el de 5.40 para obtener:

$$D_\mu(\gamma^{\alpha\mu}K - K^{\alpha\mu}) = -8\pi j^\alpha, \quad (5.43)$$

relaciones a la que se denomina *constricciones de momentos*. En una foliación adaptada como el tipo que se discutió en el apartado anterior, algunas componentes de las ecs. 5.39 y 5.43 se hacen triviales, por lo que la forma final de dichas ecuaciones en tal foliación puede escribirse en términos únicamente de los índices espaciales:

$$\boxed{{}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho} \quad (5.44)$$

$$\boxed{D_j(\gamma^{ij}K - K^{ij}) = -8\pi j^i} \quad (5.45)$$

La existencia de estas dos constricciones implica que las doce variables dinámicas $\gamma_{\mu\nu}$ y $K_{\mu\nu}$ no pueden elegirse de manera arbitraria en la condición inicial. Una condición inicial válida debe ser una solución a las ecuaciones 5.44 y 5.45, ya que de otro modo lo que se hiciera evolucionar no sería una solución a las ecuaciones de Einstein. Además de servir para encontrar una condición inicial válida, estas constricciones pueden usarse para monitorear la evolución de una simulación numérica. El que se sigan cumpliendo aproximadamente significa que la evolución encontrada es cercana a una solución de las ecuaciones de Einstein.

5.2.3 Evolución en el formalismo ADM

Hasta ahora se han escrito en versión 3+1 cuatro de las diez ecuaciones de Einstein (una es la constricción Hamiltoniana y las otras tres las constricciones de momentos). Las seis ecuaciones restantes son las ecuaciones de evolución.

Se puede empezar contrayendo dos veces las ecuaciones de Einstein con el operador de proyección:

$$\begin{aligned} P_\mu^\alpha P_\nu^\beta G_{\alpha\beta} &= 8\pi P_\mu^\alpha P_\nu^\beta T_{\alpha\beta} & P_\mu^\alpha P_\nu^\beta T_{\alpha\beta} &:= S_{\mu\nu} \\ P_\mu^\alpha P_\nu^\beta [R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R] &= 8\pi S_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Utilizando la constricción Hamiltoniana para eliminar el escalar de Ricci, resulta:

$$P_\mu^\alpha P_\nu^\beta R_{\alpha\beta} = -4\pi\gamma_{\mu\nu}(S - \rho) + 8\pi S_{\mu\nu}, \quad (5.47)$$

donde $S_{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzos para los observadores Eulerianos.

Por otro lado, proyectando el tensor de Riemann en la hipersuperficie y contrayendo con el vector \vec{n} , resulta:

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa n^\lambda n^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma} = \mathcal{L}_{\vec{n}} K_{\mu\nu} + K_{\mu\lambda} K_\sigma^\lambda + \frac{1}{\alpha} D_\mu D_\nu \alpha \quad (5.48)$$

y de las ecuaciones de Gauss-Codazzi (ec. 5.34),

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa (n^\lambda n^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma} + R_{\delta\kappa}) = {}^{(3)} R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda. \quad (5.49)$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores,

$$\mathcal{L}_{\vec{t}} K_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{\mu\nu} = -D_\mu D_\nu \alpha + \alpha (-P_\mu^\delta P_\nu^\kappa R_{\delta\kappa} + {}^{(3)} R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - 2K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda). \quad (5.50)$$

Los últimos pasos son elegir un sistema de coordenadas acorde con la foliación, como se ha venido haciendo antes, y sustituir la ec. 5.47 en la 5.50. La elección de tal sistema de coordenadas convierte a la derivada de Lie en una derivada parcial respecto de la coordenada t y permite considerar sólo las componentes espaciales. La expresión que se obtiene es:

$$\partial_t K_{ij} = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{ij} - D_i D_j \alpha + \alpha \{ {}^{(3)} R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ij} K_j^k + 4\pi[\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}] \}. \quad (5.51)$$

Estas seis ecuaciones para las seis componentes independientes de K_{ij} permiten finalmente cerrar el sistema de ecuaciones ADM, que en total consiste en una ecuación cinemática de evolución para la métrica (ec. 5.33) más las diez ecuaciones de Einstein: cuatro constricciones (ec.5.44 y ecs. 5.45) y seis ecuaciones de evolución para la curvatura extrínseca (ecs. 5.51). El hecho de que no se hayan encontrado ecuaciones de evolución para α y β_i es debido a que estas variables representan nuestra libertad para elegir el sistema de coordenadas, y pueden especificarse y evolucionar de una manera que nos convenga, como se verá en el apartado 5.2.4.

5.2.4 El formalismo BSSNOK

La formulación ADM en muchos casos no tiene las propiedades de estabilidad necesarias para la evolución numérica.

Una formulación más estable es la conocida como BSSN. Este apartado está destinado a describir dicha formulación, a la cual, sin embargo, se le llamará BSSNOK siguiendo a la referencia [18], para dar crédito a sus creadores originales.

La idea detrás de esta formulación es muy similar a la de la formulación ADM, sin embargo se hacen varias modificaciones.

La primera modificación consiste en reescalar la métrica espacial, de modo que la métrica reescalada $\tilde{\gamma}_{ij}$ tenga determinante $\tilde{\gamma} = 1$.

$$\tilde{\gamma}_{ij} := \psi^{-4} \gamma_{ij}. \quad (5.52)$$

Donde Ψ se conoce como *factor conforme*. Para que la métrica reescalada tenga determinante 1, el factor conforme debe estar relacionado con el determinante de la métrica original por:

$$\psi = \gamma^{1/12} \quad (5.53)$$

A partir de las ecuaciones para la evolución de las componentes de la métrica en ADM (ecs. 5.33) se puede encontrar una ecuación para la evolución de su determinante.

$$\partial_t \gamma = -2\gamma(\alpha K - \partial_i \beta^i) + \beta^i \beta_i \gamma \quad (5.54)$$

y usando la ec. 5.53, se puede obtener una ecuación para la evolución del factor conforme:

$$\partial_t \psi = -\frac{1}{6} \psi (\alpha K - \partial_i \beta^i) + \beta^i \beta_i \psi \quad (5.55)$$

Muy comunmente, en lugar de trabajar con la derivada de ψ , se utiliza la cantidad $\phi = \ln \psi$. Para obtener la ecuación de evolución de ϕ simplemente se sustituye su definición en la ec. 5.55.

Otra modificación consiste en separar el tensor de curvatura extrínseca K_{ij} en su traza K y una parte sin traza A_{ij} ,

$$A_{ij} := K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \quad (5.56)$$

El tensor de curvatura libre de traza no se utiliza tal como está, sino que también se reescala:

$$\tilde{A}_{ij} := \psi^{-4} A_{ij} \quad (5.57)$$

La ec. 5.57 es la usada en la versión “estándar” del método BSSNOK.

Una característica muy importante de la formulación BSSNOK es la definición de las cantidades $\tilde{\Gamma}^i$, conocidas como *funciones de conexión conformes*. Estas funciones se definen a partir de los símbolos de Christoffel de la métrica reescalada de la siguiente manera:

$$\tilde{\Gamma}^i := \tilde{\gamma}^{jk} \tilde{\Gamma}_{jk}^i = -\partial_j \tilde{\gamma}^{ij}, \quad (5.58)$$

donde la última expresión se obtiene de la definición de los símbolos de Christoffel, considerando que $\tilde{\gamma} = 1$.

En resumen, la formulación BSSNOK, introduce más variables, de modo que en total en lugar de 12 se tienen 17: $\phi, K, \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{A}_{ij}, \tilde{\Gamma}^i$ (obsérvese que $\tilde{\gamma}_{ij}$ y \tilde{A}_{ij} son simétricas). En realidad, las variables independientes son 15, ya que la traza de $\tilde{\gamma}_{ij}$ y \tilde{A}_{ij} está fija.

