Soluciones Exactas y Numéricas del Sistema Schrödinger–Poisson

Jesús Fuentes Aguilar

Departamento de Física
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Tesis dirigida por:

Dr. Tonatiuh Matos Chassin Dr. Pablo Galaviz Vilchis

Este trabajo se presenta para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Ciudad de México Marzo 2016

Agradecimientos

A Tonatiuh Matos, por depositar su confianza en un servidor para el desarrollo de este trabajo y por proveer de estructura al proyecto.

A Pablo Galaviz, un pilar fundamental durante este trabajo, a quien agradezco y reconozco su compromiso a pesar de las distancias.

A Alfredo Cruz Orea, por brindarme su tiempo para comentarios y observaciones de amplio interés.

A mi maestro, Bogdan Mielnik, por las pequeñas cátedras vespertinas con aire de Bohemia de los últimos cinco años.

En especial a mi padre, Fidel Fuentes, por su apoyo incondicional en todo momento, sus palabras alicientes. Un soporte único e invaluable.

Resumen

En la primera parte de este trabajo discutimos algunos de los elementos fundamentales de la teoría de solitones comparando la transformada espectral con la imagen de Ablowitz–Kaup–Newell–Segur (AKNS) como técnicas para la solución de problemas evolutivos no lineales. Ambas, aún sin estar vinculadas de manera directa con la transformada de Bäcklund, permiten reproducir soluciones por múltiples solitones. Asimismo, a partir de la introducción del sistema de Gauss–Weingarten para parametrizar superficies hiperbólicas de curvatura negativa y constante, discutimos algunos de los atributos geométricos característicos de los solitones.

Aunque los métodos de dispersión inversa y AKNS permiten integrar de manera cerrada algunos problemas evolutivos no lineales, una buena cantidad de ellos requiere de la integración numérica. Por ello, estudiamos los métodos de diferencias finitas para problemas de valor en la frontera y para problemas de valor inicial.

En la segunda parte abordamos, como caso de estudio, el sistema no lineal de ecuaciones Schrödinger–Poisson (SP). A partir de modificar la parte discreta del *kernel* de la ecuación de Gel'fand–Levitan–Marchenko, introducimos una pseudo transformada espectral que nos permite obtener una primera aproximación a la solución del sistema SP en la configuración de equilibrio. Posteriormente, buscamos correcciones a esta solución suponiendo que es separable. Como resultado, obtenemos soluciones exactamente solubles en el sistema SP.

Por último, reportamos algunos de los resultados que hemos obtenido de la experimentación numérica con solitones SP en tres dimensiones.

Abstract

Firstly, we discuss the relation between spectral transform technique and the Ablowitz–Kaup–Newell–Segur (AKNS) method, two of the most studied approaches to solve nonlinear evolutive problems. Both techniques, not precisely related to the Bäcklund transformations, lead to multi soliton solutions. Bäcklund and Bianchi works from classical differential geometry describe inherently the peculiar behaviour of solitons through the Gauss–Weingarten system so as to parametrize hyperbolic surfaces with negative, constant curvature, for which we hold a brief survey.

Even spectral transform and AKNS techniques allow the solution of a certain class of nonlinear equations, some others require numerical integration. On this way, we study finite differences methods for boundary value problems and initial value problems.

In the second part of this work, we consider the Schrödinger–Poisson (SP) equations. In order to find their exact solutions we introduce a pseudo spectral transform and we modify the discrete part of the kernel for Gel'fand–Levitan–Marchenko equation, as a result we obtain a first analytical approximation, which correctness is achieved once we have surmised separable, stationary solutions.

In the last part we present some numerical results due to the simulation of the SP system. For this case we report the head–on collision of two SP solitons in three dimensions.

Índice general

Índice de figuras IX

1. Introducción 1
- 1.1. Preliminares . . . 2
- 1.2. Motivación . . . 3
- 1.3. Notación . . . 4

2. Teoría De Solitones 5
- 2.1. Propiedades de la No Linealidad . . . 6
  - 2.1.1. Efectos Dispersivos . . . 6
  - 2.1.2. Efectos No Dispersivos . . . 9
- 2.2. La Transformada Espectral . . . 11
  - 2.2.1. El Problema Espectral Inverso . . . 13
  - 2.2.2. Método de Solución . . . 16
- 2.3. Técnicas Algebraicas . . . 19
  - 2.3.1. Leyes de Conservación . . . 20
  - 2.3.2. Método de Solución . . . 23
- 2.4. Geometría de Solitones . . . 27
  - 2.4.1. El Sistema de Bianchi . . . 28
  - 2.4.2. La Transformada de Bäcklund . . . 30
  - 2.4.3. Generación de Múltiples Solitones . . . 33
  - 2.4.4. Superficies Pseudo Esféricas . . . 36

3. Métodos de Diferencias Finitas 41
- 3.1. Aproximaciones por Diferencias Finitas . . . 42
- 3.2. Problemas Independientes del Tiempo . . . 45
  - 3.2.1. Error Numérico . . . 46

3.2.2. El Teorema Fundamental 48
3.2.3. Métodos de Malla Uniforme 50
3.2.4. Métodos de Malla Múltiple 51
3.3. Problemas Dependientes del Tiempo 56
3.3.1. Regiones de Estabilidad 57
3.3.2. Método de Líneas 59

4. El Sistema Schrödinger–Poisson 67
4.1. Forma Canónica del Sistema Schrödinger–Newton 68
4.2. El Sistema Schrödinger–Poisson Sobre la Línea 70

5. Soluciones Exactas y Numéricas del Sistema Schrödinger–Poisson 75
5.1. Pseudo Transformada Espectral del Sistema SP. 76
5.1.1. Comportamiento Asintótico de $F(z, y; \mu)$ 80
5.2. Soluciones Exactas 81
5.3. Soluciones Numéricas 89

6. Conclusiones y Resultados 97
6.1. Conclusiones 97
6.2. Resultados 98

Bibliografía 101

Anexo A. Ecuaciones Evolutivas Integrables 105

Anexo B. Relación Entre la Transformada Espectral y la Imagen AKNS 109

Anexo C. Fórmulas de Diferencias Finitas 111

Anexo D. Clasificación de las EDP de Segundo Orden 113
D.1. Forma canónica de las ecuaciones elípticas 114
D.2. Forma canónica de las ecuaciones parabólicas 114
D.3. Forma canónica de las ecuaciones hiperbólicas 115

Anexo E. Función de Green de la Ecuación de Poisson 117

Anexo F. Tipos de Condiciones a la Frontera 119

Índice de figuras

2.1. Secuencia de $u(x,t)$ para distintos valores de t, por ahora son cantidades adimensionales. Al inicio de la secuencia $u(x, t \to 0)$ se aproxima a la distribución (2.12). La onda se irá desvaneciendo gradualmente mientras $t \to \infty$. En cada uno de los esquemas el eje de las abscisas corresponde a x y el eje de las ordenadas a $u(x,t)$ con t fijo. 9

2.2. Colisión entre dos solitones de la ecuación de KdV. Se puede ver que el perfil de las entidades no se altera y permanece intacto aún después de la colisión. En cada uno de los páneles el parámetro t se expresa en cantidades adimensionales. 11

2.3. Se muestra una secuencia de $u(x,t)$ para distintos valores de t en términos adimensionales. A diferencia de la figura 2.1 esta vez en $u(x,t)$ se involucra la información del término no lineal de la ecuación de KdV. Como se puede notar, la introducción de este término proveé de cualidades no dispersivas a la evolución del sistema. 12

2.4. Dos métodos de solución para una ecuación evolutiva no lineal. En el brazo izquierdo, la evolución temporal se realiza en el espacio de configuración; este procedimiento es prácticamente heurístico. En el brazo derecho, la evolución temporal se desarrolla en el dominio del espectro. Se puede advertir la analogía que existe con la transformada de Fourier. 17

2.5. Dos superficies hipotéticas, σ y σ', relacionadas entre sí a través de la transformada de Bäcklund $\mathbb{B}_\beta$. Aquí $\beta = \tan\zeta/2$ parametriza la transformación. La superficie σ' posee exactamente la misma curvatura que la superficie semilla σ. 31

2.6. Diagrama de Bianchi. Dada la solución semilla u, se inducen dos transformadas de Bäcklund sucesivas, mismas que se parametrizan por β_1 y β_2. 34

2.7. Superposición no lineal de dos solitones, $U = u_{21} = u_{12}$, mediante la aplicación sucesiva de la transformada de Bäcklund, parametrizada por β_1 y β_2, al solitón semilla u. Este mismo procedimiento puede extenderse para generar múltiples solitones. 35

2.8. Pseudo esfera de Beltrami. Esta superficie se asocia a la solución por un solitón individual, estacionario para la ecuacón de Bour. Aquí $\mathbb{B}$ está parametrizada por $\beta = \tan \pi/4$. 37

2.9. Superficies pseudo esféricas generadas de la superposición no lineal de dos solitones estacionarios de la ecuación de Bour en la representación (2.90). En cada panel, la transformadada $\mathbb{B}$ se parametriza con valores distintos β_n, $n = 1, 2$. 39

2.10. Solitones individuales de Bianchi. La transformada de Bäcklund en el vacío asociada al sistema (2.68)–(2.69) para superficies hiperbólicas, está dada por (2.97). El parámetro ρ es de carácter adimensional. En cada panel, las revoluciones, en términos de los parámetros ξ y τ, son distintas. 40

3.1. Tres aproximaciones a $u_x(x_0)$. En el equema, los segmentos de recta AB, BC y AC corresponden a las pendientes de $\Delta_- u(x_0)$, $\Delta_+ u(x_0)$ y $\Delta_0 u(x_0)$, con referencia a las fórmulas en (3.1) y (3.2). La recta L concierne al valor exacto de la pendiente de u_x en el punto x_0. Conforme $h \to 0$ la recta secante AC se aproxima a L. 42

3.2. Una malla uniformemente espaciada. La solución exacta $u(x)$ (línea punteada) es aproximada a partir de los puntos discretos x_n, $n = 1, 2, \ldots, N$. El parámetro h determina la calidad de la aproximación. Como se aprecia en el esquema, el error en la aproximación puede diferir de punto a punto. 46

3.3. Solución a la ecuación de Poisson (4.2) en una dimensión sujeta a la fuente $\phi = (x^2 - 1) \exp -x^2/2$ en el dominio $x \in [-1, 1]$. En los tres casos, el tamaño de la malla es de $N = 2^5$ nodos. En los páneles del lado izquierdo, el algoritmo empleado, y a la derecha de cada uno, la tasa de convergencia caracterizada por el error absoluto en función del número de iteraciones. 52

3.4. Solución exacta y aproximada a la ecuación de Poisson (4.2) mediante el método de Jacobi. Para este ejemplo se ha considerado la fuente $\phi = (x^2 + y^2 - 2) \exp -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ en el dominio $x, y \in [-5, 5]$. La aproximación está hecha con una malla de $N = N_x = N_y = 2^6$ nodos y N^2 ciclos de iteración. 53

3.5. Tasa de convergencia del método de Jacobi medida en términos del ancho de la malla para la solución a (4.2). En el mapa, los asteriscos indican el error absoluto en función del inverso del tamaño del dominio, mientras que la línea punteada (con pendiente m =1.37) es el ajuste por mínimos cuadrados de estos datos. 54

3.6. Amortiguamiento del error en el algoritmo de Jacobi. Del lado izquierdo, la solución exacta (línea sólida) a la ecuación de Poisson caracterizada como $u_{xx} = 2[(3 - 2x^4)x^{-2}J_1(x^2) - J_0(x^2)]$, $x \in [0, 2\pi]$ y la solución aproximada (línea punteada) en un dominio de $N = 2^8$ puntos. Del lado derecho, el error correspondiente para tal número de iteraciones. Como se aprecia, las frecuencias más altas son atenuadas en acaso unas cuantas repeticiones. 55

3.7. Tres esquemas distintos para cuatro niveles de malla, de izquierda a derecha: v–ciclos, w–ciclos y MMP con v–ciclos. Conforme se engrosa la malla, se agiliza la velocidad en el cómputo. 56

3.8. Regiones de estabilidad absoluta para el método de Euler. Estas regiones, en el plano complejo, revelan los valores que puede asumir z tal que el error en el método se comporte asintóticamente igual al error local de truncado para todo tiempo t. 60

3.9. A la izquierda, las regiones de estabilidad absoluta. A la derecha, las regiones de estabilidad relativa, o diagramas de órdenes de estrella de las racíces características para cada método. 61

3.10. Método de líneas. En el esquema se representa el caso hipotético de alguna ecuación diferencial parcial en dos variables, x y t. La parte discreta (continua), asociada a x (a t), se resuelve de manera numérica (analítica). Las soluciones $U_n(t)$ se propagan a lo largo de los N nodos en función de t. 62

3.11. Solución a la ecuación de onda (3.24) por el método de líneas. En en el panel izquierdo, la solución exacta. En el panel derecho, la solución aproximada con $N = 512$ nodos (en la figura sólo se presentan diez), en el dominio espacial $x \in [-1, 1]$ y temporal $t \in [0, 5]$ con $c = 1$. Para resolver el miembro izquierdo de (3.28) se ha usado la función `ode15s` en MATLAB. 63

3.12. Tasa de convergencia de la solución a (3.24) por el método de líneas, en términos del máximo error respecto al espaciado de malla h, usando $N = 2^n$ nodos, con $n = 5, \ldots, 9$. Los valores de la pendiente m de la línea punteada son menores al orden del método, en este caso a segundo orden. 64

3.13. Solución a la ecuación de difusión. Lado izquierdo, solución exacta. Lado derecho, solución aproximada por el método de líneas. El miembro derecho de la ecuación (3.27) ha sido calculado de manera iterada (1024 iteraciones), entretanto, el miembro izquierdo se ha integrado con la función `ode15s` de MATLAB. . . . 65

3.14. Tasa de convergencia de la solución a (3.27) por el método de líneas, en términos del máximo error respecto al espaciado de malla h. Se han empleado $N = 2^n$ nodos, con $n = 5, \ldots, 9$. En cada caso se muestran los valores aproximados de la pendiente m de la línea punteada. El método empleado es exacto a segundo orden. 66

4.1. Solución numérica a (4.15) –lado izquierdo– y a (4.14) –lado derecho– en el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$, con $\lambda = \{1, 5/2, \exp(4\pi/5)\}$, respectivamente. . 72

4.2. Primera aproximación a la solución de (4.8) (parte real). Cada panel corresponde a los casos presentados en la figura 4.1 en un dominio temporal $t \in [0, 10]$ con $\omega = 1$. 73

5.1. Convergencia de $\sigma(x, y)$ en (5.16). Los páneles corresponden a una, dos y tres iteraciones del algoritmo (5.20)–(5.21) con $\mu = 1$. Se observa que $\sigma(x, y)$ tiende a cero conforme se avanza en el número de iteraciones. 79

5.2. Perfil del solitón estacionario del sistema SP. En este ejemplo, $a = p = \lambda = 1$ y $t = 0$, en el intervalo $[-\pi, \pi]$. 82

5.3. Mapa de contorno p/a de (5.29) con $\lambda = 1$. 83

5.4. Mapa de contorno p/λ de (5.29) con $a = 1$. 83

5.5. Soluciones exactas del sistema SP. En el lado izquierdo (derecho) la parte real (imaginaria) de ψ, para algunos valores arbitrarios de a, p y fijando $\lambda = 1$, en el intervalo espacial $[-5, 5]$ y temporal $[0, \pi]$. 84

5.6. Densidad la función de onda. Se emplean los mismos valores de p, a, fijando $\lambda = 1$, así como los mismos intervalos espacial y temporal de la figura 5.5. . . 85

5.7. Soluciones exactas del sistema SP. En el lado izquierdo (derecho) la parte real (imaginaria) de ψ, para algunos valores arbitrarios de p, λ y fijando $a = 1$, en el intervalo espacial $[-5, 5]$ y temporal $[0, \pi]$. 86

5.8. Densidad la función de onda. Se emplean los mismos valores de p, λ, fijando $a = 1$, así como los mismos intervalos espacial y temporal de la figura 5.7. . . 87

5.9. Soluciones exactas (estacionarias) del sistema SP en dos dimensiones. En este ejemplo se han elegido los valores $a = 1, p = 1/2, \lambda = 1/2$. 88

5.10. Convergencia del método para resolver la parte elíptica de las ecuaciones SP. (a) Tasa de convergencia para 2^n nodos, donde $n = 5, \ldots, 9$. El segmento de recta tiene una pendiente $m \approx 3.37$, valor por debajo del orden de precisión del método. (b) Solución exacta (línea continua) y aproximada (línea punteada) a la ecuación de Poisson, en el dominio $x \in [-6, 6]$, con $N = 256$ nodos. 90

5.11. Soluciones numéricas y analíticas. Las soluciones numéricas, para $N = 32, 64, 128$ nodos tomando el perfil de un solitón estacionario centrado en el origen con momento inicial $p_x = 0$ y comparando con la solución analítica dada por las expresiones (5.27)–(5.29), con $a = \lambda = 1$, $q = 51/400$ y $p = 11/50$. En este caso, q no es un factor de normalización. 91

5.12. Solución numérica de las ecuaciones SP. Se muestra un solitón estacionario centrado en el origen, en el dominio $x, y, z \in [-8, 8]$, en un intervalo temporal $[0, 20]$, con momento inicial $p_0 = p_x = p_y = p_z = 0$ y sujetándose al valor inicial $\psi_0 = 0.22$. Se ha empleado una resolución de malla de 128^3 nodos ($N_x = N_y = N_z = 128$). 92

5.13. Solución numérica para dos solitones del sistema SP, centrados en el origen, en el dominio $x, y, z \in [-8, 8]$, en un intervalo temporal $t \in [0, 20]$, con un momento inicial $p_0 = p_x = p_y = p_z = 0$ (en ambos casos) y $\psi_0 = -0.0353$. En la simulación se han usado 128^3 nodos ($N_x = N_y = N_z = 128$). 93

5.14. Colisión frontal de dos solitones SP. Los conglomerados se centran en $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$, con $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$, $p_x = 1/16$ y $p_y = p_z = 0$ en ambos casos. El dominio numérico $x, y, z \in [-25, 25]$, en un intervalo temporal $t \in [0, 12]$. La simulación se ejecutó con una resolución de 128^3 nodos ($N_x = N_y = N_z = 128$). 94

5.15. Perfil de colisión de dos solitones SP. Los conglomerados corresponden al ejemplo de la figura 5.14. 95

Capítulo 1

Introducción

Un *solitón* es una onda solitaria, usualmente de perfil corcovado, bien localizada y no dispersiva que preserva su forma y velocidad aún después de la colisión con otro solitón de la misma especie. El primer reporte que da testimonio de la onda solitaria como fenómeno natural data de 1834 por John Scott Russell [1], el descubrimiento de las propiedades hoy adjudicadas a los solitones se debe a Seeger *et al.* en 1953 [2] y el término (solitón) fue acuñado en 1965 por Zabusky y Kruskal [3].