Sustituyendo la definición de las variables BSSNOK (ecs. 5.53 5.52, 5.57, 5.58) en las ecuaciones de evolución ADM (ecs. 5.51 y 5.33), se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \phi = -\frac{1}{6} \alpha K \quad (5.59)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} \quad (5.60)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi} \{-D_i D_j \alpha + \alpha R_{ij} + 4\pi \alpha [\gamma_{ij} (S - \rho) - 2S_{ij}]\}^{TF} + \alpha (K \tilde{A}_{ij} - \tilde{A}_{ij} \tilde{A}_j^k) \quad (5.61)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}K = -D_i D^i \alpha + \alpha(\tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3}K^2) + 4\pi\alpha(\rho + S)} \quad (5.62)$$

En las ecuaciones anteriores, la notación R_{ij} siempre se refiere al tensor de Ricci en 3D, y se usó la notación $d/dt := \partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}$. Las derivadas covariantes respecto a la métrica en 3D, D_i , pueden expresarse en términos de cantidades BSSNOK usando la relación entre los símbolos de Christoffel de la métrica reescalada con los de la original:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - 2(\delta_i^k \partial_j \phi + \delta_j^k \partial_i \phi - \gamma_{ij} \gamma^{kl} \partial_l \phi) \quad (5.63)$$

que a su vez implica que

$$\tilde{\Gamma}^i = e^{4\phi} \Gamma^i + 2\tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \phi. \quad (5.64)$$

El tensor de Ricci también puede reescribirse en términos de las variables BSSNOK, al descomponerlo en el tensor de Ricci de la métrica conforme, más términos que dependen de ϕ . Éstos términos son:

$$-2\tilde{D}_i \tilde{D}_j \phi - 2\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}^k \tilde{D}_k \phi + 4\tilde{D}_i \phi \tilde{D}_j \phi - 4\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}^k \phi \tilde{D}_k \phi. \quad (5.65)$$

Finalmente, considerando las funciones de conexión conforme como variables independientes a evolucionar, y sustituyendo la constricción de momentos en la ecuación de evolución, se obtiene el mucho más estable sistema BSSNOK.

Aunque pareciera a primera vista algo irrelevante, sustituir la constricción de momentos cambia el comportamiento de las ecuaciones ante desviaciones de la solución exacta, que son inevitables numéricamente, y es una de las principales causas de su gran estabilidad.

Tipos de foliación

Al final del apartado 5.2.3, se hizo la observación de que las ecuaciones de Einstein no especifican la manera en que evolucionan las cantidades α y β^i . En efecto, tanto el valor de estas cantidades como sus ecuaciones de evolución pueden definirse con libertad de alguna manera que sea convenientes para el problema a estudiar. A esta libertad para elegir estas cantidades se le conoce como *libertad de norma*, y a una elección particular de ellas se le llama una *norma particular*.

Al elegir una norma pueden tomarse en cuenta uno o varios criterios, por ejemplo: que refleje alguna simetría del sistema, simplificando las ecuaciones; que evite la formación de singularidades en el sistema coordenado, o que sea fácilmente tratable matemáticamente, o fácil de tratar numéricamente. No siempre todos estos criterios quedarán satisfechos simultáneamente, y no siempre se buscará satisfacerlos todos. Cada norma está adaptada al problema particular que se trate.

En este trabajo se eligió siempre $\beta^i = 0$, por razones que se explicarán más adelante, por lo que este apartado estará dedicado a estudiar algunas formas de elegir la función lapso, α .

En los esquemas más comunes, la elección del lapso cae dentro de una de las siguientes cuatro categorías:

Lapso predefinido: α es una función previamente establecida.

Lapso algebraico: α se calcula como una función algebraica de las cantidades geométricas en cada hipersuperficie Σ_t .

Lapso de tipo evolución: $\partial_t \alpha$ se calcula como una función algebraica de las cantidades geométricas en Σ_t .

Lapso elíptico: α se obtiene a cada paso integrando una ecuación diferencial elíptica en donde aparecen cantidades relacionadas con la geometría de Σ_t .

La elección de lapso más intuitiva es tal vez $\alpha = 1$, que se conoce como lapso *estático*, o norma *geodésica*. Éste pertenece a la clasificación de lapsos predefinidos, y su atractivo reside en que la coordenada t corresponde al tiempo propio de observadores Eulerianos en caída libre. Sin embargo, esta elección suele ser muy mala, ya que con cualquier inhomogeneidad presente en los datos iniciales, los observadores tenderán a acercarse y chocar uno con otro, creando una singularidad en el sistema coordenado (al romperse la correspondencia uno a uno entre puntos y conjuntos de coordenadas) y haciendo fallar el código. Incluso es posible saber en qué tiempo fallará, y este conocimiento se utiliza para probar que un código se comporte como esperado.

Otra elección común es el lapso armónico. Las coordenadas armónicas se originaron a partir del estudio de que las ecuaciones de Einstein estuvieran bien planteadas, y se obtienen pidiendo que sean soluciones a la ecuación de onda:

$$\square x^\mu = g^{\mu\nu} x_{\mu\nu}^\alpha = 0 \quad (5.66)$$

Desarrollando y escribiendo en términos de variables 3+1,

$$\partial_t \alpha = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \alpha - \alpha^2 K \quad (5.67)$$

Haciendo $\beta^\mu = 0$, la ec. 5.67 puede integrarse para dar:

$$\alpha = h(x^i) \sqrt{\gamma} \quad (5.68)$$

donde h es una función positiva de las coordenadas espaciales pero no del tiempo. Resulta que, aún cuando el lapso armónico suele ser preferible al estático, no tiene tan buenas propiedades como otros para evitar singularidades. Una búsqueda empírica de lapsos fáciles de escribir que mejoraran tales propiedades dio como resultado el lapso conocido como *1 + log*, en el que $\alpha = 1 + \log \gamma$.

Tanto el lapso armónico como el 1+log forman parte de una familia más general, conocida como *familia de Bona-Masso*, en la que la evolución toma la forma:

$$\frac{d}{dt} \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) K \quad (5.69)$$

Puede verse que para el caso con $f = 1$ se recupera el lapso armónico, y para $f = N/\alpha$, con $N = 2$, se recupera el 1+log.

Capítulo 6

Metodología

6.1 Descripción del sistema

El sistema que se estudia en este trabajo consiste en dos campos escalares reales acoplados Φ_1 y Φ_2 , con rompimiento espontáneo de la simetría Z_2 , que evolucionan según las ecuaciones de Einstein y Klein-Gordon. En unidades geometrizadas ($c = G = 1$), el potencial para los campos se escribe:

$$V(\Phi_1, \Phi_2) = \frac{1}{4} \frac{\lambda}{\hbar^2} \Phi_1^4 - \frac{1}{2} \frac{m^2}{\hbar^2} \Phi_1^2 + \frac{1}{4} \frac{m^4}{\hbar^2 \lambda} + \frac{1}{8} \frac{\lambda'}{\hbar^2} \Phi_1^2 \Phi_2^2 \quad (6.1)$$

Definiendo las constantes $V_0 = m^4/4\hbar^2\lambda$, $\alpha = \lambda/m^2$ y $\kappa = \lambda'/4m^2$, el potencial se puede reescribir:

$$V(\Phi_1, \Phi_2) = V_0[1 + 2\alpha(\kappa\Phi_2^2 - 1)\Phi_1^2 + \alpha^2\Phi_1^4] \quad (6.2)$$

Para $\Phi_2 > \Phi_c$, este sistema posee una línea de estados de falso vacío en $\Phi_1 = 0$, mientras que para $\Phi_2 < \Phi_c$, un par de estados de vacío auténtico aparece en $\Phi_2 = 0$. La línea $\Phi = 0$ pasa de ser un mínimo a ser un máximo en $\Phi_2 = \Phi_c = 1/\sqrt{\kappa}$. Por tanto, el campo Φ_2 juega el papel de un parámetro de orden. El valor crítico es Φ_c , y al pasar por él se da la transición de fase.

Al igual que se hizo en la sección 2.4, se puede realizar un cambio de variables para expresar el Lagrangiano en términos de diferencias de los campos respecto a un mínimo. Si se desarrolla al rededor de un mínimo $(0, v)$ sobre la línea $\Phi_1 = 0$, para $\Phi_2 > \Phi_c$, y se definen las variable $\sigma := \Phi_1 - u$ y $\eta := \Phi_2 - v$, la densidad Lagrangiana toma la forma:

$$\mathcal{L} = \partial^\alpha \sigma \partial_\alpha \sigma - \frac{1}{2} [4\alpha(\kappa v - 1)] \sigma^2 + \partial^\alpha \eta \partial_\alpha \eta + \text{términos de interacción.} \quad (6.3)$$

Si, por otra parte, se realiza el mismo desarrollo al rededor de uno de los dos mínimos absolutos (u_0, v_0) , es decir, de los estados de vacío reales; entonces al definir $\sigma := \Phi_1 - u_0$ y $\eta := \Phi_2 - v_0$, la densidad Lagrangiana queda expresada:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial^\alpha \sigma \partial_\alpha \sigma - \frac{1}{2}(16\alpha V_0)\sigma^2 \\ & + \partial^\alpha \eta \partial_\alpha \eta - \frac{1}{2}(4\kappa V_0)\eta^2 \\ & + \text{términos de interacción.} \end{aligned} \quad (6.4)$$

De 6.3 y 6.4, puede verse que con la transición de fase, el sistema pasa de consistir de un campo escalar masivo y uno no masivo a consistir de dos campos escalares masivos. En la ec. 6.4 no aparecen las variables u y v debido a que fueron expresadas en términos de las variables del potencial, lo cual puede hacerse derivando la ec. 6.2. Otra cosa que puede observarse es que, de acuerdo a la ec. 6.3, la masa de σ se hace cero justo en la transición de fase.

A continuación se enlistan algunas cantidades importantes del sistema expresadas en términos de α y κ . M_p es la masa de Plank.

V_0		Densidad de energía del falso vacío	
Φ_c	$= 1/\sqrt{\kappa}$	Valor crítico de Φ_2	
u_0	$= \pm 1/\sqrt{\alpha}$	Valor de Φ_1 en los mínimos absolutos	
v_0	$= 0$	Valor de Φ_2 en los mínimos absolutos	(6.5)
m_1	$= 4M_p^2\sqrt{\alpha V_0}$	Masa del campo σ en el vacío real	
m_2	$= 2M_p^2\sqrt{\kappa V_0}$	Masa del campo η en el vacío real	

Los resultados que se presentan en este trabajo parten de una condición inicial que consiste en campos espacialmente homogéneos, más una perturbación con perfil Gaussiano, simétrica en el tiempo y centrada en el origen agregada al campo Φ_1 .

La condición inicial para los campos es entonces:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= c_1 + 2ae^{-r^2/s^2} \\ \Phi_2 &= c_2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Los resultados que se mostrarán aquí corresponden a dos casos para los que los campos homogéneos iniciales y las constantes del potencial tenían los mismos valores: $\Phi_1 = 0.001$ y $Phi_2 = 0.014$, $V_0 = 6.25 \times 10^{-7}$ y $\alpha = \kappa = 2.0 \times 10^4$. De acuerdo a las relaciones 6.5, el valor crítico de Φ_2 es $\Phi_c \approx 0.007$. La diferencia los dos casos que se presentarán radica en el tamaño de la perturbación Gaussiana relativo al campo de fondo.

Caso 1: $a = 0.5c_1$, $s = 5.0$, es decir la amplitud de la perturbación es del mismo orden de magnitud que la del campo homogéneo.

Caso 1: $a = 10c_1$, $s = 10.0$, por lo que la amplitud de la perturbación significativamente mayor (20 veces) que la del campo homogéneo.

El caso en que la perturbación fuera significativamente menor que la amplitud del campo homogéneo no se estudió por razones que se darán en la sección 6.7. Además de éstos dos casos con la perturbación, se ensayaron varios más únicamente con campos homogéneos, éstos últimos con varias condiciones iniciales diferentes, buscando prolongar la duración del estado antes de la transición de fase.

6.2 Unidades

Para las simulaciones se utilizaron unidades geometrizadas, es decir $c = G = 1$. Esto deja libre la elección de la unidad de longitud, o la unidad de masa-energía. Puede elegirse esta unidad de manera que simplifique la forma del potencial 6.2. Por ejemplo, si la densidad de energía se mide en unidades de $u^{-2} = V_0$, entonces en esas unidades $V_0 = 1u^{-2}$, $m_1 = 4M_p^2\sqrt{\alpha}u$ (igualdad numérica) y $m_2 = 2M_p^2\sqrt{\kappa}u$ (igualdad numérica).

Por ensayo y error, se observó que para valores de V_0 pequeños mejoraba la estabilidad de la simulación. Se utilizó un valor de $V_0 = 6.25 \times 10^{-7}$, por lo que la unidad de densidad de energía es $u^{-2} = 1.6 \times 10^6 V_0$, y la de masa-energía-longitud es $u = 2.5 \times 10^{-4} \sqrt{10/V_0}$.

Una vez fijado el valor de V_0 , la masa de los campos puede ser calculada mediante las relaciones antes mostradas. Los campos se consideran adimensionales, y las constantes λ y λ' en la ecuación 6.1 tienen unidades de energía al cuadrado.

6.3 El código OllinSphere2

Para encontrar la evolución del sistema, se hizo uso del código OllinSphere2, un programa escrito en FORTRAN y desarrollado en el Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM [20], que resuelve las ecuaciones de Einstein en simetría esférica para distintos tipos de materia, usando la formulación BSSNOK. Para evolucionar los datos, este código emplea un método de líneas como los descritos en la sección 5.1.3 y para integrar se puede elegir entre el método ICN de orden n o el método RK4. En este trabajo se utilizó el método ICN de segundo orden.

En la formulación BSSNOK en coordenadas esféricas, el elemento de línea queda parametrizado:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_r \beta^r) dt^2 + 2\beta_r dt dr + \psi^4 (A dr^2 + r^2 B d\Omega^2) \quad (6.7)$$

donde $\beta_r = A\beta^r$.

La figura 6.1 es un diagrama de bloques en el que se puede ver a grandes rasgos el funcionamiento del programa. En realidad, el programa posee muchas más funciones que las que se muestran en dicho diagrama (varios tipos de materia, varias normas, opción para calcular en paralelo, entre otros), pero sólo se muestra lo que es esencial para explicar cómo se realiza la evolución de un sistema como el que se estudió aquí.

El código posee la característica de que es posible ajustar el tamaño de paso durante la evolución para evitar violar la condición CFL, lo cual es especialmente útil al trabajar con lapsos armónicos o $1+\log$.

Es importante mencionar que el código no se utilizó tal y como está. Como el sistema bajo estudio consta de dos campos escalares, mientras que el código original sólo estaba hecho para manejar uno, se agregaron algunas nuevas variables y se modificaron las rutinas necesarias. La condición inicial descrita en la sección 6.6 tampoco estaba implementada originalmente. Cabe mencionar que, aunque el autor de este trabajo fue quien realizó las modificaciones necesarias en el código para implementarla, la idea está originalmente en un artículo de J. M. Torres et al., aún sin publicar [21].

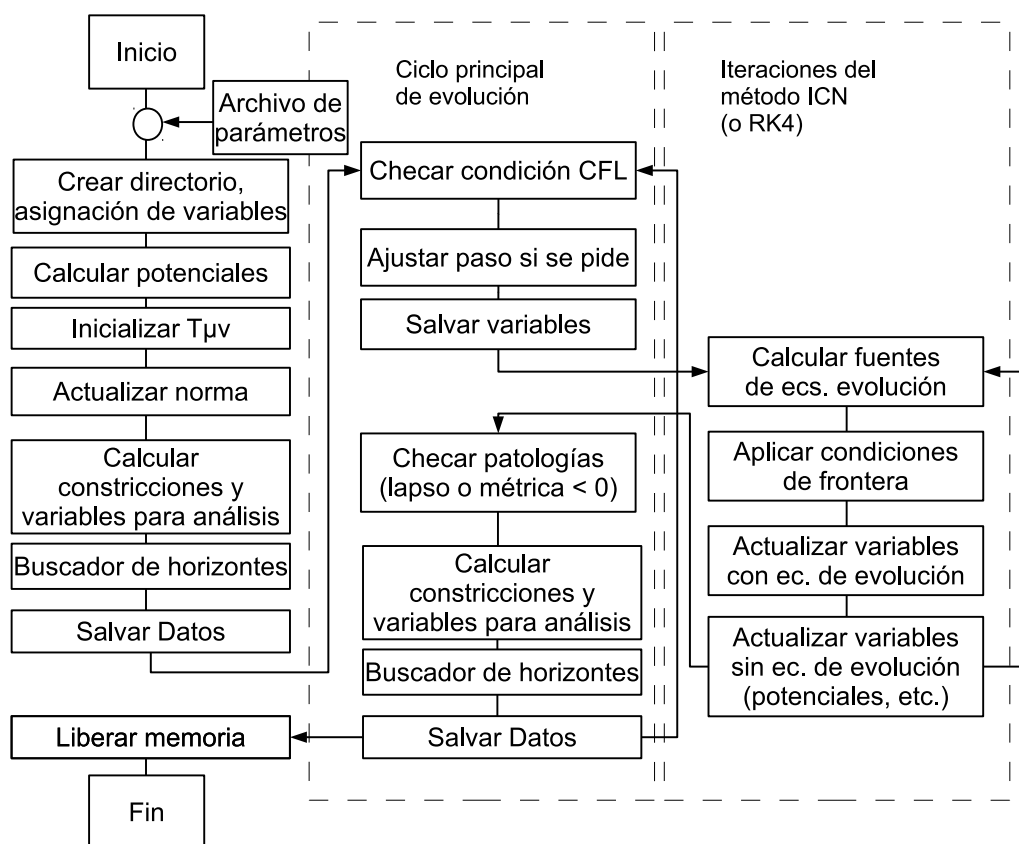


Fig. 6.1: Diagrama de bloques del código OllinSphere2

6.4 Elección de la foliación

Se utilizó la foliación armónica ($d\alpha/dt = -f\alpha^2 K$, $\beta^r = 0$) con $f = 1/3$, y K la traza de la curvatura extrínseca.