Los solitones son entidades que provienen de ecuaciones evolutivas no lineales. Una ecuación evolutiva es un tipo de ecuación diferencial parcial. Se le nombra evolutiva porque una de sus variables independientes es asociada con el parámetro temporal característico de cierto sistema físico. Si la ecuación, además, recibe el calificativo de *no lineal*, es porque sobre la variable dependiente o sobre cualquiera de sus derivadas actúan potencias distintas a la unidad o productos entre sí.

Los métodos para resolver este tipo de ecuaciones difieren respecto de los métodos para resolver ecuaciones diferenciales lineales (sean ordinarias, parciales o algebraicas) aunque, bajo ciertas condiciones, algunas de estas técnicas constituyen un aspecto generalizado de las técnicas bien conocidas para resolver problemas lineales.

En la primera parte de este trabajo (capítulos 2 y 3) estudiamos algunas de las técnicas para resolver problemas evolutivos no lineales. Abordamos la teoría moderna de ecuaciones diferenciales tanto en el análisis funcional como en el numérico y examinamos su relación con la geometría diferencial clásica cuasi Euclideana. En la segunda parte (capítulos 4 y 5), derivado de nuestro estudio, aplicamos la teoría para resolver de manera cerrada un problema evolutivo en particular.

1.1. Preliminares

Los primeros modelos de la onda solitaria se registran en los tratados de hidrodinámica del siglo XIX; destacan los trabajos de Boussinesq [4], Rayleigh [5], McCowan [6] y el de Korteweg y de Vries [7].

La ecuación de Korteweg–de Vries (KdV) fue el primer problema evolutivo no lineal para el que se encontraron soluciones por solitones a través de la *transformada espectral*. Esta técnica fue introducida en 1967 por Gardner–Greene–Kruskal–Miura (GGKM) [8] y formalizada un año más tarde por Lax [9].

La transformada espectral constituye la generalización a la transformada de Fourier en el ámbito no lineal y es la piedra angular en la teoría de solitones. Otros métodos espectrales se han derivado de esta técnica, como el de Zakharov y Shabbat para resolver la ecuación de Schrödinger no lineal [10]. Aunque también es común encontrar demás métodos de solución en la literatura, entre ellos: por pares de Lax, método de Ablowitz–Kaup–Newell–Segur (AKNS), método directo de Hirota, método de Miura, métodos asintóticos, soluciones por *negatones*, por *positones*, por *complejitones*, etcétera.

No obstante, a pesar de que la teoría de solitones se ha enriquecido en los últimos cuarenta años con diversas técnicas analíticas de solución, la clase de problemas no lineales susceptibles a la integración por alguno de estos métodos es aún reducida, y en este sentido, la teoría se encuentra mermada.

Las técnicas numéricas de integración no padecen este problema. En la literatura, los métodos de diferencias finitas y los métodos de elemento finito, suelen ser los más estudiados. Más aún, por su relación directa con las ciencias de la computación, el análisis numérico goza de buen consentimiento en diversas disciplinas científicas como la astronomía, la física, las matemáticas aplicadas, la biología y la economía.

Técnicas analíticas como las de Lax y AKNS, e incluso su relación con las transformadas de Bäcklund y Darboux, han sido generalizadas en términos de diferencias finitas por Bruschi y Ragnisco [11]. Este tratamiento no ha sido muy ampliado desde su primera exposición y podría favorecer, aún más, al desarrollo de la teoría de solitones.

Las transformadas de Bäcklund y de Darboux son resultados que provienen de la geometría diferencial clásica. Mediante estos dos conceptos es posible aplicar el *principio de superposición no lineal*, derivado por Bianchi, y generar soluciones por múltiples solitones. La naturaleza peculiar de los solitones radica completamente en sus atributos geométricos. Por ello, la conexión entre la teoría de solitones y la geometría diferencial es inherente.

1.2. Motivación

Los objetivos de este trabajo son: 1) examinar algunas de las técnicas analíticas y numéricas para la solución de problemas evolutivos no lineales y 2) aplicar la teoría a un caso de estudio.

Dentro de las técnicas analíticas abordamos la transformada espectral y la imagen de Lax–AKNS. En las técnicas numéricas revisamos algunos de los métodos por diferencias finitas. Y como caso de estudio, hemos elegido el sistema Schrödinger–Poisson (SP).

En la teoría de solitones existe una clase de ecuaciones evolutivas susceptible a la integración cerrada mediante alguna de las dos técnicas analíticas que abordamos. A pesar de que esta clase se halla bien identificada, sólo algunos de los miembros de este conjunto se exponen en la literatura, con mayor frecuencia: la familia de ecuaciones de KdV, la ecuación de Bour (o seno–Gordon), la de Schrödinger no lineal, la de Ernst, la red de Toda, el modelo de Yang–Mills, la ecuación de Liouville, por mencionar algunos.

Más aún, las técnicas analíticas de solución se encuentran caracterizadas para ciertos problemas no lineales (como los mencionados arriba), por lo que el estudio de un problema ajeno a esta caracterización representa nuevas dificultades.

La alternativa para integrar estos problemas suele ser a través del análisis numérico. El sistema SP es uno de ellos. Apareció por primera vez en 1969 en el contexto de la astrofísica y la cosmología para estudiar estrellas bosónicas auto–gravitantes [12]. En la literatura se pueden encontrar diversas soluciones numéricas a este sistema, estacionarias o fuera de equilibrio, en simetría esférica o axial simétrica.

En este trabajo de tesis buscamos soluciones analíticas al sistema SP y por simplicidad nos restringimos a la configuración en equilibrio. Por otro lado, nos apoyamos en el código Cospy para experimentar con las soluciones numéricas de este sistema, de lo que presentamos soluciones fuera de equilibrio en tres dimensiones.

Todas las figuras que se presentan a lo largo del texto así como los capítulos 4 y 5, son resultados de nuestro propio trabajo.

1.3. Notación

A lo largo del texto procuramos omitir dependendencias en las funciones, excepto en casos donde puede haber ambigüedad o donde se requiere ser explícito.

$\aleph$ es siempre alguna constante real,

a, b, f, u son funciones genéricas,

Ψ, ψ son funciones de onda,

l, m, n son índices discretos, a menos que se especifique otra cosa,

x, t son variables independientes reales,

f_x es la derivada de $f := f(x)$ respecto de x,

$f(x; l)$ es una función que depende de la variable independiente x y l es un parámetro,

$f_{n,x}$ es la derivada de la n–ésima función f respecto de x,

$f_{n,m}$ en el contexto de diferencias finitas, es la representación de f en términos de sus variables discretas. En la literatura es común etiquetar con un superíndice (f^l) a las diferencias finitas de la derivada temporal y con subíndices ($f_{m,n}$) a las espaciales, nosotros no adoptamos esa notación.

$f^{[l]}$ se lee como la l–ésima iteración de f, en el cómputo por diferencias finitas,

$\Gamma^l_{m,n}$ son los símbolos de Christoffel.

$\mathbf{A}$ las matrices se escriben en mayúsculas y en negritas, a menos que se indique otra cosa,

$\mathbf{x}$ los vectores se escriben en minúsculas y en negritas.

Por último, las grafías en *letra bastardilla* se emplean para indicar extranjerismos o hacer énfasis en ideas y conceptos.

Capítulo 2

Teoría De Solitones

En las siguientes secciones se estudian algunas de las técnicas para integrar ecuaciones evolutivas no lineales. Asimismo, se introducen dos conceptos fundamentales en la teoría de solitones, a saber: la transformada de Bäcklund y el teorema de permutación de Bianchi; ambos resultados provenientes de la geometría diferencial clásica. Como se verá más adelante, el estudio de solitones guarda una relación estrecha con la generación de superficies pseudo esféricas, es decir, superficies hiperbólicas de curvatura Gaussiana menor a cero.

En primer lugar estudiamos las propiedades de la no linealidad en las ecuaciones de evolución y comparamos con la versión lineal del mismo modelo. En nuestro ejemplo usamos la ecuación de KdV.

Enseguida presentamos la transformada espectral como técnica para resolver problemas no lineales de evolución y aplicamos este método para resolver la ecuación de KdV.

Dentro de las ténicas de solución por determinantes, revisamos el esquema de Lax–AKNS y consideramos la ecuación de KdV como ejemplo. La relación entre este método y la transformada espectral la delegamos al anexo B.

Por último, estudiamos los atributos geométricos inherentes a los solitones, y a partir de ahí introducimos la transformada de Bäcklund y el teorema de supersposición no lineal para la generación de soluciones por múltiples solitones. Como ejemplo tomamos la ecuación de Bour.

2.1. Propiedades de la No Linealidad

Consideremos la clase de ecuaciones evolutivas no lineales de la forma:

$$u_t(x,t) = \alpha(\mathbf{\Lambda})u_x(x,t), \tag{2.1}$$

donde $u(x,t)$ es una función real de clase C^∞ que desvanece asintóticamente junto con todas sus derivadas respecto a x; $\alpha(\zeta)$ es un polinomio y $\mathbf{\Lambda}$ es el operador integro–diferencial de Calogero–Degasperis [13] cuya acción sobre alguna función de prueba $f := f(x)$ se define como:

$$\mathbf{\Lambda}f(x) := f_{xx}(x) - 4\,u(x,t)f(x) + 2\,u_x(x,t)\int_x^{+\infty} \mathrm{d}\xi\; f(\xi), \tag{2.2}$$

siendo $u(x,t)$ una función que satisface (2.1).

A continuación introducimos una ecuación de evolución de la clase (2.1). Dada esta ecuación consideramos tanto su versión lineal como no lineal y resolviendo para cada caso confrontamos las diferencias en el comportamiento de ambas soluciones.

2.1.1. Efectos Dispersivos

Comencemos por la siguiente observación. Sean $\alpha := \alpha(\zeta)$ y $\beta := \beta(\zeta)$ dos polinomios en ζ y $u := u(x,t)$ una función que satisface (2.1). Supongamos que existe el límite para el cual todas las potencias de u así como de todas sus derivadas respecto de x son tan pequeñas que pueden ser despreciadas, tal que (2.1) se pueda escribir como la ecuación lineal:

$$u_t(x,t) = \alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_x(x,t), \tag{2.3}$$

es decir,

$$u_t(x,t) = \sum_{0\le n<\infty}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n u_x(x,t) \approx u_x(x,t).$$

Si ahora se define $\beta(\zeta) := -\zeta\alpha(-\zeta^2)$, la ecuación (2.3) se escribe de manera equivalente como:

$$u_t(x,t) = -i\,\beta\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_x(x,t). \tag{2.4}$$

En el caso de que $\alpha(\zeta)$ sea real, automáticamente $\beta(\zeta)$ también lo es; por lo tanto $\beta = -\zeta\alpha(-\zeta^2)$ corresponde a una ecuación real y puramente dispersiva[1] (o no disipativa).

El llevar una ecuación de la forma (2.1) a una ecuación lineal como (2.3), tiene repercusiones importantes. Tómese el siguiente caso particular: $\alpha(\zeta) = \zeta$, del cual, a partir de (2.2), resulta

$$-\mathbf{\Lambda}u_x = -u_{xxx} - 6\,uu_x,$$

substituyendo en (2.1),

$$u_t + u_{xxx} + 6\,uu_x = 0. \tag{2.5}$$

Esta expresión se conoce como ecuación de KdV en su forma canónica o estándar.

Si de la ecuación de KdV se omite el término no lineal, ella se reduce a:

$$u_t + u_{xxx} = 0, \tag{2.6}$$

que es una ecuación de onda homogénea sujeta a la relación de dispersión $\omega = -k^3$ y cuya solución particular es de la forma $u(x,t) = \exp i(kx - \omega t)$. Más todavía, si la solución particular se multiplica por una función arbitraria $\Phi(k)$ y esto se integra sobre todo el dominio D de k (tal es $-\infty < k < \infty$), la solución general a (2.6) se escribe como:

$$u(x,t) = \int_D \mathrm{d}k\,\Phi(k)\exp i(kx - \omega t). \tag{2.7}$$

Conviene escribir esta última representación en términos de la integral de Fourier. Para ello, al tiempo inicial $t = 0$, se define la función

$$\phi(x) := u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\,\Phi(k)\exp(ikx),$$

que es la transformada de Fourier de $\Phi(k)$. Por otro lado, la transformada inversa de Fourier de la distribución $\phi(x)$ es:

$$\Phi(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x'\,\phi(x')\exp(-ikx).$$

Si $\Phi(k)$, dada por la expresión anterior, se reemplaza en (2.7) y en virtud de la relación de dispersión, se obtiene la solución general a (2.6) en términos de la integral de Fourier:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x'\,\phi(x')\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\,\exp[i(k(x-x') + k^3t)]. \tag{2.8}$$

[1] Cuando a una ecuación de onda no lineal le corresponde una solución de la forma $u(x,t) = Af(kx - \omega t)$ donde A es constante y $\omega := \omega(k)$ tal que $\omega''(k) \neq 0$, entonces la ecuación es llamada dispersiva.

A partir de aquí se pueden reconocer algunos hechos: *e.g.*, dado que la función delta está definida como

$$\delta(t-x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \exp ik(t-x),$$

la representación integral para una función arbitraria $f(x)$ es:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, f(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \exp ik(t-x)\right].$$

Si se introduce la abreviación:

$$G(x,t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \exp i(kx+k^3t); \tag{2.9}$$

entonces (2.8) se representa como:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x'\, \phi(x')G(x-x',t), \tag{2.10}$$

observando que las igualdades $u(x,t) = G(x,t)$ y $\delta(x) = G(x,0)$ se satisfacen si $\phi(x) = \delta(x)$. Bajo estas consideraciones, aunado a que se buscan soluciones reales, la función de Green (2.9) se transforma en

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{d}k\, \cos(kx+k^3t) \\ &= \frac{1}{9t^{4/3}}\left[\frac{3t}{\Gamma(\frac{2}{3})}\ {}_0\mathrm{F}_1\left(\frac{2}{3};\frac{x^3}{27t}\right) - \frac{xt^{2/3}}{\Gamma(\frac{4}{3})}\ {}_0\mathrm{F}_1\left(\frac{4}{3};\frac{x^3}{27t}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\pi t^{1/3}}\mathrm{Ai}\left[\frac{x}{(3t)^{1/3}}\right]; \end{aligned}$$

por lo tanto (2.10) es:

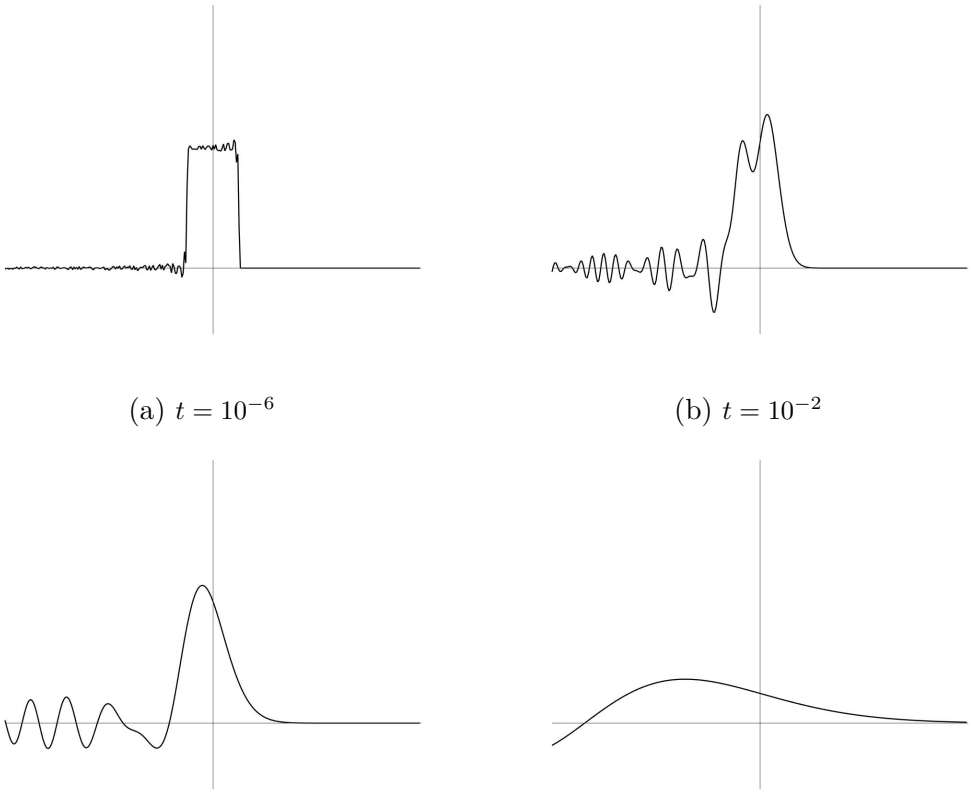
$$u(x,t) = \frac{1}{\pi t^{1/3}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x'\, \phi(x')\,\mathrm{Ai}\left[\frac{x-x'}{(3t)^{1/3}}\right]. \tag{2.11}$$

A fin de mostrar los efectos dispersivos de $u(x,t)$ en (2.11), consideremos como distribución:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{otro caso;} \end{cases} \tag{2.12}$$

la integración de (2.11) se reduce a

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi t^{1/3}}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x'\,\mathrm{Ai}\left[\frac{x-x'}{(3t)^{1/3}}\right],$$



(a) $t = 10^{-6}$ (b) $t = 10^{-2}$

(c) $t = 10^{-1}$ (d) $t = 8$

Figura 2.1 Secuencia de $u(x,t)$ para distintos valores de t, por ahora son cantidades adimensionales. Al inicio de la secuencia $u(x, t \to 0)$ se aproxima a la distribución (2.12). La onda se irá desvaneciendo gradualmente mientras $t \to \infty$. En cada uno de los esquemas el eje de las abscisas corresponde a x y el eje de las ordenadas a $u(x,t)$ con t fijo.

cálculo que puede hacerse numéricamente para los fines de este ejercicio. En la figura 2.1 se muestra una secuencia de $u(x,t)$ para distintos valores de $t > 0$. Se observa que el perfil de onda desvanece conforme se incrementa t.