Esta foliación es adecuada para el estudio de campos inhomogéneos, ya que α cambia con el elemento de volumen de manera que las singularidades pueden evitarse. En estas coordenadas, $\alpha = a(t)$ asintóticamente y el tiempo de la simulación corresponde al tiempo conforme η , que se relaciona con el tiempo propio cosmológico por $d\eta = dt/a$.

6.5 Condiciones de frontera

La condición de frontera se escogió simplemente de modo que el valor de todas las cantidades en el primer punto fuera del dominio, $Nr + 1$, fuera el mismo que en el último punto del dominio, Nr . La razón para elegir esta condición de frontera fue simular la continuación del campo homogéneo fuera del dominio. Sin embargo, debido a que puede reflejar las perturbaciones que provengan del interior, las simulaciones se llevaron a cabo por un tiempo menor al que tardaría

la luz en llegar desde el centro del dominio a las fronteras.

6.6 Condiciones iniciales

Para que la evolución sea una solución a las ecuaciones de Einstein, las condiciones iniciales deben satisfacer las constricciones Hamiltoniana y de momentos. Debido a que se partió de una condición inicial simétrica respecto al tiempo, sólo fue necesario resolver la restricción Hamiltoniana.

Ésta, usando la parametrización dada por la ec. 6.7 y para dos campos escalares ($\rho = \frac{1}{2}(\partial_r \Phi_1 \partial^r \Phi_1 + \partial_r \Phi_2 \partial^r \Phi_2 + V(\Phi_1, \Phi_2))$) toma la forma:

$$\frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + \pi\psi((\partial_r \Phi_1)^2 + (\partial_r \Phi_2)^2) = -2\pi(V(\Phi_1, \Phi_2) - \frac{K^2}{24\pi})\psi^5 \quad (6.8)$$

Esta ecuación diferencial no lineal puede resolverse usando el método iterativo ya presente en `OllinSphere2` siempre que la función fuente del lado derecho se reduzca a cero en el infinito. Esto queda asegurado al elegir un valor apropiado para K , lo cual es posible porque las constricciones de momento sólo requieren que K sea constante.

La densidad de energía puede separarse en una parte debida a los campos homogéneos, ρ_0 y una parte debida a la perturbación, $\delta\rho$. Debido a que ρ_0 es la densidad de energía de un campo homogéneo que se eligió simétrico respecto al tiempo, es puramente energía potencial.

Por lo tanto, eligiendo $K = -\sqrt{24\pi\rho_0}$ el término de fuente se vuelve simplemente $\delta\rho$, que es asintóticamente cero.

6.7 Pruebas de convergencia

Para analizar la convergencia se consideró primero un caso donde estaban presentes únicamente los campos homogéneos, y posteriormente los casos en que se agregó la perturbación mencionados en 6.1. La convergencia se estudió analizando la diferencia entre el valor calculado de las constricciones hamiltoniana y de momentos respecto al valor de la solución exacta, que es cero en ambos casos.

6.7.1 Condición inicial

En la figura 6.2 se grafica la restricción hamiltoniana calculada para la condición inicial únicamente con campos homogéneos ($\Phi_1(t=0) = 0.001$, $\Phi_2(t=0) = 0.014$, $V_0 = 6.25 \times 10^{-7}$, $\alpha = \kappa = 2 \times 10^4$). Puede verse que, contrariamente a lo esperado, el valor absoluto de los errores en algunos puntos aumenta al aumentar la resolución.

Al agregar un pulso Gaussiano al campo Φ_1 , la gráfica de la restricción Hamiltoniana (fig. 6.3) presenta errores debidos a la parte inhomogénea que parecen converger al aumentar la resolución, y errores debidos a la parte homogénea, que se comportan de la misma forma que en la fig. 6.2. Las resoluciones más altas están por tanto más afectadas por los errores de la parte homogénea, y usarlas puede alejarnos del régimen de convergencia.

En la gráfica 6.4, que se refiere al caso 1, puede verse que cuando los errores en la restricción Hamiltoniana se multiplican por los factores que corresponden

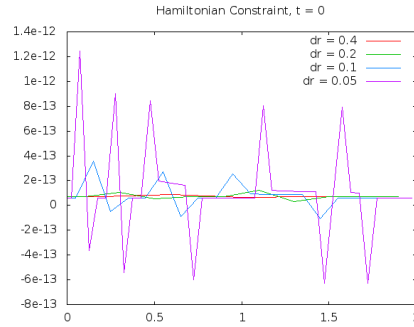


Fig. 6.2: Constricción hamiltoniana en la condición inicial, para campos homogéneos a distinta resolución.

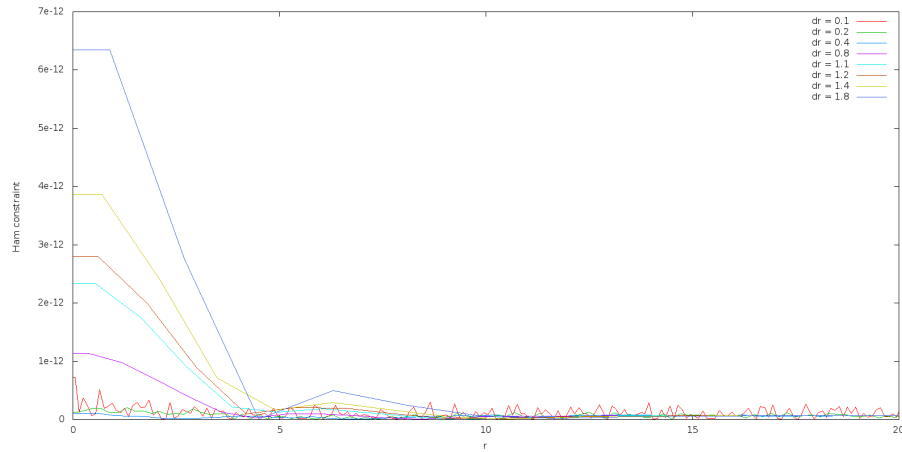


Fig. 6.3: Constricción hamiltoniana en la condición inicial, con un pulso Gaussiano agregado al campo Φ_1 , a distintas resoluciones.

a la convergencia a segundo orden, sus gráficas para las cinco resoluciones más bajas se traslapan, por lo que se puede afirmar que para un espaciado de la malla mayor a 0.8 unidades, nos encontramos dentro del régimen de convergencia.

Para poder verificar esto de una forma más cuantitativa, se realizaron pruebas de convergencia globales como las descritas en el apartado 5.1.5, calculando la norma L_2 de los errores a varias resoluciones, usando puntos del dominio y los pasos de tiempo donde todos estuvieran definidos.

Para la condición inicial del caso 1, se obtuvo la gráfica que se muestra en la fig. 6.5, donde se relaciona el logaritmo natural del error en la constricción Hamiltoniana contra el del incremento Δr . La constricción de momentos no es necesario considerarla por el momento, porque como se parte de una condición inicial simétrica en el tiempo, está inicializada en cero. La recta graficada es un ajuste por mínimos cuadrados que se hizo rechazando las tres resoluciones más altas (los tres puntos a la izquierda). El exponente n que aparece en el factor de convergencia r^n y que corresponde a la pendiente de la recta, se estimó como $n = 2.026$, que es cercano al valor teórico de 2 para un método de segundo

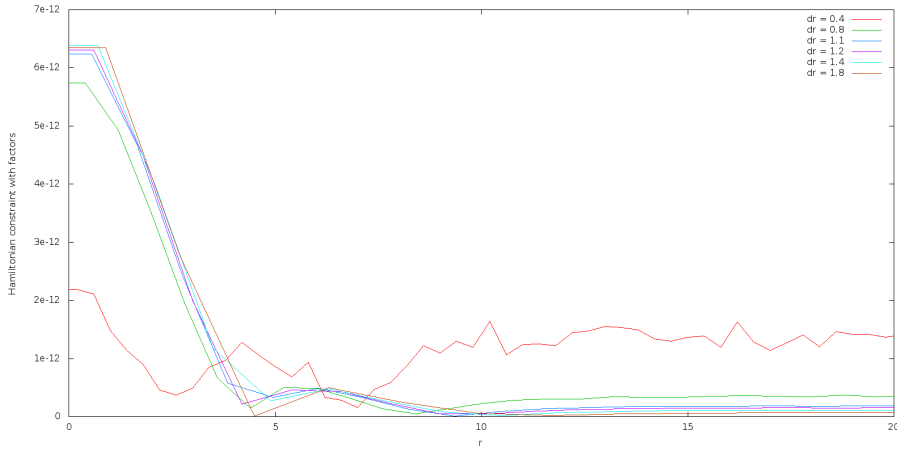


Fig. 6.4: Constricción hamiltoniana en la condición inicial, con un pulso Gaussiano agregado al campo Φ_1 , a distintas resoluciones, multiplicados por factores característicos de la convergencia a segundo orden. Se omitieron las dos resoluciones más altas de la fig. 6.3.

orden.

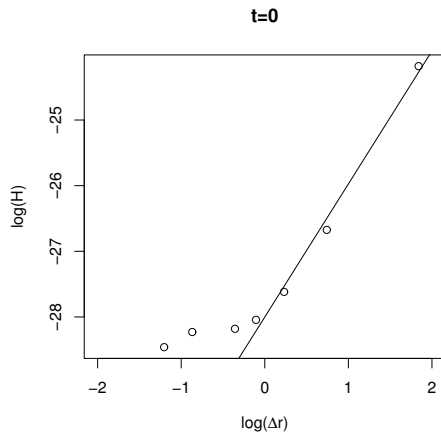


Fig. 6.5: Prueba de convergencia global para condición inicial del caso 1 usando la norma L2, exponente estimado: $n = 2.026$.

Las resoluciones mostradas en la fig. 6.4 son distintas a las mostradas en 6.5, ya que las primeras se escogieron para que los factores de convergencia fueran números enteros, mientras que las segundas fueron elegidas para que las mallas coincidieran en varios puntos. Sin embargo ambas gráficas se refieren al mismo sistema físico.

De acuerdo a la fig. 6.5, se puede afirmar que las simulaciones con $\Delta r \geq 0.9$ se encuentran en el régimen de convergencia.

La condición inicial para el caso 2 presenta mejores propiedades de conver-

gencia, como se puede ver en la fig. 6.6. En ésta, no se eliminó ningún punto del ajuste por mínimos cuadrados y el exponente estimado fue $n = 2.012$.

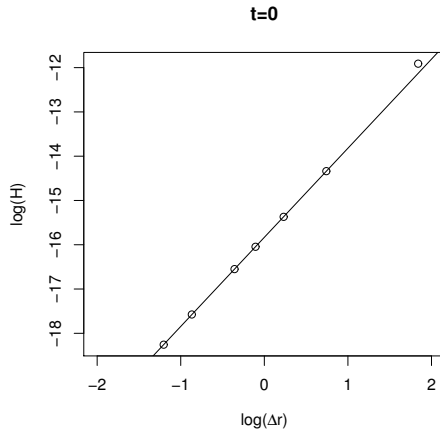


Fig. 6.6: Prueba de convergencia global para condición inicial del caso 2 usando la norma L2, exponente estimado: $n = 2.012$.

6.7.2 Evolución

Gráficas similares a la fig. 6.5 se obtuvieron para otros pasos de tiempo para ambas constricciones en ambos casos. Los valores estimados de n fueron generalmente cercanos a 2, aunque en algunos tiempos la convergencia parecía ser más rápida que la de segundo orden, incluso llegando a estimar $n = 2.998$ para la constricción Hamiltoniana del caso 1. Para las últimas gráficas del caso 1, la resolución más baja quedaba claramente fuera de la tendencia, por lo que de acuerdo a estas pruebas se podría establecer que el régimen de convergencia para el caso 1 está entre $\Delta r = 0.9$ y 2.1 .

Considerando las mismas resoluciones, la constricción de momentos muestra una convergencia más lenta ($n = 1.3 - 1.4$). Aproximadamente en $t = 140$ los errores de las resoluciones más altas en la constricción de momentos empiezan a crecer más que los de las más bajas, por lo que ya no se puede hablar de convergencia.

Para el caso 2 la situación es muy similar. Aunque el régimen de convergencia se puede establecer entre $\Delta r = 0.42$ y 2.1 , la constricción de momentos también deja de presentar convergencia cerca de $t = 140$.

La convergencia en la evolución también se estudió para el caso de los campos homogéneos. Para éstos no es interesante el comportamiento en el espacio, se monitoreó la convergencia usando un solo punto, que fue el de la frontera. El resultado puede verse en la fig. 6.7. Como se trata de una gráfica logarítmica, si las líneas mantuvieran siempre la misma separación, entonces serían siempre el mismo múltiplo una de la otra y los factores de convergencia permanecerían sin cambio en el tiempo. Puede verse que esto no es así. Las líneas se acercan y llegan a estar más próximas entre sí cerca del punto $t = 175$, lo que significa que allí existe menos convergencia. Posteriormente, se recupera la convergencia

y permanece con factores casi constantes al pasar el tiempo. El punto $t = 175$ es importante porque es donde se verá más adelante que sucede la transición de fase para estas condiciones iniciales, por lo que la pérdida de la convergencia en ese punto puede estar relacionada con la física. Puede verse que la línea correspondiente a la resolución más baja no recupera su posición relativa a las demás. Por lo tanto, esa resolución está fuera del régimen de convergencia.

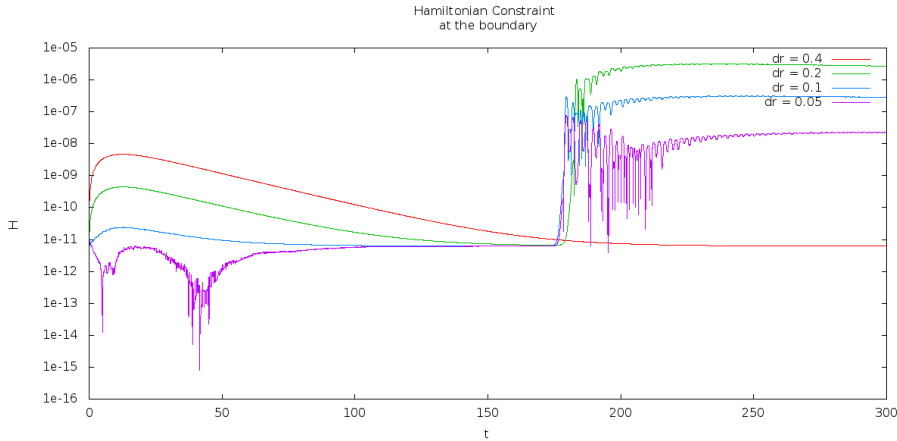


Fig. 6.7: Constricción Hamiltoniana evaluada en la frontera para un campo homogéneo.

6.8 Elección del tamaño de paso y la malla

Con ayuda de las pruebas descritas en la sección 6.7, se determinó usar la resolución espacial con $\Delta r = 0.9$, que es suficientemente alta está dentro del régimen de convergencia. A diferencia de las corridas para realizar las pruebas de convergencia, en las que se usaron para encontrar la evolución se utilizó un tamaño de paso adaptativo. Esto es porque debido a la foliación utilizada, el lapso crece con el tiempo, y puede llevar a la violación de la condición CFL. En las pruebas de convergencia se utilizó un paso de tiempo fijo porque lo que se buscaba era comparar la evolución del error en pasos de tiempo en que éste estuviera definido para varias resoluciones, lo que es difícil de lograr si éste está variando. Se partió de un parámetro de Courant inicial de 0.5, que fue el mismo que se utilizó en las pruebas de convergencia. El dominio espacial se tomó de 800 unidades de longitud para asegurar que la frontera estuviera suficientemente lejos y no afectara la evolución de la perturbación en el centro. La evolución se llevó a cabo durante 150 unidades de tiempo, para tomar en cuenta el hecho de que aproximadamente en $t = 140$ se pierde la convergencia. Los resultados deberían considerarse válidos hasta $t = 130$ para tomar en cuenta sólo aquellos en que la convergencia es clara. 130 unidades de tiempo podría parecer muy poco tiempo, pero, como se verá en la siguiente sección, varios efectos físicos interesantes pueden observarse durante ese periodo.