2.1.2. Efectos No Dispersivos

Retomemos la ecuación (2.5). Su solución se obtiene como se describe enseguida. Supóngase que $u(x,t) = f(x - \phi\, t) = z(\xi)$ es solución a (2.5) bajo la condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$, donde $u_0(x)$ es regular en $-\infty < x < \infty$ y desvanece asintóticamente en los extremos. En el argumento de la función f, ϕ pertenece a la distribución de velocidades a la que se deplaza la onda. Así, sustituyendo $u = f = z$ en (2.5) e integrando

dos veces con respecto a ξ se tiene la siguiente expresión:

$$-\frac{v}{2}z^2 + z^3 + (z_\xi)^2 = a_1 z + a_2$$

donde a_1 y a_2 son las constantes de integración iguales con cero debido a que z, así como sus derivadas, desvanecen cuando $|x| \to \infty$. Agrupando términos, haciendo el cambio de variable $z \to \frac{\phi}{2}\,\mathrm{sech}^2\theta$, e integrando con respecto a θ se llega a

$$\xi = -\left(\frac{4}{\phi}\right)^{1/2} \mathrm{asech}\left(\frac{2z}{\phi}\right)^{1/2}.$$

Finalmente, solucionando para z de la expresión anterior y luego sustituyendo de vuelta $z(\xi) = f(x - \phi\, t) = u(x,t)$ se obtiene la solución a la ecuación de KdV:

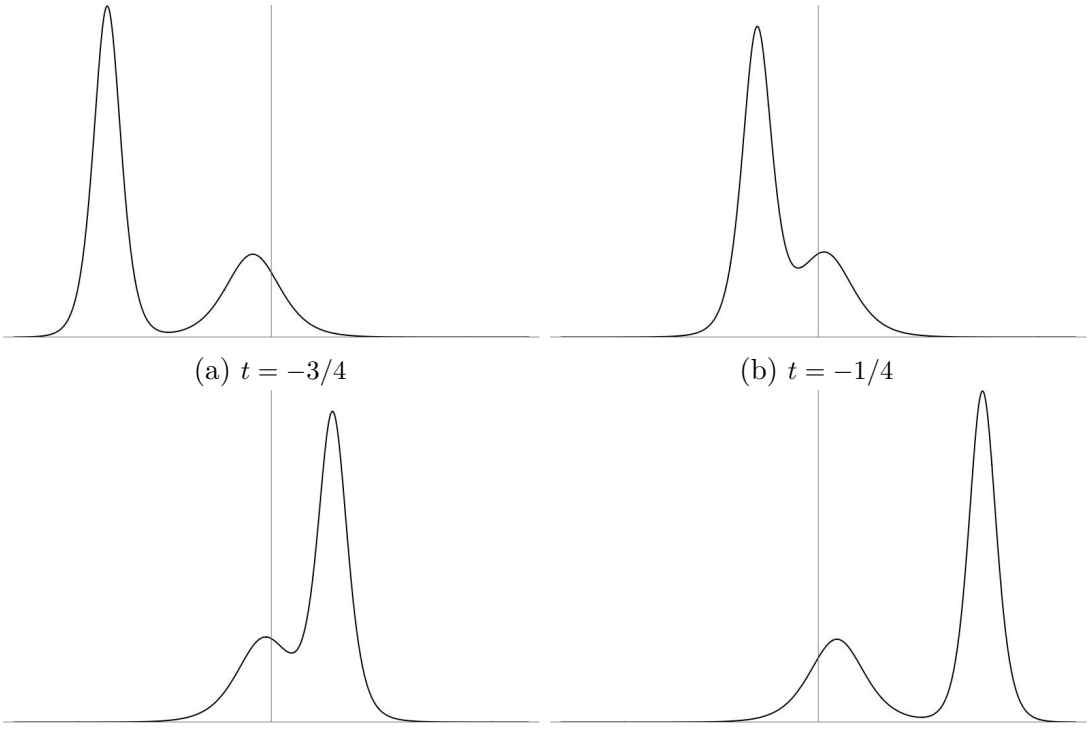
$$u(x,t) = \frac{\phi}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{\phi^{1/2}}{2}(x - \phi\, t)\right]. \tag{2.13}$$

La expresión (2.13) corresponde al famoso solitón de la ecuación de KdV: una onda solitaria cuyo perfil se mantiene invariante frente a la interacción con otros solitones (figura 2.2). Los aspectos que se derivan del término no lineal de la ecuación (2.5) conciernen a la naturaleza no dispersiva de entidades como (2.13). Para examinar las diferencias entre la solución a la ecuación de KdV (2.5) y la solución a la ecuación de KdV lineal (2.6), tomemos nuevamente el procedimiento de la sección anterior, esta vez considerando también la solución (2.13). En la figura 2.3 se muestran los resultados numéricos de estas operaciones. Se observa inmediatamente que al inicio de la secuencia, $t \to 0$, $u(x,t)$ se aproxima a la distribución $\phi(x)$, sin embargo, conforme t crece la onda no desvanece y en cambio se genera un solitón, mismo que continuará su trayecto de manera perenne mientras $t \to \infty$.

Como se verá en la sección 2.4.3, a partir de soluciones para un solitón individual –como el de (2.13)– se pueden generar múltiples solitones, todos y cada uno de ellos con las mismas propiedades que el solitón *semilla*. Tal hecho es muy valioso y fundamental para los objetivos de este trabajo; justamente cuando se consideran soluciones por múltiples solitones es posible verificar que la interacción entre ellos no modifica la estructura de las entidades, en cada caso se adquiere apenas un cambio en el factor de fase. Por ejemplo:

$$u(x,t) = 3\,\frac{4\,\mathrm{csch}^2[2^{1/2}(x-8t)] + \mathrm{sech}^2[2^{-1/2}(x-2t)]}{(-2\coth[2^{1/2}(x-8t)] + \tanh[2^{-1/2}(x-2t)])^2}, \tag{2.14}$$

reproduce dos solitones de la ecuación (2.5), como se muestra en la figura 2.2.



(a) $t = -3/4$ (b) $t = -1/4$

(c) $t = 1/4$ (d) $t = 3/4$

Figura 2.2 Colisión entre dos solitones de la ecuación de KdV. Se puede ver que el perfil de las entidades no se altera y permanece intacto aún después de la colisión. En cada uno de los páneles el parámetro t se expresa en cantidades adimensionales.

2.2. La Transformada Espectral

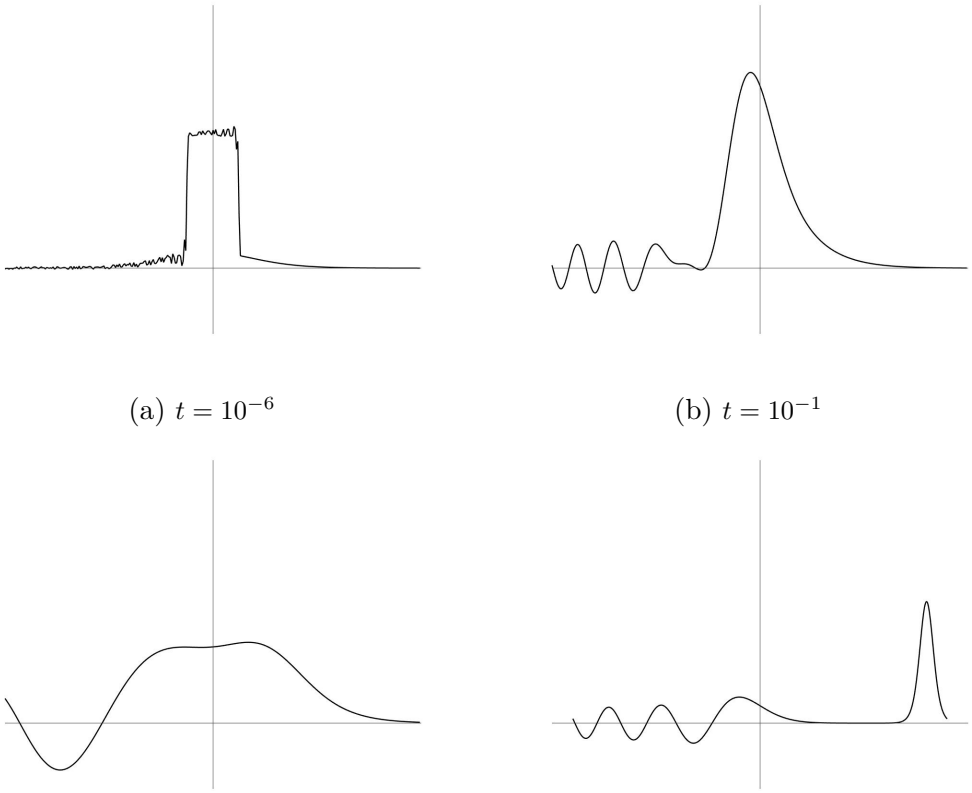
Si bien el procedimiento expuesto en la sección 2.1.2 proveé la solución exacta a (2.5), no es ésta la única manera de resolver el problema evolutivo. Tal procedimiento está completamente supeditado al espacio de configuración generado por x y t. Como se verá en esta sección, es posible trasladar el problema a otros dominios de operación donde inclusive, y en muchos casos, la evolución temporal del sistema se ve favorecida.

En 1967 Gardner *et al.* [8] descubrieron que los valores propios del operador de Schrödinger[2] son integrales de la ecuación de KdV, es decir, que la transformada espectral se puede aplicar como procedimiento para resolver el problema de valor inicial de la ecuación de KdV.

Dada la ecuación de Schrödinger estacionaria:

$$-\psi_{xx}(x,k) + u(x)\psi(x,k) = k^2\psi(x,k), \quad -\infty < x < \infty, \tag{2.15}$$

[2] A saber $-\partial^2/\partial x^2 + u(x)$.



(a) $t = 10^{-6}$ (b) $t = 10^{-1}$

(c) $t = 2$ (d) $t = 40$

Figura 2.3 Se muestra una secuencia de $u(x,t)$ para distintos valores de t en términos adimensionales. A diferencia de la figura 2.1 esta vez en $u(x,t)$ se involucra la información del término no lineal de la ecuación de KdV. Como se puede notar, la introducción de este término proveé de cualidades no dispersivas a la evolución del sistema.

la transformada espectral *extendida* S de una función $u(x)$ se define como la colección de datos:

$$S[u] := \{R(k),\ -\infty < k < \infty;\ p_n,\ q_n,\ n = 1, 2, \ldots, N\}, \tag{2.16}$$

donde k^2 es el valor propio que caracteriza las dos componentes, continua ($k^2 > 0$) y discreta ($k^2 = -p_n^2,\ p_n > 0$), del espectro de Sturm–Liouville asociado a (2.15). Para la parte continua del espectro se consideran las condiciones a la frontera:

$$\begin{aligned} &\psi(x,k) \to T(k)\exp(-ikx), \quad x \to -\infty \\ &\psi(x,k) \to \exp(-ikx) + R(k)\exp(ikx), \quad x \to \infty, \end{aligned} \tag{2.17}$$

siendo $T(k)$ el coeficiente de transmisión y $R(k)$ el coeficiente de reflexión. Mientras tanto, para la parte discreta del espectro, se tiene un número N de soluciones discretas ψ_n a (2.15) sujetas a satisfacer la condición a la frontera:

$$\lim_{x\to\infty} \exp(\, p_n\, x\,)\, \psi_n(x) = 1, \tag{2.18}$$

y son, consecuentemente, normalizables. Así, q_n es un coeficiente que está definido como

$$q_n = \left[\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ |\psi_n(x)|^2 \right]^{-1}, \tag{2.19}$$

es decir, q_n es el coeficiente de normalización.

2.2.1. El Problema Espectral Inverso

Entendiendo que hay una correspondencia unívoca entre una función $u(x)$ y su transformada espectral $S[u]$, *i.e.* que $u(x) \Leftrightarrow S[u]$, nos referimos al *problema espectral directo*, como el algoritmo para encontrar la transformada espectral $S[u]$ dada una función $u(x)$. Si en cambio se tiene una transformada espectral $S[u]$, el algoritmo para encontrar la función $u(x)$ se conoce como *problema espectral inverso*.

En el problema espectral directo los factores q_n no necesariamente corresponden a la información espectral discreta del operador de Schrödinger; las funciones propias ψ pueden o no estar normalizadas y por tanto q_n podría no vincularse directamente con la solución del problema lineal. No obstante, en el problema espectral inverso, cada q_n puede depender tanto del parámetro temporal como de p_n y en tal caso la solución sí depende de este factor. Así, los datos espectrales p_n y q_n ayudan a construir la solución del problema no lineal. De ahí que (2.16) contenga, además de p_n, a q_n, por lo que usamos el calificativo de *extendida*.

Para comenzar con el estudio de este último algoritmo es conveniente introducir una nueva función, dígase $K(x)$, definida como

$$K(x) := \frac{1}{2\pi} \int_D \mathrm{d}k\ \exp(ikx) R(k) + \sum_{1\le n\le N} q_n \exp(-p_n\, x), \tag{2.20}$$

donde se observa que el primer término del lado derecho de la ecuación corresponde con la transformada de Fourier de $R(k)$. También considérese la siguiente ecuación integral:

$$W(x,y) + K(x+y) + \int_x^\infty \mathrm{d}z\ W(x,z) K(z+y) = 0, \quad y > x, \tag{2.21}$$

conocida como la ecuación de Gel'fand–Levitan–Marchenko (GLM) y que, por los límites de la integral en el último término del miembro izquierdo, corresponde a una ecuación de Volterra del segundo tipo (o especie) y determina unívocamente a $W(x, y)$; mientras que K, dada por (2.20), es el *kernel* de la ecuación.

Más aún, las condiciones a la frontera (2.18) pueden ser escritas en términos de las funciones de Jost

$$j^{(\pm)}(x, k) \to \exp(\pm ikx), \quad x \to \infty$$

como

$$\psi(x, k) = T(k)j^{(-)}(x, k) = j^{(+)}(x, -k) + R(k)j^{(+)}(x, k), \tag{2.22}$$

ello significa que la ecuación (2.21) expresa, esencialmente, una relación entre la transformada de Fourier de (2.22) y las funciones de Jost si éstas se definen en términos de una ecuación integral de Volterra como:

$$j^{(\pm)}(x, k) := \exp(\pm ikx) - k^{-1} \int_x^\infty \mathrm{d}y \, \sin[k(x - y)]u(y)j^{(\pm)}(y, k). \tag{2.23}$$

Una vez que se ha obtenido $W(x, y)$, la función $u(x)$ se encuentra por medio de las fórmulas

$$\begin{aligned} w(x) &= 2W(x, x + 0), \\ w(x) &= \int_x^\infty \mathrm{d}y \, u(y), \\ u(x) &= w_x(x). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Aunque, para encontrar una función $u(x)$ real y regular en todo el dominio de x es necesario que $R(k)$ tenga transformada de Fourier. Evidentemente, en el caso del problema espectral directo, es natural preguntarse para qué clase de potenciales existe la transformada espectral. La respuesta es que si $u(x)$:

i es infinitamente diferenciable para todos los valores reales de x,

ii desvanece asintóticamente en los extremos ($x \to \pm\infty$) y sus derivadas decaen suficientemente rápido de manera que las integrales

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \, (1 + |x|) \frac{\mathrm{d}^m u(x)}{\mathrm{d}x^m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

son convergentes, y si

iii es real para todo x real,

entonces la transformada espectral siempre existe. Además, si la función $u(x)$ satisface estas condiciones se dice que es un potencial de *bona fine* (o de buena fe). Una discusión sobre la transformada espectral de aquellas funciones fuera de esta clase de potenciales puede consultarse en [14].

Para concluir con este apartado, considérese la siguiente transformada espectral:

$$S[u] = \{R(k) = 0,\ -\infty < k < \infty;\ N = 1,\ p_1 = p,\ q_1 = q\}, \tag{2.25}$$

por lo que la contribución del primer término del miembro derecho de la ecuación (2.20) se anula y por tanto

$$K(x) = q\ \exp(-p\,x).$$

Consecuentemente el kernel de la ecuación (2.21) es separable y esto nos permite escribir:

$$W(x,y) + q\ \exp[-p\,(x+y)] + q\ \exp(-py)\int_x^\infty \mathrm{d}z\ W(x,z)\ \exp(-p\,z) = 0, \quad y > x,$$

donde la integral es simplemente una función C de x y así lo anterior se reduce a:

$$-\,W(x,y) = q\ \exp[-p\,(x+y)] + q\ \exp(-p\,y)\,C(x), \quad y > x. \tag{2.26}$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por $\exp(-p\,y)$, integrando con respecto a y, y solucionando para $C(x)$:

$$\begin{aligned} C(x) &= -\frac{\int_x^\infty \mathrm{d}y\, q \exp[-p(x+2y)]}{1 + \int_x^\infty \mathrm{d}y\, q \exp[-2py)]}, \quad y > x \\ &= -q\frac{\exp(-px)}{2\exp(2px) + q} \end{aligned}$$

que, sustituyendo de vuelta en (2.26), nos lleva a la solución de (2.21) dada la transformada espectral (2.25), esto es

$$-\,W(x,y) = 2pq\ \frac{\exp[p(x-y)]}{2p\exp(2px) + q}, \quad y > x. \tag{2.27}$$

Si ξ es un punto tal que $q = 2p\exp(2p\xi)$, entonces $\xi = (2p)^{-1}\ln(q/2p)$, usando esto en (2.27), la expresión toma la forma:

$$-W(x,y) = p\exp[\,p(\xi - y)]\,\mathrm{sech}[\,p(x-\xi)];$$

y finalmente, luego de sustituir $-W(x, x+0)$ en las fórmulas (2.24), se obtiene la función (o el potencial) $u(x)$ que satisface (2.25):

$$u(x) = 2p^2 \mathrm{sech}^2[\, p(x-\xi)] \tag{2.28}$$

así, el problema espectral inverso queda resuelto.

2.2.2. Método de Solución

En la sección anterior se introdujo la transformada espectral S de una cierta función $u(x)$. Si ahora $u := u(x,t)$, entonces se puede inferir que existe una transformada espectral evolutiva $S := S(t)$ que mantiene una relación unívoca con $u(x,t)$, *i.e.* que $u(x,t) \Leftrightarrow S(t)$.

El método empleado en la sección 2.1.2 para dar solución a (2.5) aborda el problema evolutivo en el espacio de configuración generado por x y t. Sin embargo, lo anterior se puede trasladar al dominio espectral por medio del problema espectral directo, propagar la evolución en ese espacio y finalmente resolver el problema espectral inverso deparando en la solución $u(x,t)$, *cfr.* figura 2.4. Aparentemente este último procedimiento es más complicado debido a las etapas por las que hay que atravesar a diferencia de la integración directa de la ecuación. No obstante, en ocasiones resolver el problema en el espacio de configuración exige de un esfuerzo más arduo que el requerido en el dominio espectral. Todavía más, esta técnica goza de cierta conexión con otras *imágenes* del mismo problema, como se examina en el anexo B.

Las ecuaciones evolutivas no lineales más simples de resolver por la técnica de la transformada espectral son las definidas por la clase (2.1). Para todas ellas se cumple que la evolución temporal de la transformada espectral $S(t)$ de $u(x,t)$ está dada por el conjunto de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\begin{aligned} R_t(k,t) &= i2k\,\alpha(-4k^2)R(k,t), \\ p_{n,t}(t) &= 0, \\ q_{n,t}(t) &= -2p_n\,\alpha(4p_n^2)\,q_n(t), \end{aligned} \tag{2.29}$$

con $n = 1, 2, \ldots, N$. La solución explícita a cada una de estas ecuaciones es, respectivamente:

$$\begin{aligned} R(k,t) &= R(k,0)\exp[\, i2k\,\alpha(-4k^2)\,t], \\ p_n(t) &= p_n(0) = p_n, \\ q_n(t) &= q_n(0)\exp[-2p_n\,\alpha(4p_n^2)\,t]. \end{aligned} \tag{2.30}$$

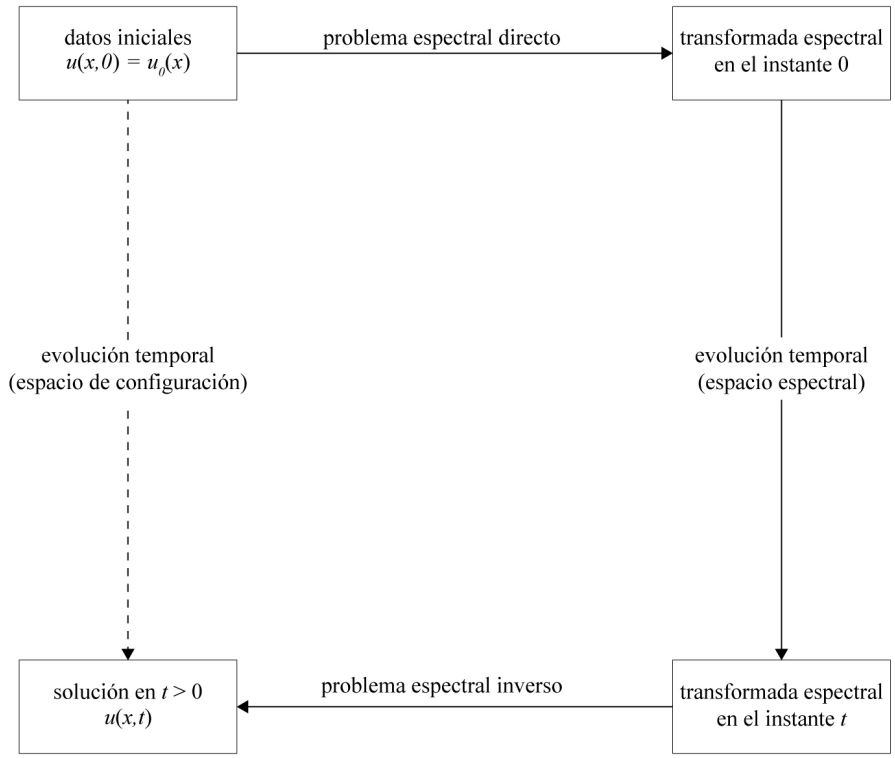


Figura 2.4 Dos métodos de solución para una ecuación evolutiva no lineal. En el brazo izquierdo, la evolución temporal se realiza en el espacio de configuración; este procedimiento es prácticamente heurístico. En el brazo derecho, la evolución temporal se desarrolla en el dominio del espectro. Se puede advertir la analogía que existe con la transformada de Fourier.

Cabe resaltar que los valores propios p_n del operador de Schrödinger permanecen constantes (en forma y número) mientras $u(x,t)$ evoluciona en el tiempo, como se observa en (2.30), esto quiere decir que tal operador de Schrödinger producirá una evolución temporal isoespectral si y sólo si $u(x,t)$ satisface (2.1). La investigación de funciones $u(x,t)$ que no corresponden con la clase (2.1) queda fuera del alcance de este trabajo.

Manifiestamente, el algoritmo para resolver el problema del valor inicial para la clase de ecuaciones no lineales en (2.1) consiste en tres pasos:

1. Al tiempo inicial $t = t_0 = 0$, $u(x,0) := u_0(x)$, evaluar el problema espectral directo para obtener la transformada espectral en ese instante

$$S(0) = \{R(k,0),\ -\infty < k < \infty;\ p_n,\ q_n(0),\ n = 1,\ldots,N\}.$$

2. A su vez, la transformada espectral al tiempo t

$$S(t) = \{R(k,t),\ -\infty < k < \infty;\ p_n,\ q_n(t),\ n = 1, \ldots, N\}.$$

se obtiene por medio de (2.30).

3. La solución $u(x,t)$ se recupera por medio del problema espectral inverso, como se describió en la sección 2.2.1.

Estudiemos el caso simple para el cual la transformada espectral tiene un coeficiente de reflexión $R(k,t)$ que desvanece para todo tiempo t y un sólo valor propio $p_1 = p$; al tiempo inicial $t = 0$, esto es:

$$S(0) = \{R(k,0) = 0,\ -\infty < k < \infty;\ p_1 = p,\ q_1(0) = q(0) = q_0\}, \tag{2.31}$$

y, de acuerdo con (2.28), la condición inicial es

$$u(x,0) = 2p^2 \mathrm{sech}^2[\,p(x - \xi_0)], \tag{2.32}$$

donde $\xi_0 = (2p)^{-1} \ln(q_0/2p)$. Enseguida, la evolución temporal en el dominio discreto está dada por las fórmulas (2.30), de esto resulta la transformada espectral al tiempo t:

$$S(t) = \{R(k,0) = 0,\ -\infty < k < \infty;\ p,\ q(t) = q_0 \exp[-2p\,\alpha(4p^2)\,t]\}, \tag{2.33}$$

análogamente a (2.32), la solución $u(x,t)$ es:

$$u(x,t) = 2p^2 \mathrm{sech}^2[\,p(x - \xi(t))], \tag{2.34}$$

donde $\xi(t) = (2p)^{-1} \ln[q(t)/2p] = \xi_0 + vt$, con $v = -\alpha(4p^2)$. Nótese que (2.13) posee la forma de la solución general (2.34), recordando que $k^2 = -p^2$.

De lo anterior, resalta que (2.34) se escribe en términos de los valores propios $p_n \in \mathbb{R}$ del operador de Schrödinger. Dicha expresión es un solitón individual de la ecuación (2.5) y, como ya se atendió en la sección 2.1.2, $u(x,t)$ describe el tránsito de una onda de perfil constante a lo largo de un canal rectangular, hecho que señala implícitamente su carácter no dispersivo. Asimismo, es posible generar soluciones con múltiples solitones a partir del algoritmo descrito previamente, en tal caso, en vez de considerar $N = 1$ se eligen $N > 1$ valores propios. En este caso resolver la ecuación de GLM no siempre es accesible y en su lugar se pueden atender procedimientos alternos, como se discutirá en la sección 2.4.

La ecuación de KdV es sólo una de varias ecuaciones que pertenencen a la clase de ecuaciones evolutivas no lineales (2.1), mismas que automáticamente admiten una solución cerrada mediante la transformada espectral o mediante las técnicas que se describen en la siguiente sección. En el anexo A se pueden encontrar otras ecuaciones que son integrables mediante estas técnicas o alguna extensión de ellas –y que no necesariamente satisfacen la clase (2.1).

2.3. Técnicas Algebraicas

La transformada espectral constituye en sí misma una de las posibles ampliaciones hacia el ámbito no lineal de la transformada de Fourier. El método de solución a través de esta técnica consiste en llevar el problema evolutivo del espacio de configuración al espacio del espectro, ida y vuelta. Sin embargo, la búsqueda de soluciones también se puede emprender a partir de un tratamiendo en términos de operadores diferenciales e integrales. Esto traslada el ejercicio al ámbito algebraico, mismo que habilita la representación lineal del sistema –sin que ello implique suprimir las propieades intrínsecas de la ecuación no lineal. En este contexto destacan varias técnicas como: la de Hamilton–Jacobi, la de Hirota, la de simetrías y grupos de Lie y las de soluciones por determinantes (Wronskianos, Grammianos, Casoratianos) entre otras. Aunque nosotros nos concentramos en las técnicas de solución por determinantes a través del método AKNS [15], primero nos gustaría mencionar la idea del método de Lax en términos de álgebras de Lie [9].

El programa de Lax consiste en hallar una representación lineal equivalente al sistema en cuestión y a partir de aquí obtener las simetrías que conducen a las condiciones de integrabilidad. *E.g.* considerando nuevamente la clase de ecuaciones no lineales (2.1) con $\alpha(\zeta) = \zeta$ (*cfr.* sección 2.1), la ecuación de KdV se escribe en la forma:

$$\mathbf{H}_t = [\mathbf{M}, \mathbf{H}], \tag{2.35}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &:= \mathbf{H}(x,t) = -\mathbf{D}^2 + \mathbf{u}, \\ \mathbf{M} &:= \mathbf{M}(x,t) = -4\mathbf{D}^3 + 6\mathbf{u}\mathbf{D} + 3\mathbf{u}_x, \end{aligned} \tag{2.36}$$

siendo $\mathbf{D} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ (un operador diferencial) y $\mathbf{u}$ un operador (puramente multiplicativo) cuya acción sobre una función de prueba $f := f(x)$ se define como $\mathbf{u}f(x) := u(x,t)f(x)$. En lo sucesivo se omiten las dependencias tanto en los operadores como en las funciones, por simplicidad en la escritura.

N.B. que $\mathbf{H}$, así definido en (2.36), es el operador de Schrödinger. Por lo tanto se garantiza que la evolución bajo *la imagen de Lax* es isoespectral –tal y como sucede para el conjunto de ecuaciones (2.29)– si y sólo si $u(x,t) \sim \mathbf{u}$ es cuando menos un potencial de *bona fide*. Más aún, debido a que tanto $\mathbf{H}$ como $\mathbf{M}$ son operadores puramente diferenciales se asegura la localidad de la ecuación (2.35) en estricto apego a (2.5).

En cambio, la técnica de AKNS se derivó de un programa aparentemente distinto, en concreto, luego de notar que la ecuación de KdV guarda la condición de integrabilidad $\psi_{xxt}(x,k,t) = \psi_{txx}(x,k,t)$ que satisface el siguiente par de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} \psi_{xx} &= [u - k^2]\psi, \\ \psi_t &= [-u_x + i4k^3]\psi + 2[u + 2k^2]\psi_x. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Es decir, bajo *la imagen de AKNS* se prescribe que para cada una de las ecuaciones de la clase (2.1) generalizada[3]

$$\beta(\mathbf{\Lambda}, t)u_t(x,t) = \alpha(\mathbf{\Lambda}, t)u_x(x,t), \tag{2.38}$$

la condición de integrabilidad $\psi_{xt} = \psi_{tx}$ se satisface para todo par de ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{aligned} \psi_{xx} &= [u - k^2]\psi, \\ \psi_t &= a\psi + b\psi_x, \end{aligned} \tag{2.39}$$

donde $a := a(x,k,t)$ y $b := b(x,k,t)$ son funciones (*ansatz*) a determinar. Este hecho nos lleva a estudiar el método de solución del apartado 2.3.2 lo que requiere examinar en primera instancia las

2.3.1. Leyes de Conservación

De acuerdo con (2.39) para toda ecuación evolutiva de la clase (generalizada) (2.38) existe un par de ecuaciones lineales acopladas de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(1)}\psi &= \mathbf{U}\psi \\ \mathbf{D}^{(2)}\psi &= \mathbf{V}\psi, \end{aligned} \tag{2.40}$$

donde $\mathbf{D}^{(1)}$ y $\mathbf{D}^{(2)}$ (cuyos súper índices son únicamente etiquetas para distinguir entre ambos) son dos operadores puramente diferenciales que satisfacen la relación de conmu-

[3]Consultar el anexo B.

tación $[\mathbf{D}^{(1)}, \mathbf{D}^{(2)}] = 0$ y, $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son matrices de dimensión $N \times N$, por consiguiente la condición de integrabilidad se lee

$$\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{U} - \mathbf{D}^{(1)}\mathbf{V} = [\mathbf{V}, \mathbf{U}].$$

El objetivo principal es encontrar la solución $u \to u_n := u_n(x + x_0, t)$ al problema de valor inicial, haciendo hincapié en que u_n debe ser un potencial de *bona fide* para todo t y para cada n–ésimo elemento del espectro AKNS. Esta condición ya debe entenderse tácitamente. Con ello, de (2.40), la integración del sistema queda sujeta a satisfacer una relación tipo $(\mathbf{U}\Psi)_t = (\mathbf{V}\Psi)_x$ (en esta expresión Ψ es una matriz $N \times N$–dimensional) que, por asociación con los coeficientes, lleva a introducir la siguiente ley de conservación local:

$$\tau_{n,t} + u_{n,x} = 0. \tag{2.41}$$

Por simplicidad aquí nos restringimos al caso $N = 2$, de este modo las matrices $\mathbf{U}$,$\mathbf{V}$ y Ψ se tienen las entradas:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}.$$

Con base en esta simbología y atendiendo la condición de integrabilidad se obtiene

$$\begin{pmatrix} U_{11}\Psi_{11} + U_{12}\Psi_{21} & U_{11}\Psi_{12} + U_{12}\Psi_{22} \\ U_{21}\Psi_{11} + U_{22}\Psi_{21} & U_{21}\Psi_{12} + U_{22}\Psi_{22} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} V_{11}\Psi_{11} + V_{12}\Psi_{21} & V_{11}\Psi_{12} + V_{12}\Psi_{22} \\ V_{21}\Psi_{11} + V_{22}\Psi_{21} & V_{21}\Psi_{12} + V_{22}\Psi_{22} \end{pmatrix}_x, \tag{2.42}$$

o en su lugar, si por economía nos limitamos a los 21–elementos:

$$(U_{21}\Psi_{11} + U_{22}\Psi_{21})_t = (V_{21}\Psi_{11} + V_{22}\Psi_{21})_x.$$

Bajo la abreviación $\varphi := \Psi_{11}/\Psi_{21}$ esta última línea equivale a

$$\Psi_{21}(U_{21}\varphi + U_{22})_t + \Psi_{21,t}(U_{21}\varphi + U_{22}) = \Psi_{21}(V_{21}\varphi + V_{22})_x + \Psi_{21,x}(V_{21}\varphi + V_{22}), \tag{2.43}$$

por lo tanto, si se han de satisfacer el par (2.40) y la ley (2.41), la igualdad

$$(U_{21}\varphi + U_{22})_t = (V_{21}\varphi + V_{22})_x \tag{2.44}$$

es lícita si de manera adicional se definen las relaciones

$$\Psi_{21,t} := \Psi_{21}(V_{21}\varphi + V_{22}), \qquad \Psi_{21,x} := \Psi_{21}(U_{21}\varphi + U_{22}), \tag{2.45}$$

a partir de (2.43) y entendiendo (de antemano) que $\mathbf{D}^{(1)} := \frac{\partial}{\partial x}$ y $\mathbf{D}^{(2)} := \frac{\partial}{\partial t}$.