Para las corridas con campos homogéneos, se tomó una malla de 20 puntos con espaciado de 0.1 unidades, y un parámetro de Courant de 0.5. Debido a

que las pruebas de convergencia mostraban que ésta se seguía presentando a tiempos más largos, éstas simulaciones se llevaron a cabo por 300 unidades de tiempo.

Capítulo 7

Análisis de resultados

7.1 Rompimiento de simetría

El primer fenómeno físico interesante de observar es el rompimiento de simetría. En la fig. 7.1 está graficado el valor de los campos homogéneos, respecto al tiempo propio cosmológico (el de la métrica de FLRW). Las condiciones iniciales fueron las mismas que en las corridas usadas para producir las gráficas de las pruebas de convergencia antes mostradas (Figs. 6.2 y 6.7). El campo Φ_2 pasa por el valor crítico 0.007 aproximadamente en $t = 175$, momento a partir del cual el campo Φ_2 deja de oscilar al rededor de $\Phi_1 = 0$ para oscilar al rededor de uno de los mínimos absolutos. Variando ligeramente las condiciones iniciales ($\Phi_2 - 0.1\%\Phi_2$) puede verse que el mínimo en el que cae el campo después de la transición de fase depende muy fuertemente de las condiciones iniciales. Otro caso de interés es cuando la fricción de Hubble “congela” la evolución del campo escalar y la transición de fase nunca se produce. Aquí esto sucedió simplemente aumentando Φ_2 un 0.1%.

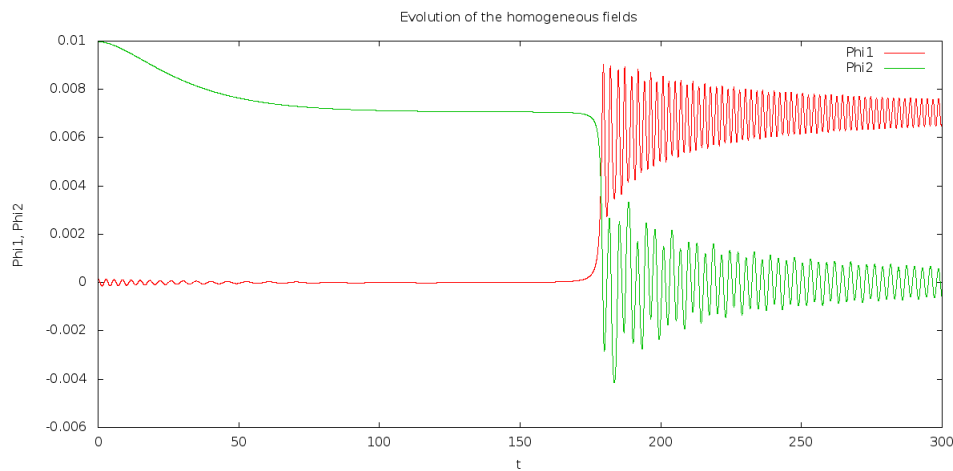


Fig. 7.1: Evolución del valor asintótico de los campos. Aproximadamente en $t=50$ ocurre la transición de fase.

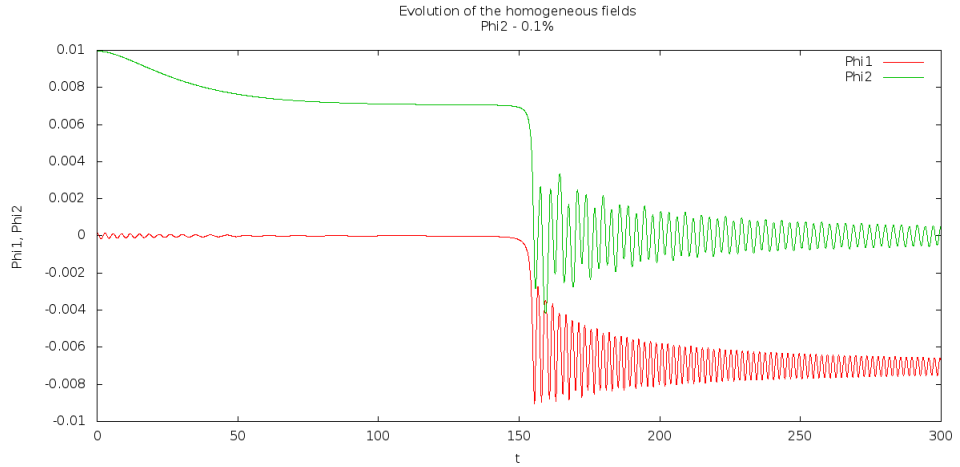


Fig. 7.2: Evolución del valor asintótico de los campos modificando un 0.1% la condición inicial.

7.2 Inflación

Uno de los aspectos interesantes de este sistema es que el potencial se asemeja a los utilizados en los modelos de inflación híbrida. De hecho, el sistema inicia en un “estado inflacionario”, que se termina con la transición de fase. Sin embargo, al contrario de la mayoría de estos, el potencial es plano a lo largo del eje del inflatón, por lo que puede suceder que la evolución de los campos sea detenida por el término de fricción y nunca se alcance el valor crítico, por lo que la inflación nunca terminaría.

La figura 7.4 muestra la evolución del factor de escala $a(t)$, respecto al tiempo propio cosmológico, para diferentes condiciones iniciales, etiquetadas por los valores de $\sqrt{\alpha}\Phi_1$, $\sqrt{\kappa}\Phi_2$. Cada condición inicial sale del periodo inflacionario en diferente tiempo, cuando ocurre la transición de fase. En uno de los casos (línea azul), la evolución se detiene y la inflación dura para siempre. Al igual que en los modelos de inflación híbrida, obtener un número específico de e-folds de inflación requiere de ajuste fino.

7.3 Densidad de energía

Después de la transición de fase, la densidad de energía del sistema decrece como a^{-3} . Es decir, como un fluido de materia bariónica o materia oscura, con ecuación de estado $w = 0$. En la figura 7.5 puede verse la evolución de la densidad para las mismas condiciones iniciales de la figura 7.4. Antes de la transición de fase, la densidad de energía es constante, como se espera de un Universo con únicamente constante cosmológica, y es hasta que sucede la transición que ésta empieza a diluirse.

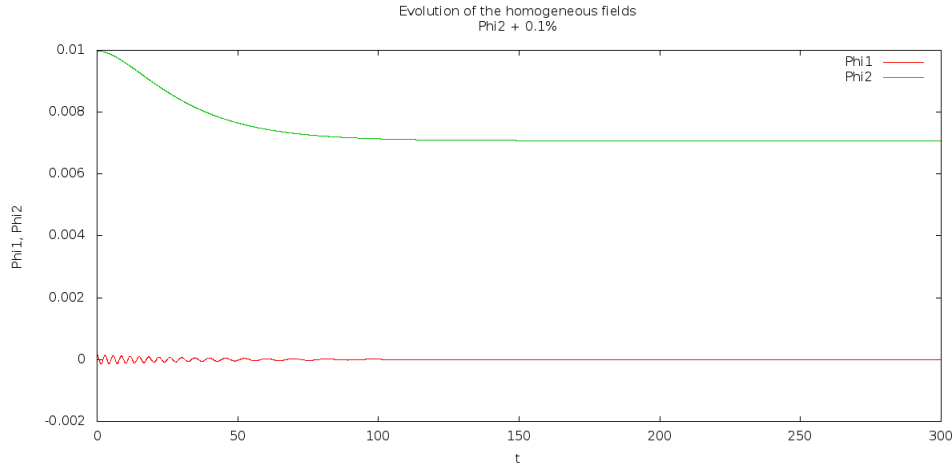


Fig. 7.3: Transición de fase “frustrada”: la fricción de Hubble congela la evolución de los campos

7.4 Perfil de densidad y paredes de dominio.

Las figuras 7.6 y 7.8 muestran la evolución de los campos respecto a la coordenada t para los casos 1 y 2, respectivamente. El eje horizontal corresponde a la coordenada t y el vertical a la coordenada radial r . En el sistema coordenado que utilizamos, la coordenada t corresponde al tiempo conforme η .