Por otro lado, dado que $\varphi = \varphi(x, k, t)$, de la condición de integrabilidad (2.42) y apoyándose de las relaciones (2.45) se obtiene el sistema de Riccati

$$\begin{aligned} \varphi_x &= U_{12} + (U_{11} - U_{22})\varphi - U_{21}\varphi^2 \\ \varphi_t &= V_{12} + (V_{11} - V_{22})\varphi - V_{21}\varphi^2. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Ahora, considérense las matrices $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ de la clase AKNS

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix} + ik \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

donde A, B, C, λ y μ son funciones, cuando menos, de clase C^2 que dependen de x, k y t. Entonces, la condición de integrabilidad $\Psi_{xt} = \Psi_{tx}$, o bien $\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{U} - \mathbf{D}^{(2)}\mathbf{V} = [\mathbf{V}, \mathbf{U}]$, se lee

$$\begin{pmatrix} -A_x & \lambda_t - B_x \\ \mu_t - C_x & A_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda C - \mu B & -2A \\ 2A & \mu B - \lambda C \end{pmatrix} + i2k \begin{pmatrix} 0 & -B \\ C & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.48}$$

En este sentido, la ecuación (2.44) toma la forma

$$(\mu\varphi)_t = (C\varphi - A)_x, \tag{2.49}$$

entretanto, el sistema de Riccati (2.46) se reescribe como

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \lambda - i2k\varphi - \mu\varphi^2 \\ \varphi_t &= B + 2A\varphi - C\varphi^2. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Dedicando atención únicamente a la primera de las ecuaciones de este sistema, las soluciones pueden ser encontradas mediante el método de Frobenius, para lo cual se propone que φ sea

$$\varphi := \sum_{1 \leq n < \infty} \frac{\gamma_n(x,t)}{(i2k)^n}, \tag{2.51}$$

con $\gamma_1 := \lambda$ y $\gamma_2 := -\lambda_x$, obteniendo así la relación de recursividad:

$$\gamma_{n+1} = -\gamma_{n,x} - \mu \sum_{1 \leq m \leq n-1} \gamma_m \gamma_{n-m}, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{2.52}$$

ínterin, insertando la expansión (2.51) en (2.49) y comparando coeficientes, a la parte temporal de (2.41) le corresponde

$$\tau_n = \mu \gamma_n. \tag{2.53}$$

Por lo tanto, basta encontrar de manera sucesiva las soluciones al sistema de Riccati para identificar uno a uno los elementos que cumplen la ley (2.41) tomando en cuenta que, para la parte temporal, se tiene la solución inducida $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \tau_n(x,t)$. Estas son las leyes de conservación que se deben satisfacer o, en otras palabras, las condiciones de integrabilidad del sistema en cuestión.

2.3.2. Método de Solución

De la ley (2.41) se deduce que la solución al problema del valor inicial tiene la forma $\Psi = \mathbf{T}\Psi_0$, por lo tanto las matrices $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ obedecen la transformación

$$\mathbf{U} = \Psi_x \Psi^{-1} = \mathbf{T}_x \mathbf{T}^{-1} + \mathbf{T}\mathbf{U}_0 \mathbf{T}^{-1}$$
$$\mathbf{V} = \Psi_t \Psi^{-1} = \mathbf{T}_t \mathbf{T}^{-1} + \mathbf{T}\mathbf{V}_0 \mathbf{T}^{-1},$$

conduciendo de manera inmediata a las relaciones $\mathbf{U}\mathbf{T} = \mathbf{T}_x + \mathbf{T}\mathbf{U}_0$ y $\mathbf{V}\mathbf{T} = \mathbf{T}_t + \mathbf{T}\mathbf{V}_0$, donde $\mathbf{T}$ es en general una matriz $N \times N$–dimensional (en nuestro caso 2×2) y donde

$$\mathbf{U}_0 := \begin{pmatrix} 0 & \lambda_0 \\ \mu_0 & 0 \end{pmatrix} + ik \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{V}_0 := \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & -A_0 \end{pmatrix}$$

(entendiendo que la notación del tipo λ_0 indica la abreviación del símbolo $\lambda(x,0)$ y etcétera), es decir, para $\lambda(x,t)$ y $\mu(x,t)$ existen, análogamente, expresiones tipo

$$\lambda = \lambda_0 + i2Q(\hat{a}_{nm}, a_{nm})$$
$$\mu = \mu_0 - i2Q(\hat{b}_{nm}, b_{nm})$$

donde $Q(\hat{a}_{nm}, a_{nm})$ y $Q(\hat{b}_{nm}, b_{nm})$ son cocientes que se obtienen con ayuda de la regla de Cramer [16]

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + i2\,\frac{\hat{a}_{nm}}{a_{nm}}, \\ \mu &= \mu_0 - i2\,\frac{\hat{b}_{nm}}{b_{nm}}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Las matrices (a_{nm}), $(\hat{a}_{nm})$, (b_{nm}) y $(\hat{b}_{nm})$ son $2N \times 2N$–dimensionales. Sus entradas se obtienen mediante las fórmulas

$$\begin{gathered} a_{n1} = 1, \quad a_{n2} = \vartheta_n, \quad a_{n(m+2)} = k_n a_{nm}, \\ \hat{a}_{nm} = \begin{cases} a_{nm}, & m < 2N, \\ k_N^N, & m = 2N, \end{cases} \end{gathered} \tag{2.55}$$

(para (b_{nm}) y $(\hat{b}_{nm})$ de manera semejante) mismas que satisfacen (2.50) para todo n–ésimo elemento del sistema de Riccati

$$\begin{aligned} \varphi_{n,x} &= \lambda_0 - i2k_n\varphi_n - \mu_0\varphi_n^2 \\ \varphi_{n,t} &= B_0 + 2A_0\varphi_n - C_0\varphi_n^2 \end{aligned}$$

donde

$$\varphi_n := \frac{1}{\vartheta_n} = \frac{\Psi_{11}(x, k_n, 0) - b_n\Psi_{12}(x, k_n, 0)}{\Psi_{21}(x, k_n, 0) - b_n\Psi_{22}(x, k_n, 0)} = p_n(1 + \gamma_n) \tag{2.56}$$

identificando a $k_n^2 := -p_n^2$, $p_n > 0$ y a

$$\gamma_n := \begin{cases} \coth(p_n x - 4p_n^3 t - \aleph_n) & n \text{ par} \\ \tanh(p_n x - 4p_n^3 t - \aleph_n) & n \text{ impar}, \end{cases} \tag{2.57}$$

con $\aleph_n$ las constantes de integración.

Para ilustrar este procedimiento, estudiemos el siguiente caso concreto. Considérese el conjunto de datos:

$$\begin{aligned} A &= -\lambda_x + i2(\lambda k - 2k^3) \\ B &= 4\lambda k^2 - \lambda_{xx} - 2\lambda^2 + i2\lambda_x k \\ C &= 2\lambda - 4k^2 \\ \mu &= -1 \\ \lambda &= u \end{aligned}$$

notando que si esta información se sustituye en (2.48) se recupera la ecuación de KdV en la representación (2.37). Por lo tanto, el conjunto anterior corresponde a la colección de datos de la clase AKNS[4] que caracterizan la ecuación de KdV.

Siguiendo este equema, las matrices en (2.47) toman la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + ik \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} -\lambda_x & -\lambda_{xx} - 2\lambda^2 \\ 2\lambda & \lambda_x \end{pmatrix} + i2k \begin{pmatrix} \lambda & \lambda_x \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} + 4k^2 \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + i4k^3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.58}$$

o bien, para reducir la escritura:

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &:= \mathbf{M} + k\mathbf{N} \\ \mathbf{V} &:= \mathbf{O} + k\mathbf{P} + k^2\mathbf{Q} + k^3\mathbf{R},\end{aligned} \tag{2.59}$$

obsérvese que $\mathbf{M} = 4\mathbf{Q}$ y $\mathbf{N} = 4\mathbf{R}$; además $\mathbf{U}_t - \mathbf{V}_x = [\mathbf{V}, \mathbf{U}]$ es la condición de integrabilidad sujeta a la ley de conservación

$$\varphi_{n,t} = [(2\lambda - 4k_n^2)\varphi_n + \lambda_x - i2(\lambda k_n - 2k_n^3)]_x, \tag{2.60}$$

donde φ_n está dado por (2.56).

Para que este sistema sea integrable se deben satisfacer simultáneamente, la ley (2.60) y cada una de las n–ésimas condiciones de integrabilidad dadas por (2.37), esto es:

$$\begin{aligned}\psi_{n,xx} &= [u_n - k_n^2]\psi, \\ \psi_{n,t} &= [-u_{n,x} + i4k_n^3]\psi + 2[u_n + 2k_n^2]\psi_{n,x}\end{aligned}$$

recalcando que $n = 1, 2, \ldots, N$. De acuerdo con (2.57), para este problema se conocen tres tipos de funciones propias clasificadas de acuerdo al valor propio k:

k_n	ψ_n
< 0	$A_n \cosh(p_n x - 4p_n^3 t) + B_n \sinh(p_n x - 4p_n^3 t)$, $p_n = (-k_n)^{1/2}$
$= 0$	$A_n x + B_n$
> 0	$A_n \sin(p_n x + 4p_n^3 t) + B_n \cos(p_n x + 4p_n^3 t)$, $p_n = (k_n)^{1/2}$

[4]Consultar el anexo A, donde se presentan algunos conjuntos tipo $\{A, B, C, r, s\}$ que caracterizan otras ecuaciones de la clase (2.1).

con A_n y B_n constantes a determinar apegándose a las condiciones iniciales y a las condiciones a la frontera.

Si nos ceñimos al caso de un solitón (N=1), luego de hacer las debidas sustituciones en (2.54), finalmente se obtiene

$$u = \lambda = -2p^2(\gamma^2 - 1) = 2p^2\text{sech}^2[p(x - 4p^2t) + \aleph] \tag{2.61}$$

en acuerdo con (2.13) y (2.34).

Como se mencionó al inicio de esta sección, existen diversas técnicas algebraicas para solucionar problemas evolutivos no lineales. Entre otras: la imagen de Lax, que se centra en los cambios infinitesimales del operador en cuestión –*cfr.* (2.35) y (2.36) cuya solución podría escribirse en términos del espectro de Floquet–; y la imagen de AKNS, que se centra en la evolución de la función propia, tal y como se estudió en los apartados previos. Estas dos técnicas, pueden ser extendidas al contexto de Bruschi–Ragnisco [11], donde se cubre un aspecto aún más general en términos de diferencias finitas.

2.4. Geometría de Solitones

Hasta antes del descubrimiento de Seeger *et al.* [2], el concepto de *onda solitaria* carecía de las propiedades hoy adjudicadas a los solitones –tales como los aspectos estudiados en la sección 2.1. La teoría se restringía al estudio de los sistemas que modelaban este tipo de ondas y a sus soluciones. No obstante, el resurgimiento de las transformadas de Bäcklund y de Darboux[5], que por más de medio siglo permanecieron prácticamente inadvertidas, inició una nueva línea de investigación. A partir de estas dos técnicas es posible generar soluciones a sistemas evolutivos no lineales por múltiples solitones, tal y como sucedería para $N > 1$ por medio de (2.16) o por medio de (2.54).

En este capítulo estudiamos la generación de soluciones por múltiples solitones y su relación con la geometría diferencial clásica. Para ello presentamos el sistema de Gauss–Weingarten y el sistema de Bianchi, de donde se extrae la información necesaria para generar y parametrizar múltiples superficies hiperbólicas, respectivamente.

Tomamos como ejemplo la ecuación de Bour (que se obtiene del sistema de Bianchi) y ejemplificamos la transformada de Bäcklund y el teorema de permutación de Bianchi para generar múltiples solitones. Finalmente generamos superficies *pseudo esféricas* por medio de solitones estacionarios de esta misma ecuación.

Bajo la definición de Beltrami, las pseudo esferas son superficies hiperbólicas con una curvatura constante y menor a cero. Estas superficies pueden ser generadas a partir de ecuaciones hiperbólicas (como la de Bour o la de KdV[6]).

Por el momento nos limitamos a estudiar ecuaciones hiperbólicas y superficies pseudo esféricas. De manera análoga, es posible generar superficies parabólicas y elípticas[7], sin embargo, la literatura no es tan amplia como en el caso de las superficies hiperbólicas cuya relación además es estrecha con la geometría no Euclideana de Bolyai–Lobachevsky.

[5]En este trabajo no abordamos la transformada de Darboux, sin embargo, el lector interesado puede consultar [17].

[6]O bien, ecuaciones como la de Bour o la de KdV pueden ser obtenidas de la parametrización de superficies hiperbólicas con curvatura negativa.

[7]Un caso elíptico es el siguiente. En 1978 Harrison [18] derivó la transformada de Bäcklund para la ecuación de Ernst, que es una ecuación evolutiva no lineal del tipo elíptico. Esta ecuación es el caso especial de las ecuaciones de campo de Einstein para una simetría axial. La aplicación individual (N=1) de *la transformada de Harrison* produce soluciones de Schwarschild en el contexto de Papapetrou, mientras que la aplicación sucesiva de $N > 1$ transformaciones con una solución semilla de Kerr en la métrica de Newman–Unti–Tamburino (NUT), lleva a la generación de $N > 1$ campos de Kerr–NUT, en otras palabras, $N > 1$ agujeros negros solitónicos [19].

2.4.1. El Sistema de Bianchi

A continuación presentamos el sistema de Gauss–Weingarten y el sistema de Bianchi. El primero de ellos proveé la información necesaria para generar múltiples superficies hiperbólicas a partir de una superficie inicial o *semilla*. Mientras que el segundo de ellos codifica la parametrización de las superficies hiperbólicas en términos de sus coordenadas asintóticas. Como resultado adicional, obtenemos la ecuación de Bour, que proviene del sistema de Bianchi cuando la curvatura es considerada constante.

Sea σ una superficie arbitraria en $\mathbb{R}^3$, cualquier punto P sobre esta superficie se representa mediante el vector $\mathbf{r} := \mathbf{r}(x,t)$. Los vectores $\mathbf{r}_x$ y $\mathbf{r}_t$ son tangentes a σ en P y, en ese mismo punto, en el cual ambos son linealmente independientes, $\mathbf{N} := \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_t / |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_t|$ define el vector normal a σ.

Las primeras dos formas fundamentales de σ son

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= E\mathrm{d}x^2 + 2F\mathrm{d}x\mathrm{d}t + G\mathrm{d}t^2, \\ -\mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{N} &= e\mathrm{d}x^2 + 2f\mathrm{d}x\mathrm{d}t + g\mathrm{d}t^2, \end{aligned} \tag{2.62}$$

con las abreviaciones

$$\begin{gathered} E := \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_x, \quad F := \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_t, \quad G := \mathbf{r}_t \cdot \mathbf{r}_t, \\ e := -\mathbf{r}_x \cdot \mathbf{N}_x = \mathbf{r}_{xx} \cdot \mathbf{N}, \quad f := -\mathbf{r}_x \cdot \mathbf{N}_t = \mathbf{r}_{xt} \cdot \mathbf{N}, \quad g := -\mathbf{r}_t \cdot \mathbf{N}_t = \mathbf{r}_{tt} \cdot \mathbf{N}, \\ H := |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_t| = \sqrt{EG - F^2}. \end{gathered} \tag{2.63}$$

Las correspondientes ecuaciones de Gauss para σ son [20]:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{xx} &= \Gamma^1_{11}\mathbf{r}_x + \Gamma^2_{11}\mathbf{r}_t + e\mathbf{N}, \\ \mathbf{r}_{xt} &= \Gamma^1_{12}\mathbf{r}_x + \Gamma^2_{12}\mathbf{r}_t + f\mathbf{N}, \\ \mathbf{r}_{tt} &= \Gamma^1_{22}\mathbf{r}_x + \Gamma^2_{22}\mathbf{r}_t + g\mathbf{N}, \end{aligned} \tag{2.64}$$

con Γ^i_{jk} los símbolos de Christoffel, conocidos de las relaciones

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{g^{il}}{2}(g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}).$$

Adjunto al sistema de Gauss (2.64), las ecuaciones de Weingarten para σ son:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_x &= \frac{fF - eG}{H^2}\mathbf{r}_x + \frac{eF - fE}{H^2}\mathbf{r}_t, \\ \mathbf{N}_t &= \frac{gF - fG}{H^2}\mathbf{r}_x + \frac{fF - gE}{H^2}\mathbf{r}_t. \end{aligned} \tag{2.65}$$

La conexión entre la geometría diferencial clásica y la teoría *moderna* de solitones radica esencialmente en el sistema de Gauss–Weingarten, (2.64)–(2.65).

Si se exigen las condiciones $(\mathbf{r}_{xx})_t = (\mathbf{r}_{xt})_x = (\mathbf{r}_{xx})_t$, del sistema lineal de Gauss (2.64) se produce el sistema no lineal de Mainardi–Codazzi:

$$\begin{aligned} e_t - f_x &= e\Gamma^1_{12} + f(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) - g\Gamma^2_{11}, \\ f_t - g_x &= e\Gamma^1_{22} + f(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - g\Gamma^2_{12}, \end{aligned} \tag{2.66}$$

de donde se obtiene la curvatura total Gaussiana κ en la representación de Liouville:

$$\kappa = \frac{1}{H}\left[\left(\frac{H}{E}\Gamma^2_{11}\right)_t - \left(\frac{H}{E}\Gamma^2_{12}\right)_x\right]. \tag{2.67}$$

Por otro lado, suponiendo que σ es una superficie hiperbólica, entonces las líneas asintóticas en σ pueden ser tomadas como curvas paramétricas, de este modo $e = g = 0$ y en consecuencia $\kappa < 0$ [21]. Todavía más, dado que $H \in \mathbb{R}$, necesariamente $E, G > 0$ y $EG > F^2$.

Como resultado, si $u := u(x,t)$ es el ángulo subtendido entre las curvas paramétricas, entonces se satisfacen las relaciones básicas

$$\cos u = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin u = \frac{H}{\sqrt{EG}}.$$

Por todo lo anterior, el sistema de Mainardi–Codazzi (2.66) se reduce a:

$$\begin{aligned} a_t + \frac{1}{2}\frac{\rho_t}{\rho}a - \frac{1}{2}\frac{\rho_x}{\rho}b\cos u = 0, \\ b_x + \frac{1}{2}\frac{\rho_x}{\rho}b - \frac{1}{2}\frac{\rho_t}{\rho}a\sin u = 0, \end{aligned} \tag{2.68}$$

donde se ha hecho la sustitución $\kappa \to -1/\rho^2$, con $\rho := \rho(x,t)$ una función real y positiva, y donde $a := a(x,t)$ y $b := b(x,t)$ son dos funciones arbitrarias tal que $E = \rho^2 a^2$ y $G = \rho^2 b^2$.

Del mismo modo, para la representación (2.67):

$$u_{xt} + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_x}{\rho}\frac{b}{a}\sin u\right)_x + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_t}{\rho}\frac{a}{b}\sin u\right)_t - ab\,\sin u = 0. \tag{2.69}$$

Las expresiones (2.68)–(2.69) conforman el *sistema de Bianchi*. Cuando ρ es constante, σ es una superficie *pseudo esférica*. En consecuencia, de las ecuaciones de Mainardi–Codazzi (2.68), $a = a(x)$ y $b = b(t)$. Si σ se parametriza por la longitud de arco a lo largo

de las líneas asintóticas ($\mathrm{d}x \to \mathrm{d}x' = \sqrt{E(x)}\,\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}t \to \mathrm{d}t' = \sqrt{G(t)}\,\mathrm{d}t$), por lo que las formas fundamentales (2.62) son:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \mathrm{d}x^2 + 2\cos u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}t^2, \\ -\mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{N} &= \frac{2}{\rho}\sin u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{2.70}$$

y por lo tanto (2.69) se acorta a:

$$u_{xt} - \frac{1}{\rho^2}\sin u = 0, \tag{2.71}$$

que es la ecuación derivada por Bour en 1862 y misma que se halla comprendida en la clase (2.1).

2.4.2. La Transformada de Bäcklund

Supongamos que inicialmente se toma un punto P de una superficie pseudo esférica σ y se traza un segmento de línea PP' tangente a σ en P y de longitud constante. Si el lugar geométrico de todos los puntos P' trazados a partir de P en σ constituye otra superficie σ' de curvatura total igual a la de σ, se dice que σ y σ' están relacionadas por una transformada de Bäcklund $\mathbb{B}_\beta$, donde $\beta := \tan\zeta/2$ es el parámetro que caracteriza la transformación. En la figura 2.5) se esquematiza esta idea a partir de considerar dos superficies pseudo esféricas hipotéticas.

Múltiples superficies pseudo esféricas pueden ser generadas a partir de una superficie pseudo esférica *semilla*, resultado que se debe a Bianchi –y que se discutirá en la sección 2.4.3. Este hecho es crucial en la teoría de solitones, debido a que cada solitón corresponde a una superficie, la generación de N superficies corresponde a la generación de N solitones.

No obstante, encontrar la transformada de Bäcklund de una superficie pseudo esférica no obedece a un método genérico en particular sino a procedimientos heurísticos. En lo que sigue, ilustramos esta técnica tomando como ejemplo la ecuación de Bour (2.71).

Considérese el sistema (2.68)–(2.69) con $\kappa = -1/\rho^2 = \aleph$ Sea $\mathbf{r} := \mathbf{r}(x,t)$ el vector de posición de la superficie pseudo esférica σ con x, t las coordenadas paramétricas a lo largo de las líneas asintóticas que definen la superficie. Considérense las relaciones:

$$\mathbf{A} := \mathbf{r}_x, \quad \mathbf{B} := -\mathbf{r}_x \times \mathbf{N} = \csc u\,\mathbf{r}_t - \cot u\,\mathbf{r}_x, \quad \mathbf{C} := \mathbf{N}, \tag{2.72}$$

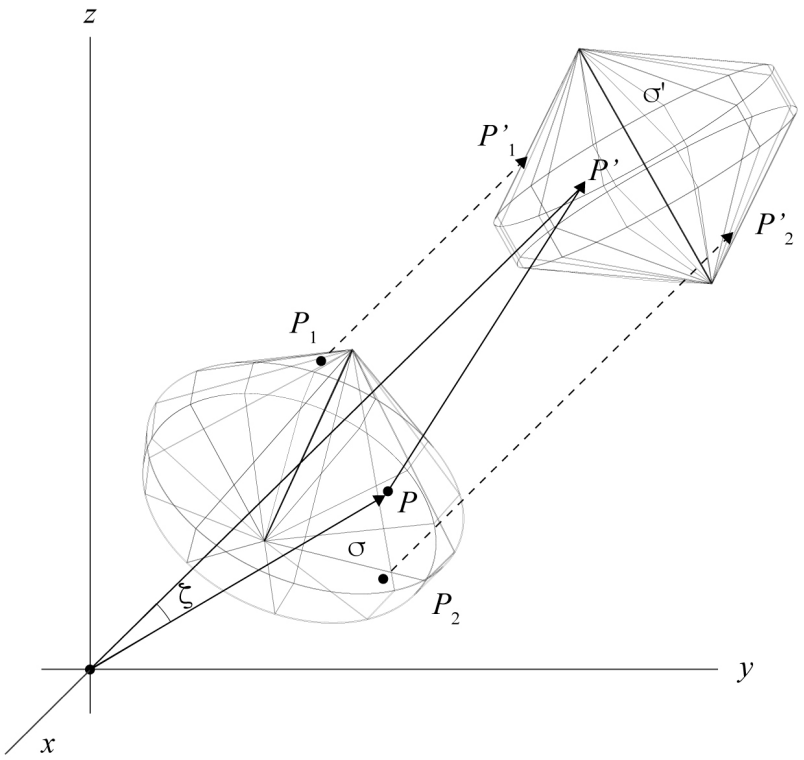


Figura 2.5 Dos superficies hipotéticas, σ y σ', relacionadas entre sí a través de la transformada de Bäcklund $\mathbb{B}_\beta$. Aquí $\beta = \tan\zeta/2$ parametriza la transformación. La superficie σ' posee exactamente la misma curvatura que la superficie semilla σ.

usando (2.64) y (2.65) se obtiene el sistema lineal:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\\ \mathbf{C}\end{pmatrix}_x &= \begin{pmatrix} 0 & -u_x & 0 \\ u_t & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\\ \mathbf{C}\end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\\ \mathbf{C}\end{pmatrix}_t &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho}\sin u \\ u_t & 0 & -\frac{1}{\rho}\cos u \\ -\frac{1}{\rho}\sin u & \frac{1}{\rho}\cos u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\\ \mathbf{C}\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

En esta parametrización $\mathbf{r}_x$, $\mathbf{r}_t$ y $\mathbf{N}$ son todos vectores unitarios, sin embargo, relajamos las constricciones suponiendo que $\mathbf{r}_x$ y $\mathbf{r}_t$ no son necesariamente ortogonales.

Se propone que el vector de posición $\mathbf{r}'$, para la superficie pseudo esférica σ' que se busca, mantenga la forma:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + L\cos v\mathbf{A} + L\sin v\mathbf{B}, \tag{2.74}$$

donde $L := |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ y $v := v(x,t)$ es un ángulo tal que x y t correspondan con la parametrización a lo largo de las curvas asintóticas y que satisface la relación:

$$u' = 2v - u, \tag{2.75}$$

siendo u' el ángulo subtendido entre las líneas paramétricas que caracterizan σ', es decir, análogo al papel que desempeña u en σ.

De (2.73) y (2.74) se obtienen los campos:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_x &= [1 - L(v_x - u_x)\sin v]\mathbf{A} + L(u_x - u_x)\cos v\,\mathbf{B} + \frac{L}{\rho}\sin v\,\mathbf{C},\\ \mathbf{r}'_t &= (\cos u - Lv_t\sin v)\mathbf{A} + (\sin u + Lv_t\cos v)\mathbf{B} + \frac{L}{\rho}\sin(u-v)\mathbf{C},\end{aligned} \tag{2.76}$$

todavía más, como es necesario que $\mathbf{r}'_x$ y $\mathbf{r}'_t$ sean unitarios, de lo anterior se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned}v_x &= u_x + \frac{1}{L}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{L^2}{\rho^2}}\right)\sin v,\\ v_t &= \frac{1}{L}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{L^2}{\rho^2}}\right)\sin(v-u).\end{aligned} \tag{2.77}$$

Si de (2.77) se exige la condición:

$$\beta = \frac{\rho}{L}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{L^2}{\rho^2}}\right) = \frac{L}{\rho}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{L^2}{\rho^2}}\right)^{-1}, \tag{2.78}$$

las relaciones en (2.77), se reducen a:

$$\begin{aligned}v_x &= u_x + \frac{\beta}{\rho}\sin v,\\ v_t &= \frac{1}{\beta\rho}\sin(v-u).\end{aligned} \tag{2.79}$$

Por último, usando la relación (2.75) para sustituir v en (2.79), se obtiene

$$\begin{aligned}\left(\frac{u'-u}{2}\right)_x &= \frac{\beta}{\rho}\sin\left(\frac{u'+u}{2}\right),\\ \left(\frac{u'+u}{2}\right)_t &= \frac{1}{\beta\rho}\sin\left(\frac{u'-u}{2}\right),\end{aligned} \tag{2.80}$$

esta es la *transformada canónica de Bäcklund* $\mathbb{B}_\beta$ que relaciona la ecuación (2.71) con su dual

$$u'_{xt} - \frac{1}{\rho^2}\sin u' = 0.$$

Si además $\mathbb{B}_\beta$ instaura una correspondencia entre las soluciones de una misma ecuación, ésta se denomina *auto–transformada de Bäcklund*.

Dado (2.80), la ecuación (2.71) se mantiene invariante mediante

$$\tilde{x} = \beta x, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\beta}, \quad \beta \neq 0, \tag{2.81}$$

de manera que cualquier solución $u = u(x,t)$ genera una clase de soluciones (de un parámetro) del tipo $\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t}) = u(\beta x, t/\beta)$. A este hecho se le conoce como *invarianza puntual de Lie*.

2.4.3. Generación de Múltiples Solitones

Aunque las soluciones por N solitones pueden ser generadas de (2.16) o (2.54), el esquema de Bäcklund $\mathbb{B}_\beta$ permite ilustrar algunos conceptos fundamentales como la superposición no lineal, o el también llamado *teorema de permutación de Bianchi*.

Para introducir la idea, consideremos nuevamente la transformada de Bäcklund (2.80) de (2.71) en el vacío (es decir, con $u = 0$) deviniendo en el par de ecuaciones de primer orden:

$$u'_x = \frac{2\beta}{\rho}\sin\left(\frac{u'}{2}\right), \quad u'_t = \frac{2}{\beta\rho}\sin\left(\frac{u'}{2}\right). \tag{2.82}$$

Integrado este sistema de ecuaciones, se consigue la expresión del solitón individual estacionario

$$u' = 4\arctan\left[\exp\left(\frac{\beta}{\rho}x + \frac{1}{\beta\rho}t + \aleph\right)\right], \tag{2.83}$$

del que se obtienen las representaciones

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{2\beta}{\rho}\,\text{sech}\left[\exp\left(\frac{\beta}{\rho}x + \frac{1}{\beta\rho}t + \aleph\right)\right], \\ u'_t &= \frac{2}{\beta\rho}\,\text{sech}\left[\exp\left(\frac{\beta}{\rho}x + \frac{1}{\beta\rho}t + \aleph\right)\right], \end{aligned} \tag{2.84}$$

mismas que poseen el perfil corcovado asociado con los solitones.

Ahora supóngase que u es solución semilla de (2.71) y que u_1 y u_2 son las transformadas de Bäcklund de u definidas como $u_1 := \mathbb{B}_{\beta_1}\{u\}$ y $u_2 := \mathbb{B}_{\beta_2}\{u\}$, con $\beta_1 \neq \beta_2$. Del mismo modo, sean $u_{12} := \mathbb{B}_{\beta_2}\{u_1\}$ y $u_{21} := \mathbb{B}_{\beta_1}\{u_2\}$. Situación que se esquematiza en la figura 2.6.

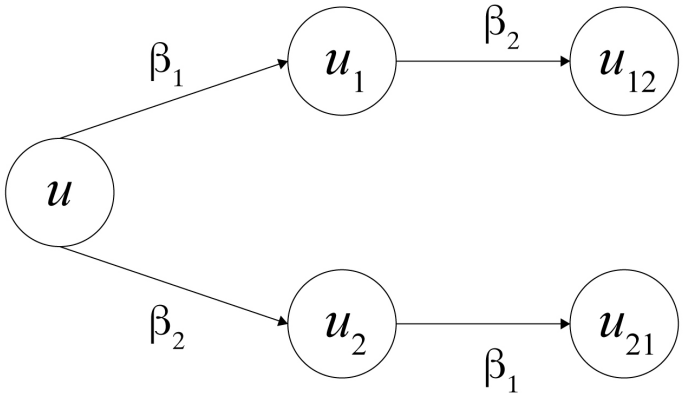


Figura 2.6 Diagrama de Bianchi. Dada la solución semilla u, se inducen dos transformadas de Bäcklund sucesivas, mismas que se parametrizan por β_1 y β_2.

Con la transformada de Bäcklund (2.80) y de acuerdo con el diagrama de Bianchi en la figura 2.6, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} u_{1,x} &= u_x + \frac{2\beta_1}{\rho}\sin\left(\frac{u_1+u}{2}\right), \\ u_{2,x} &= u_x + \frac{2\beta_2}{\rho}\sin\left(\frac{u_2+u}{2}\right), \\ u_{12,x} &= u_{1,x} + \frac{2\beta_2}{\rho}\sin\left(\frac{u_{12}+u_1}{2}\right), \\ u_{21,x} &= u_{2,x} + \frac{2\beta_1}{\rho}\sin\left(\frac{u_{21}+u_2}{2}\right). \end{aligned} \tag{2.85}$$

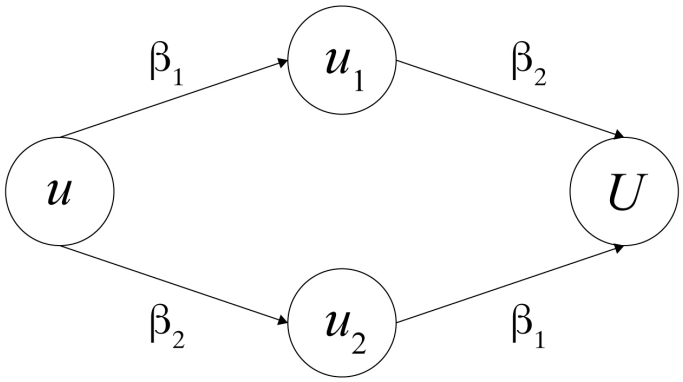


Figura 2.7 Superposición no lineal de dos solitones, $U = u_{21} = u_{12}$, mediante la aplicación sucesiva de la transformada de Bäcklund, parametrizada por β_1 y β_2, al solitón semilla u. Este mismo procedimiento puede extenderse para generar múltiples solitones.