En las figs. 7.7 y 7.9 se representa la evolución de la densidad para los mismos casos. Además de éstas gráficas, se realizaron animaciones donde puede verse cómo evolucionan éstas y otras cantidades. Nótese que en las cuatro gráficas las escalas de colores son diferentes.

En el caso 1, la perturbación es demasiado pequeña y no afecta a gran escala al campo. Puede verse que al principio ésta se diluye y se aleja. Una vez que sucede la transición de fase, aproximadamente en $t = 50$, la velocidad con que se propaga la perturbación disminuye abruptamente y ésta se separa en dos cascarones esféricos, uno viajando hacia afuera y otro hacia adentro. La densidad de los cascarones va creciendo con el tiempo, al contrario de lo que sucedía con la perturbación antes de la transición. No es posible saber qué sucede con estos cascarones después con ellos, ya que la simulación deja de ser confiable, sin embargo sería de esperarse que el cascarón interno siguiera viajando hacia el centro hasta colapsar.

La evolución del caso 2 también es muy interesante. En la parte inferior izquierda de la fig. 7.8, pueden observarse fuertes oscilaciones en la perturbación. Debido al acoplamiento, éstas producen a su vez oscilaciones en el campo Φ_2 , que son suficientemente amplias para hacer que el sistema se tope con el vacío real en esa región. Una vez que esto sucede, el campo cercano empieza a ser arrastrado a este vacío, formándose una burbuja como las que se describieron en las secciones 4.3.3 y 4.4. La burbuja puede verse en color rojo, ya que las oscilaciones ahora son en torno al vacío real, que es mayor que cero. El campo fuera de la burbuja sigue oscilando en el vacío falso, al rededor de cero, que corresponde al color blanco. Es importante señalar que, a diferencia del proceso

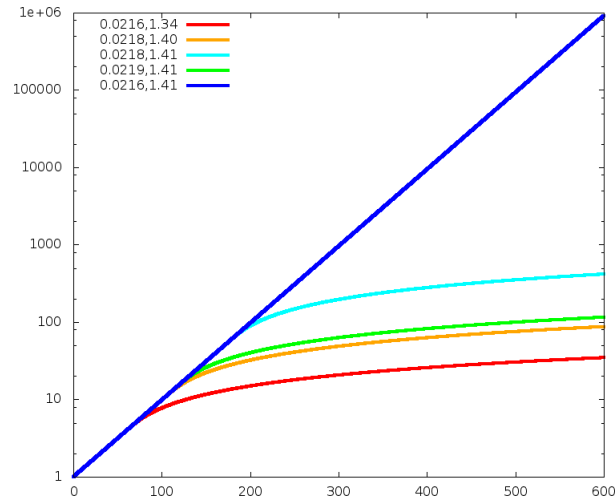


Fig. 7.4: Evolución del factor de escala $a(t)$ respecto al tiempo propio t , para varias condiciones iniciales con campos homogéneos.

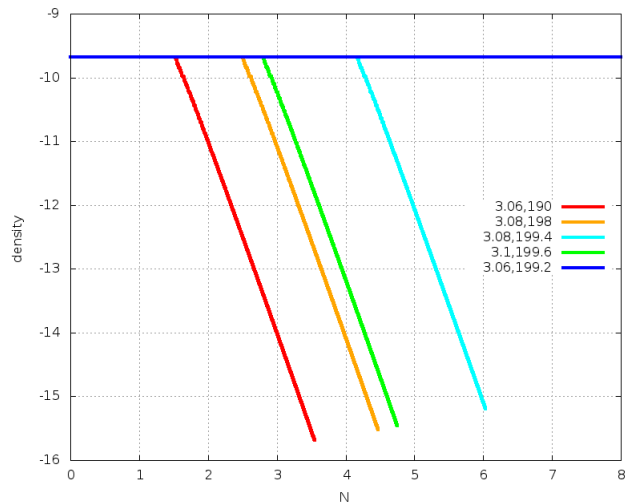


Fig. 7.5: Evolución de la densidad del campo homogéneo ρ_0 respecto al número de e-folds N , para varias condiciones iniciales con campos homogéneos.

que genera las burbujas descritas en dichas secciones, el proceso por el que se forma ésta es completamente clásico: aquí no hay tunelamiento, simplemente una oscilación demasiado amplia llevó a Φ_2 a cruzar el valor crítico e iniciar la transición de fase.

Al mismo tiempo que la burbuja crece, el sistema fuera de ella se desarrolla con su propia dinámica. La transición de fase ocurre en $t \approx 50$ y todo el campo afuera de la burbuja cae a un vacío real (azul). Sin embargo, éste resulta corresponder al mínimo opuesto al que correspondía el vacío adentro de la burbuja, por lo que antes era la superficie de ésta se convierte ahora en una pared de dominio, que empieza a colapsar debido a la gravedad que causa su propia densidad de energía. En la fig. 7.9, puede verse que la mayor concentración de energía reside en ésta superficie, y que una parte de ésta se sigue propagando hacia afuera después de que la pared empieza a colapsar. Sin embargo, ése cascarón de energía que escapa no es una pared de dominio, como puede verse en la fig. 7.8, sino sólo una perturbación oscilando en torno al vacío azul. La densidad de energía “del fondo” sigue comportándose como en la fig. 7.7, pero como la escala de colores ahora representa densidades mucho más grandes, ésta ya no puede apreciarse.

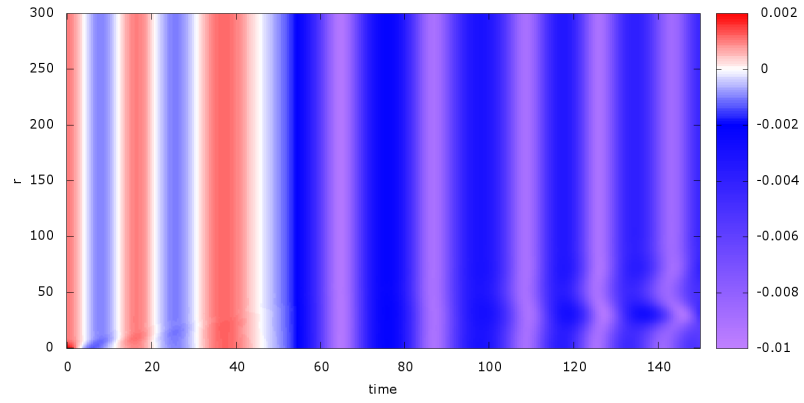


Fig. 7.6: Evolución del campo Φ_1 en el caso 1.

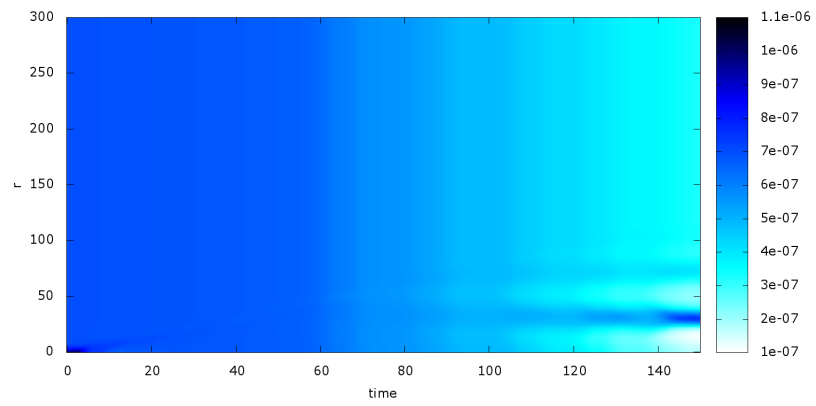


Fig. 7.7: Evolución de la densidad de energía en el caso 1.

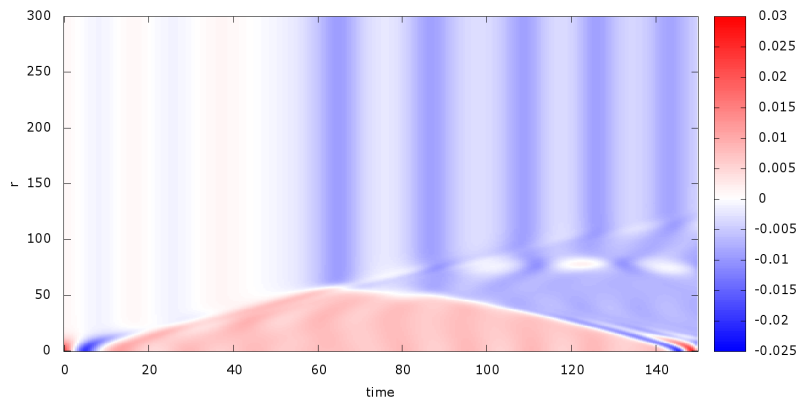
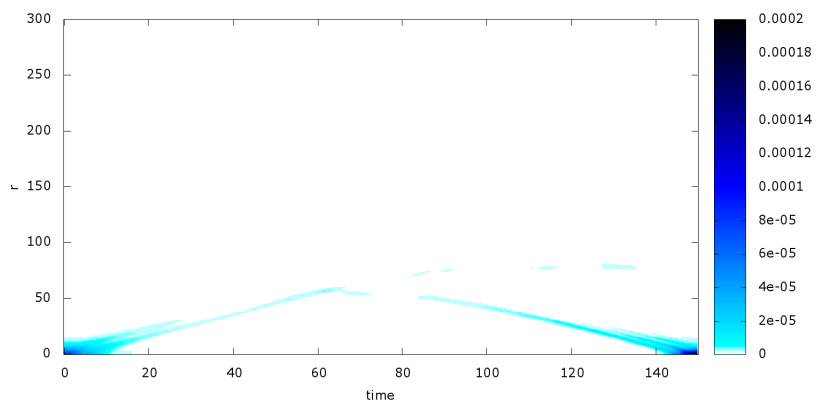
Fig. 7.8: Evolución del campo Φ_1 en el caso 2.

Fig. 7.9: Evolución de la densidad de energía en el caso 2.

Capítulo 8

Conclusiones

En este trabajo se simuló la evolución de un sistema de dos campos escalares que presenta una transición de fase asociada al rompimiento espontáneo de la simetría Z_2 . Esta evolución se realizó usando relatividad general completa en simetría esférica. Para simularla, se modificó y se utilizó el código OllinSphere2 que utiliza la formulación BSSNOK y un método de diferencias finitas.

Una buena parte de este trabajo se dedicó a revisar algunos conceptos de teoría cuántica de campos, relatividad general y cosmología, relevantes para el problema bajo estudio. Entre otros, se estudió cómo se cuantiza un campo escalar, en qué consiste el rompimiento espontáneo de simetría, qué es la inflación en cosmología, cómo pudo haberse detenido por un rompimiento espontáneo de simetría y en qué consiste un vacío falso.

Para poder entender cómo realizar e interpretar las simulaciones, fue necesario estudiar el formalismo BSSNOK, una formulación 3+1 de la relatividad general que permite realizar simulaciones numéricas más estables que otras que la precedieron. También fue necesario estudiar los métodos de diferencias finitas, un tipo de métodos numéricos usados para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

Usando los conocimientos mencionados, se procedió a modificar el código para adaptarlo a resolver el sistema en cuestión, a buscar condiciones iniciales donde se manifestaran efectos físicos interesantes y a analizar su comportamiento numérico.

A pesar de la sencillez del sistema y del poco tiempo que duró la evolución confiable, fue posible observar varios de éstos fenómenos:

- Se observó cómo, al suceder la transición de fase, uno de los campos pasó de oscilar al rededor del mínimo correspondiente a un vacío falso a oscilar al rededor de uno de los correspondientes al real.
- La simulación reprodujo correctamente lo que se esperaría en un modelo de inflación híbrida: una etapa inflacionaria que se termina cuando el inflatón, actuando como un parámetro de orden, pasa por su valor crítico. Se encontró que, igual que los modelos estudiados e inflación híbrida, el número de e-folds de inflación depende fuertemente de las condiciones iniciales.
- Se simuló una perturbación que evoluciona sobre las oscilaciones del campo

de fondo, con una amplitud del mismo orden que éstas, y se encontró que no afecta de forma significativa el proceso de inflación.

- Una vez ocurrido el rompimiento de simetría y terminada la inflación, pudo verificarse que la densidad del campo escalar decrece como $\propto a^{-3}$, siendo a el factor de escala, es decir, se comporta como materia oscura o materia bariónica.
- Cerca del final de esta simulación se pudo observar cómo empieza la formación de estructuras en forma de cascarones esféricos, estructuras que tienen su origen en la perturbación de la condición inicial. Sin embargo debido a que la simulación no es confiable más allá de ese tiempo, no es posible saber por el momento si se mantendrán estables, seguirán creciendo o se colapsarán.
- Al evolucionar una perturbación de amplitud significativamente más grande que los campos de fondo, se logró apreciar la formación de una burbuja de vacío real, que comenzó a expandirse a través del vacío falso, hasta que ocurrió la transición de fase en el resto del dominio.
- Cuando la transición de fase ocurrió, la región afuera de la burbuja cayó en el vacío real opuesto al de la burbuja, creando una pared de dominio, que después colapsó.

8.1 Perspectivas

Como se puede ver, el sistema estudiado parece ser capaz de exhibir una interesante riqueza de fenómenos. Sería interesante estudiar con éste código nuevos potenciales y condiciones iniciales, que puedan ser usados para representar situaciones físicas más realistas.

Otra interesante perspectiva para un trabajo futuro puede ser simular transiciones de fase térmicas asociadas a rompimientos espontáneos de simetría, también en relatividad general. Para ésto, es necesario considerar a los campos desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos térmica, e incorporar las correcciones dependientes de la temperatura que aparecen en la densidad y la presión. Una vez hecho esto, aún se presenta la dificultad de elegir una dinámica para la temperatura, para la que posiblemente se tengan que hacer diversas aproximaciones. Sin embargo, éstos son problemas que vale la pena atacar y que parecen estar más a nuestro alcance una vez realizado el pequeño paso de simular el sistema aquí estudiado.

Bibliografía

- [1] L. E. Mendes, A. R. Liddle. (2000). “Initial conditions for hybrid inflation”. *Phys. Rev. D* 62, 103511.
- [2] S. Coleman, F. De Luccia. (1980). “Gravitational effects on and of vacuum decay”. *Phys. Rev. D* 21, 3305.
- [3] M. Gleiser, B. Rogers, J. Thorarinson. (2008). “Bubbling the false vacuum away”. *Phys.Rev. D* 77 023513.
- [4] A. Suarez, T. Matos. (2014) “Bose–Einstein condensate dark matter phase transition from finite temperature symmetry breaking of Klein–Gordon fields” *Class. Quantum Grav.* 31 045015.
- [5] F. Mandl, G. Shaw. *Quantum Field Theory*. John Wiley & Sons, 1986.
- [6] M. Laine. *Basics of Thermal Field Theory*. Notas de clase de un curso en la Universidad de Bern. Disponible: en <http://www.laine.itp.unibe.ch/>
- [7] D. H. Lyth, A. R. Liddle. *The Primordial Density Perturbations*. Cambridge University Press 2009.
- [8] C. M. Will. (2006) “The Confrontation between General Relativity and Experiment”. *Living Rev. Relativity* 9, (2006), 3. URL (cited on 29.10.2014): <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3>
- [9] B. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [10] M. Sipiegal () *Análisis Vectorial*
- [11] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Elsevier, 2003.
- [12] J. Lesgourgues. *Inflationary Cosmology*. Notas de clase de un curso en la 3ième cycle de physique de Suisse romande, 2006.
- [13] Rees, Martin. (1998). *Before the Beginning* (New York: Basic Books) p. 185 ISBN 0-201-15142-1
- [14] Guth, Alan H. (1981). “Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems”. *Physical Review D* 23 (2): 347–356.
- [15] J. Ellis et al. “Review of the Safety of LHC Collisions”. Reporte del LHC Safety Assessment Group, (2008). Disponible en: <http://press.web.cern.ch/backgrounders/safety-lhc>

- [16] Alcubierre, M. “Métodos Numéricos en Relatividad.” *Métodos Numéricos en Astrofísica* ed. Matos et al. Pachuca: Instituto Avanzado de Cosmología, 2010.
- [17] Guzmán, F. S. “Solución a la ecuación de onda usando diferencias finitas” *Métodos Numéricos en Astrofísica* ed. Matos et al. Pachuca: Instituto Avanzado de Cosmología, 2010.
- [18] M. Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford University Press, 2008.
- [19] T. W. Baumgarte, S. L. Shapiro. *Numerical Relativity*. Cambridge University Press, 2010.
- [20] OllinSphere2?
- [21] J. M. Torres, et al. “First steps towards nonlinear structure formation in full general relativity”. In preparation.