Para que el sistema (2.85) sea integrable se requiere que u_{12} y u_{21} *conmuten* entre sí, es decir $u_{12} = u_{21} = U$, entonces de $(u_{1,x} - u_{2,x}) + (u_{12,x} - u_{21,x})$ resulta:

$$0 = \beta_1 \left[\sin\left(\frac{u_1 + u}{2}\right) - \sin\left(\frac{U + u_2}{2}\right) \right] + \beta_2 \left[\sin\left(\frac{U + u_1}{2}\right) - \sin\left(\frac{u_2 + u}{2}\right) \right]$$

de lo que se obtiene la relación [22]:

$$\tan\left(\frac{U - u}{4}\right) = \frac{\beta_2 + \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \tan\left(\frac{u_2 - u_1}{4}\right),$$

que, a través de la fórmula (2.83), promueve a que la condición de integrabilidad se lea:

$$\begin{aligned} U &= u + 4 \arctan\left[\frac{\beta_2 + \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \tan\left(\frac{u_2 - u_1}{4}\right) \right] \\ &= U. \end{aligned} \tag{2.86}$$

Esquemáticamente, a partir de la condición de integrabilidad del sistema (2.85), el diagrama de Bianchi (figura 2.6) se representa ahora con un lazo cerrado, como se muestra en la figura 2.7. La relación (2.86) establece el principio de superposición no lineal y corresponde al *teorema de permutación de Bianchi*. Mediante esta propiedad se puede crear una red de Bianchi de N solitones, cada uno generado, de manera iterativa, a partir de una transformada de Bäcklund caracterizada por un parámetro β_n.

2.4.4. Superficies Pseudo Esféricas

Para los fines de este apartado, resulta conveniente parametrizar las superficies pseudo esféricas en términos de las coordenadas de curvatura:

$$\xi := x + t, \quad \tau := x - t.$$

La solución estacionaria (2.83) de la ecuación de Bour corresponde a la pseudo esfera de Beltrami (*cfr.* figura 2.8). Con el fin de ilustrar este hecho, tomemos $x = t = \xi/2$ y $\beta = \tan \pi/4 = 1$, reduciendo la expresión del solitón individual a

$$u = 4 \arctan \left[\exp \left(\frac{\xi}{\rho} + \aleph \right) \right]. \tag{2.87}$$

El vector de posición $\mathbf{r}$ de la superficie de revolución generada por la rotación del plano $z = \rho(\cos\theta + \ln|\tan\theta/2|)$ tiene la forma:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos\phi \sin\theta \\ \rho \sin\phi \sin\theta \\ \rho\cos\theta + \rho \ln|\tan\frac{\theta}{2}|, \end{pmatrix} \tag{2.88}$$

mientras que las formas fundamentales (2.62) para este caso concreto son

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \rho^2 \cot^2\theta \, \mathrm{d}\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta \, \mathrm{d}\phi^2, \\ -\mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{N} &= \rho \cot\theta \, \mathrm{d}\theta^2 - \rho \sin\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\phi^2, \end{aligned}$$

de donde se extienden las relaciones

$$\mathrm{d}\xi = \rho \csc\theta \, \mathrm{d}\theta, \quad \tau = \rho\,\phi,$$

y que, una vez integradas, corresponden a la solución (2.87).

Entonces, el vector de posición $\mathbf{r}$ de la superficie pseudo esférica asociada con (2.83), en términos de los parámetros de curvatura es

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \operatorname{sech}\left(\frac{\xi}{\rho} + \aleph\right) \cos\frac{\tau}{\rho} \\ \rho \operatorname{sech}\left(\frac{\xi}{\rho} + \aleph\right) \sin\frac{\tau}{\rho} \\ \rho\left[\frac{\xi}{\rho} - \tanh\left(\frac{\xi}{\rho} + \aleph\right) + \aleph\right] \end{pmatrix}, \tag{2.89}$$

donde los términos constantes solamente determinan la posición de la pseudo esfera respecto del origen. Graficando este vector de posición se obtiene una pseudo esfera de Beltrami (ver figura 2.8).

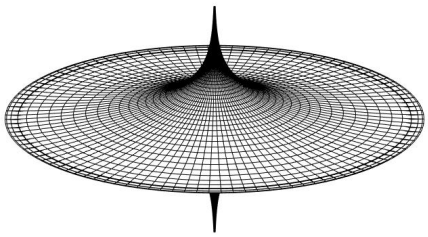


Figura 2.8 Pseudo esfera de Beltrami. Esta superficie se asocia a la solución por un solitón individual, estacionario para la ecuacón de Bour. Aquí $\mathbb{B}$ está parametrizada por $\beta = \tan \pi/4$.

La ecuación de Bour (2.71) también se escribe de forma equivalente como:

$$u_{\xi\xi} - u_{\tau\tau} = \frac{1}{\rho^2} \sin u \, \cos u. \tag{2.90}$$

La transformada de Bäcklund de esta representación es:

$$\begin{aligned} u'_\xi - u_\xi &= \frac{1}{\rho \sin \zeta}(\sin u' \cos u - \cos \zeta \cos u' \sin u), \\ u'_\tau - u_\tau &= \frac{1}{\rho \sin \zeta}(\cos u' \sin u - \cos \zeta \sin u' \cos u), \end{aligned} \tag{2.91}$$

tal que $\beta = \tan \zeta/2$.

En la sección 2.4.3 se mostró, cómo a partir de la transformada de Bäcklund se producen N solitones mediante la aplicación sucesiva de una secuencia del tipo

$$\mathbb{B}_{\beta_1} \cdot \mathbb{B}_{\beta_2} \cdots \mathbb{B}_{\beta_N}$$

a una solución semilla u, toda vez que se satisfaga el teorema de permutación de Bianchi. Nuevamente, considérese la ecuación de Bour, en esta ocasión en la representación (2.90),

y estudiemos la generación de pseudo esferas a partir de la superposición de dos solitones usando la ley (2.86); ello implica:

$$\tan\left(\frac{u_{12}-u}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\zeta_2+\zeta_1}{2}\right)\tan\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\zeta_2-\zeta_1}{2}\right)}, \tag{2.92}$$

donde ζ_1 y ζ_2 corresponden a las parametrizaciones $\beta_1=\tan\zeta_1/2$ y $\beta_2=\tan\zeta_2/2$, tal que $u_1=\mathbb{B}_{\beta_1}\{u\}$, $u_2=\mathbb{B}_{\beta_2}\{u\}$ y $u_{12}=\mathbb{B}_{\beta_2}\{u_1\}=u_{21}=\mathbb{B}_{\beta_2}\{u_1\}$.

Si en particular, $u=0$, la solución en el vacío de Bäcklund es:

$$u_n=2\arctan\left(\exp\eta_n\right),\quad n=1,2, \tag{2.93}$$

refiriéndose a $\eta_n:=\frac{1}{\rho\sin\zeta_n}(\xi-\tau\cos\zeta_n)$, de antemano $\zeta_1\neq\zeta_2$.

De acuerdo con (2.74), el vector de posición $\mathbf{r}'$, está dado por:

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}+L\left(\frac{\cos U}{\cos u}\mathbf{r}_\xi-\frac{\sin U}{\sin u}\mathbf{r}_\tau\right), \tag{2.94}$$

donde $L=\rho\sin\zeta$, y

$$U=\pm2\arctan\left[\frac{\sin\left(\frac{\zeta_2+\zeta_1}{2}\right)\sinh\left(\frac{\eta_1-\eta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\zeta_2-\zeta_1}{2}\right)\cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_1}{2}\right)}\right]. \tag{2.95}$$

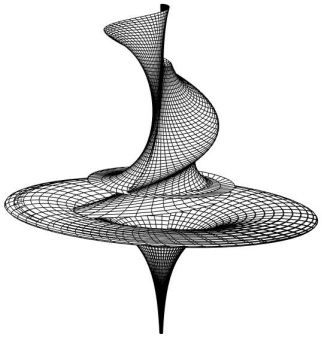
Usando (2.89), (2.93) y (2.95) en (2.94), se obtiene explícitamente el vector de posición de la superficie pseudo esférica concerniente a la superposición de dos solitones de Bour. En la figura 2.9 se muestran algunas superficies de esta especie.

Otras superficies pseudo esféricas pueden ser graficadas, como en la figura anterior, a partir de obtener el vector de posición $\mathbf{r}$ de tal superficie, este vector posee absolutamente toda la información necesaria para parametrizar la pseudo esfera. Para cerrar este capítulo veamos un último ejemplo, esta vez considerando el sistema de Bianchi (2.68)–(2.69).

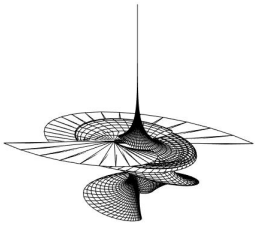
Recordemos que la transformada de Bäcklund surge de tomar un punto arbitrario P de una superficie pseudo esférica σ, a partir del cual se traza un segmento de línea PP' tangente a σ en P y de longitud constante, esto implica que $\mathbf{r}'-\mathbf{r}=\sqrt{\rho'\,\rho}\,\mathbf{N}'\times\mathbf{N}$, pero $\rho'=\rho$ pues, ambas superficies deben poseer la misma curvatura total Gaussiana.

El vector de posición para superficies hiperbólicas, tiene la forma,

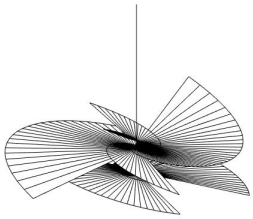
$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\left(\frac{2\epsilon}{1+\epsilon^2}\right)\frac{1}{\sin\Theta}\left[\cos\left(u-\frac{\Theta}{2}\right)\frac{\mathbf{r}_x}{a}+\cos\left(u+\frac{\Theta}{2}\right)\frac{\mathbf{r}_t}{b}\right] \tag{2.96}$$



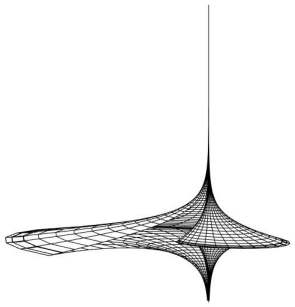
(a) $\zeta_1 = \pi/2$, $\zeta_2 = \pi/4$



(b) $\zeta_1 = \pi/2$, $\zeta_2 = \pi$



(c) $\zeta_1 = \pi/2$, $\zeta_2 = \pi/16$



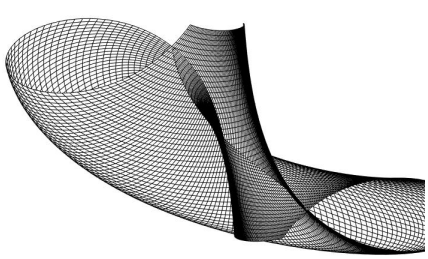
(d) $\zeta_1 = \pi/3$, $\zeta_2 = \pi/6$

Figura 2.9 Superficies pseudo esféricas generadas de la superposición no lineal de dos solitones estacionarios de la ecuación de Bour en la representación (2.90). En cada panel, la transformadada $\mathbb{B}$ se parametriza con valores distintos β_n, $n = 1, 2$.

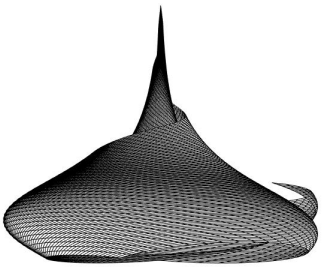
donde $\epsilon = \tan\theta/2$ y Θ es un parámetro de relajación [23]. De manera que, si se fija $\Theta = \pi/2$, el vector genérico para la superficie generada del vacío de Backlund es:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \frac{\sin\theta}{\cosh\omega} \cos\sigma \\ \rho \frac{\sin\theta}{\cosh\omega} \sin\sigma \\ \rho \left(\frac{\xi}{2}\rho + \tau\cos\theta + \sin\theta \tanh\omega + \aleph \right) \end{pmatrix}, \tag{2.97}$$

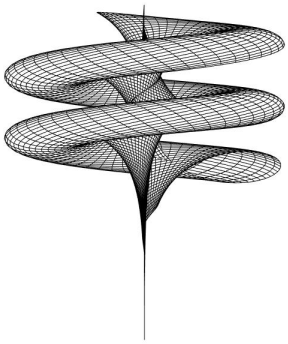
con $\omega := \tau\,\theta - \xi\,\rho\,\sin\theta$ y $\sigma := \xi\rho\,\cos\theta + \tau\,\ln\rho$. Para el caso, las líneas de parametrización son $\rho = \aleph_1$ y $\theta = \aleph_2$ En la figura 2.10 se muestran algunos solitones individuales de Bianchi.



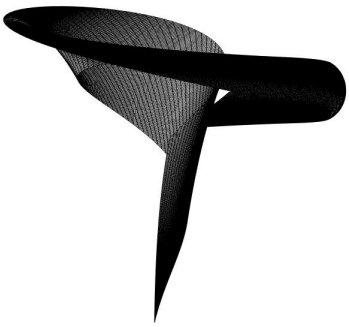
(a) $\theta = \pi/2$, $\rho = 6$



(b) $\theta = \pi/9$, $\rho = 1/2$



(c) $\theta = 2\pi/5$, $\rho = 8$



(d) $\theta = \pi/3$, $\rho = 1/2$

Figura 2.10 Solitones individuales de Bianchi. La transformada de Bäcklund en el vacío asociada al sistema (2.68)–(2.69) para superficies hiperbólicas, está dada por (2.97). El parámetro ρ es de carácter adimensional. En cada panel, las revoluciones, en términos de los parámetros ξ y τ, son distintas.

Capítulo 3

Métodos de Diferencias Finitas

Previamente hemos estudiado algunas técnicas analíticas que permiten integrar sistemas evolutivos no lineales. En lo particular, la transformada espectral y la imagen Lax–AKNS. El último de los esquemas (Lax–AKNS) se puede extender en términos de operadores de diferencias finitas y de sus funciones propias asociadas permitiendo un tratamiendo unificado al nivel de las transformadas de Bäcklund [11].

Si bien, en este trabajo no abordamos el planteamiendo de Bruschi–Ragnisco –*i.e.* la extensión a la imagen de Lax–AKNS en operadores finitos–, sí es una de las motivaciones para introducir los métodos de diferencias finitas como parte de nuestro trabajo a futuro.

Por otro lado, las técnicas que se introdujeron en el capítulo 2 son aplicables a la clase de ecuaciones evolutivas (2.1), y en general a la clase (2.38).

Sin embargo, aquellas ecuaciones que no se encuentran comprendidas en la clase generalizada (2.38), no poseen una solución cerrada a través de las técnicas del capítulo 2, en cambio, su integración puede ser aproximada por medio de técnicas numéricas o estadísticas. Entre las técnicas numéricas se encuentran los métodos de diferencias finitas, que permiten partir el dominio solución de la ecuación diferencial en segmentos que aproximan la solución.

En este capítulo describimos algunos métodos por diferencias finitas. En la primera parte introducimos la idea basal de estas técnicas. Enseguida, nos enfocamos en los problemas estacionarios con valores en la frontera y, por último, en la tercera parte, abordamos los problemas dependientes del tiempo y con valor inicial. En cada caso se implementan algunos ejemplos característicos.

3.1. Aproximaciones por Diferencias Finitas

Sea $u := u(x)$ una función cuyas derivadas están bien definidas y acotadas sobre un intervalo que contiene al punto x_0. En general, la primera derivada de u respecto de x está definida como:

$$u_x := \lim_{h \to 0} \frac{\pm u(x \pm h) \mp u(x)}{h},$$

de tal manera que para evaluar u_x en el punto x_0 existen dos aproximaciones (como se muestra en la Figura 3.1): la primera, para aquellos valores $x_0 \leq x$; la segunda, para los valores $x \leq x_0$; esto es

$$\begin{aligned} \Delta_+ u(x_0) &:= \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \\ \Delta_- u(x_0) &:= \frac{u(x_0) - u(x_0 - h)}{h}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $h \ll 1$.

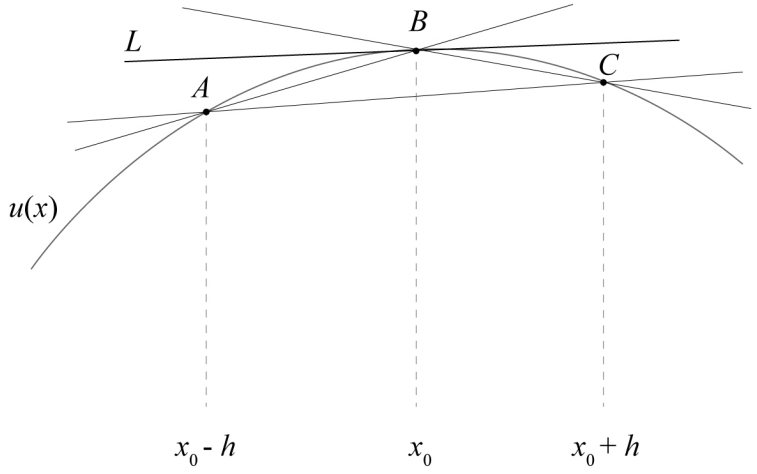


Figura 3.1 Tres aproximaciones a $u_x(x_0)$. En el equema, los segmentos de recta AB, BC y AC corresponden a las pendientes de $\Delta_- u(x_0)$, $\Delta_+ u(x_0)$ y $\Delta_0 u(x_0)$, con referencia a las fórmulas en (3.1) y (3.2). La recta L concierne al valor exacto de la pendiente de u_x en el punto x_0. Conforme $h \to 0$ la recta secante AC se aproxima a L.

Las precisión de (3.1) depende de h, *i.e.* este número determina la magnitud del error en el orden de aproximación. Entonces, dado que $h \ll 1$, una aproximación que dependiese

de h^2 sería más exacta que la previa, y así sucesivamente. Por ejemplo, considérese la aproximación centrada[1]

$$\Delta_0 u(x_0) := \frac{\Delta_+ u(x_0) + \Delta_- u(x_0)}{2} = \frac{u(x_0+h) - u(x_0-h)}{2h} \tag{3.2}$$

Expandiendo u en series de Taylor alrededor del punto x_0,

$$\begin{aligned} u(x_0+h) &= u(x_0) + hu_x(x_0) + \frac{1}{2!}h^2 u_{xx}(x_0) + \frac{1}{3!}h^3 u_{xxx}(x_0) + O(h^4) \\ u(x_0-h) &= u(x_0) - hu_x(x_0) + \frac{1}{2!}h^2 u_{xx}(x_0) - \frac{1}{3!}h^3 u_{xxx}(x_0) + O(h^4), \end{aligned} \tag{3.3}$$

y luego restando la segunda expansión de la primera:

$$u(x_0+h) - u(x_0-h) = 2hu_x(x_0) + \frac{2}{3!}h^3 u_{xxx}(x_0) + O(h^5),$$

sustituyendo lo anterior en (3.2) resulta

$$\Delta_0 u(x_0) = u_x(x_0) + \frac{1}{3!}h^2 u_{xxx}(x_0) + O(h^4),$$

es decir, el error de truncado radica a segundo orden

$$\Delta_0 u(x_0) \approx u_x(x_0) + \frac{1}{3!}h^2 u_{xxx}(x_0).$$

A partir de (3.1) y de (3.2) se pueden encontrar fórmulas para derivadas de orden superior mediante la aplicación sucesiva o combinada de las previas. Para dar muestra de esto, en el caso de las derivadas de segundo orden, se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u(x_0) &= \Delta_+[\Delta_- u(x_0)] \\ &= \frac{1}{h}\left[\Delta_- u(x_0+h) - \Delta_- u(x_0)\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[\left(\frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h}\right) - \left(\frac{u(x_0) - u(x_0-h)}{h}\right)\right] \\ &= \frac{1}{h^2}[u(x_0+h) - 2u(x_0) + u(x_0-h)] \\ &= \Delta_-[\Delta_+ u(x_0)], \end{aligned} \tag{3.4}$$

[1] Otras fórmulas con aproximaciones a órdenes de precisión más altos se pueden consultar en el anexo C.

ó, equivalentemente

$$\Delta^2 u(x_0) = \Delta_0[\Delta_0 u(x_0)].$$

Como último ejemplo, para una aproximación a u_{xxx} en el punto x_0 considérense dos vías: $(\Delta_+)^2\Delta_0 u(x_0)$ y $(\Delta_0)^3 u(x_0)$. En el primer caso,

$$\begin{aligned}(\Delta_+)^2\Delta_0 u(x_0) &= \frac{1}{2h^3}[u(x_0+3h) - 2u(x_0+2h) + u(x_0) - u(x_0-h)] \\ &= u_{xxx} + hu_{xxxx} + O(h^2),\end{aligned}$$

y por tanto la aproximación tiene precisión a primer orden. Para el segundo caso, se tiene

$$\begin{aligned}(\Delta_0)^3 u(x_0) &= \frac{1}{8h^3}[u(x_0+3h) - 3u(x_0+h) + 3u(x_0-h) - 3u(x_0-3h)] \\ &= u_{xxx} + \frac{1}{2}h^2 u_{xxxxx} + O(h^3),\end{aligned}$$

que es una aproximación centrada y con precisión a segundo orden.

3.2. Problemas Independientes del Tiempo

Las fórmulas en diferencias finitas obtenidas en la sección anterior son aproximaciones discretas a sus operadores diferenciales asociados. La calidad de la aproximación depende de un número, h, mismo que define la distancia entre cada uno de los puntos de las diferencias finitas (ver Figura 3.2).

Antes de dar lugar a los métodos en diferencias finitas, consideremos el siguiente problema de valor en la frontera:

$$a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u = f(x, u, u_x), \qquad 0 < x < L \tag{3.5}$$

sujeto a la condiciones a la frontera de Dirichlet[2] $u(0) = u_0$ y $u(L) = u_L$.

Resolver (3.5) por diferencias finitas consiste en calcular una función malla $\mathbf{U}$ tal que el n-ésimo valor de $\mathbf{U}$ sea la aproximación a la solución en ese punto, *i.e.* $U_n \approx u(x_n)$, donde $x_n = x_0 + nh = h + x_{n-1}$, $n = 0, \ldots, N$, $h = L/N$ y N el número de nbodos. De las condiciones a la frontera es posible fijar el primero y último de los nodos, $U_0 = u_0$ y $U_N = u_L$.

Si se reemplazan las derivadas u_x y u_{xx} en (3.5) por las aproximaciones en diferencias finitas centradas (3.2) y (3.4), se obtiene

$$a_n\left(\frac{U_{n-1} - 2U_n + U_{n+1}}{h^2}\right) + b_n\left(\frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2h}\right) + c_n U_n = f(x_n, U_n, \Delta_0\mathbf{U}(x_n)). \tag{3.6}$$

Si nos restringimos al caso donde $f(x, u, u_x) = f(x)$, (3.6) es un sistema lineal de $N - 1$ ecuaciones con igual número de incógnitas que se reduce a la forma $\mathbf{AU} = \mathbf{F}$, donde

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} (h^2c_1 - 2a_1) & (a_1 + hb_1/2) & & & \\ (a_2 - hb_2/2) & (h^2c_2 - 2a_2) & (a_2 + hb_2/2) & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & (a_{N-2} - hb_{N-2}/2) & (h^2c_{N-2} - 2a_{N-2}) & (a_{N-2} + hb_{N-2}/2) & \\ & & (a_{N-1} - hb_{N-1}/2) & (h^2c_{N-1} - 2a_{N-1}) \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

[2]Otras condiciones a la frontera pueden ser empledas, ver anexo F.

es una matriz tridiagonal,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(x_1) - (a_1/h^2 - b_1/2h)u_0 \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) - (a_{N-1}/h^2 + b_{N-1}/2h)u_L \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

y $\mathbf{U} = [U_1, U_2, \ldots, U_{N-1}]^T$. Si los coeficientes a, b y c en (3.5) son constantes, $\mathbf{A}$ en (3.7) es una matriz de Toeplitz.

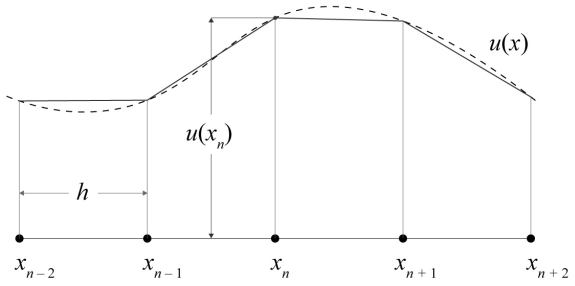


Figura 3.2 Una malla uniformemente espaciada. La solución exacta $u(x)$ (línea punteada) es aproximada a partir de los puntos discretos x_n, $n = 1, 2, \ldots, N$. El parámetro h determina la calidad de la aproximación. Como se aprecia en el esquema, el error en la aproximación puede diferir de punto a punto.

3.2.1. Error Numérico

Si u es la solución que satisface (3.5) de manera exacta y $\hat{\mathbf{U}}$ el vector que contiene cada uno de los puntos $u(x_n)$, sustituyendo $\mathbf{U} \to \hat{\mathbf{U}}$ en el sistema $\mathbf{AU} = \mathbf{F}$, de manera general se cumple $[\mathbf{A}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{F}]_n \neq 0$.

El error de truncado $\mathbf{e}$ está directamente relacionado con el orden de precisión del método. Para ver esto tomemos como ejemplo (3.6) fijando los valores $a_n = 1$ y $b_n = c_n = 0$ para todo n, así como $f(x_n, U_n, \Delta_0\mathbf{U}(x_n)) = f(x_n)$, entonces:

$$\frac{1}{h^2}\left[u(x_{n-1}) - 2u(x_n) + u(x_{n+1})\right] - f(x_n) = e_n, \qquad n = 1, \ldots, N-1, \tag{3.9}$$

supliendo las diferencias finitas con las expansiones en series de Taylor en (3.3) y simplificando:

$$\left[u_{xx}(x_n) + \frac{1}{12}h^2 u_{xxxx}(x_n) + O(h^4)\right] - f(x_n) = e_n,$$

finalmente, sustituyendo en la ecuación diferencial inicial:

$$\frac{1}{12}h^2 u_{xxxx}(x_n) + O(h^4) = e_n,$$

resultado que, obviamente, concuerda con el orden de precisión de las diferencias finitas empleadas en el método. En suma, el vector de error de truncado $\mathbf{e} := \mathbf{A}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{F}$.

Mientras que $\mathbf{e}$ es una medida del orden al que fueron truncadas las aproximaciones por diferencias finitas, en el análisis de convergencia –que se presenta en la siguiente sección– es necesario introducir una medida directa de la precisión en la solución, esto se hace a través de $\mathbf{E} := \mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}}$, que se conoce como error global.

Ahora, considerando los sistemas lineales $\mathbf{AU} = \mathbf{F}$ y $\mathbf{A}\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{F} - \mathbf{e}$, y como $\mathbf{E} = \mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}}$, entonces es claro que $\mathbf{AE} = -\mathbf{e}$. Lo que lleva a lo siguiente: dada la matriz $\mathbf{A}$ en (3.7) y para el caso especial ligado a (3.9), el error global $\mathbf{E}$ satisface un sistema de ecuaciones en difrencias finitas de la forma

$$\frac{1}{h^2}\left[\,\mathbf{E}(x_{n-1}) - 2\mathbf{E}(x_n) + \mathbf{E}(x_{n+1})\,\right] = -\mathbf{e}_n, \qquad n = 1, \ldots, N-1, \tag{3.10}$$

más aún, por las mismas condiciones a la frontera, $E_0 = 0$ y $E_N = 0$.

Obtener la medida del error de truncado o del error global, consiste en determinar la norma del vector (o de la matriz) donde se deposita esa información. Hay varias clases de normas, por ello, la apreciación en la exactitud del método puede diferir de acuerdo a la elección entre una u otra. La norma es una cantidad siempre positiva y real. En el caso de un vector $\mathbf{r}$ en $\mathbb{R}^N$ la norma satisface:

1. $0 \leq \|\mathbf{r}\|\ \forall\ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$ y $\|\mathbf{r}\| = 0 \iff \mathbf{r} = 0$,

2. Sea a un escalar, entonces $\|a\mathbf{r}\| = |a|\ \|\mathbf{r}\|$,

3. Sea $\mathbf{s}$ análogo a $\mathbf{r}$, entonces $\|\mathbf{r} + \mathbf{s}\| \leq \|\mathbf{r}\| + \|\mathbf{s}\|$.

La familia de p–normas está definida por

$$\|\mathbf{r}\|_p := \left[\sum_{1 \leq n \leq N} |r_n|^p\right]^{1/p}, \tag{3.11}$$

con $p > 0$. En el caso límite cuando $p \to \infty$ (3.11) se reduce a

$$\|\mathbf{r}\|_\infty = \max_{1\leq n\leq N} |r_n|.$$

En cuanto a matrices: si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ la norma de $\mathbf{A}$ es el número ν más pequeño que satisface la inequidad

$$\|\mathbf{Ar}\| \leq \nu\|\mathbf{r}\|$$

con $\|\mathbf{r}\|$ un vector en $\mathbb{R}^N$. Entonces, la norma de $\mathbf{A}$ se define como

$$\|\mathbf{A}\| := \max_{r\neq 0} \frac{\|\mathbf{Ar}\|}{\|\mathbf{r}\|} = \max_{\|\mathbf{r}\|=1} \|\mathbf{Ar}\|. \tag{3.12}$$

Tal como sucede con los vectores, también se pueden distinguir varias clases de normas para matrices, entre las más comúnes están:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_1 &= \max_{1\leq n\leq N} \sum_{1\leq m\leq N} |a_{mn}|, \\ \|\mathbf{A}\|_2 &= \left(\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\right)^{1/2}, \\ \|\mathbf{A}\|_\infty &= \max_{1\leq n\leq N} \sum_{1\leq m\leq N} |a_{nm}|. \end{aligned} \tag{3.13}$$

En la fórmula para la 2–norma ρ es el radio espectral, definido para una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ como

$$\rho(\mathbf{A}) := \max_{1\leq n\leq N} |\lambda_n|,$$

aquí λ_n es el n-ésimo valor propio de la matriz $\mathbf{A}$.

3.2.2. El Teorema Fundamental

El problema central de los métodos de diferencias finitas es la precisión y legitimidad de los resultados: en qué medida se aproximan a la solución exacta y hasta qué punto son fiables. Así, el teorema fundamental de las diferencias finitas se lee:

> estabilidad + consistencia $\iff$ convergencia.

Estabilidad. Considérese un problema con condiciones a la frontera segmentado en N partes de grueso h, tal que éste se puede representar como un sistema de ecuaciones

de la forma $\mathbf{AU} = \mathbf{F}$. Si $\mathbf{A}^{-1}$ existe para todo $h < \delta$, con δ suficientemente pequeño, y si además existe un número ν tal que

$$\|\mathbf{A}^{-1}\| \leq \nu, \qquad \forall \quad h < \delta,$$

se dice que el método es estable.

Consistencia. Si se satisface

$$\|\mathbf{e}\| \to 0, \qquad h \to 0,$$

entonces el método es consistente con la ecuación diferencial y sus condiciones a la frontera.

Convergencia. Cuando se cumple

$$\|\mathbf{E}\| \to 0, \qquad h \to 0,$$

entonces se concluye que el método es convergente.

3.2.3. Métodos de Malla Uniforme

Consideremos la ecuación de Poisson

$$u_{xx} + u_{yy} = \psi, \tag{3.14}$$

ésta es una ecuación diferencial parcial (EDP) de segundo orden elíptica[3], sus curvas características son complejas y, por lo tanto, la solución al problema con condiciones a la frontera no se propaga a lo largo de estas curvas[4]. Para segmentar (4.2) se usa la fórmula en diferencias centradas (3.4), tanto en x como en y, esto es:

$$\frac{1}{h_x^2}(U_{m-1,n} - 2U_{m,n} + U_{m+1,n}) + \frac{1}{h_y^2}(U_{m,n-1} - 2U_{m,n} + U_{m,n+1}) = \psi_{m,n}, \tag{3.15}$$

donde los índices m y n representan la parte discreta de x e y, respectivamente, mientras que h_x y h_y son el ancho de la malla en cada caso. Si nos restringimos a una malla uniforme (u homogénea) este esquema se simplifica dado que $h = h_x = h_y$ a lo largo de todo el dominio, en consecuencia (3.15) se reescribe como

$$U_{m,n} = \frac{1}{4}(U_{m-1,n} + U_{m+1,n} + U_{m,n-1} + U_{m,n+1}) - \frac{h^2}{4}\psi_{m,n}. \tag{3.16}$$

En la expresión (3.16), los puntos interiores de U_{mn} pueden ser obtenidos de manera iterativa a partir de los puntos en la frontera. Si el algoritmo que se emplea es convergente, entonces el error en la aproximación con respecto a la solución exacta irá decreciendo paulatina o rápidamente de acuerdo con la eficiencia del método. Varios de estos algoritmos pueden ser consultados en textos introductorios (*cfr.* [24–26]). Como ejemplo consideremos (4.2) y los siguientes algoritmos:

[3]Para ver la clasificación de las EDP, ver el anexo D.

[4]Debido a que las ecuaciones elípticas no poseen curvas características reales, sus soluciones no se propagan junto con ningún miembro de esta familia de curvas y por lo tanto se asegura que no existen discontinuidades en sus derivadas a lo largo del dominio. Esta propiedad, sugiere modelar los sistemas físicos fuera de equilibrio a través de ecuaciones hiperbólicas o parabólicas, donde las soluciones sí pueden presentar discontinuidades.

Algoritmo	Fórmula Recursiva
Jacobi	$U_{m,n}^{[\mu+1]} = \frac{1}{4}(U_{m-1,n}^{[\mu]} + U_{m+1,n}^{[\mu]} + U_{m,n-1}^{[\mu]} + U_{m,n+1}^{[\mu]} - h^2\psi_{m,n})$
Gauss–Seidel (GS)	$U_{m,n}^{[\mu+1]} = \frac{1}{4}(U_{m-1,n}^{[\mu+1]} + U_{m+1,n}^{[\mu]} + U_{m,n-1}^{[\mu+1]} + U_{m,n+1}^{[\mu]} - h^2\psi_{m,n})$
Relajaciones Sucesivas	$U_{m,n}^{[\mu+1]} = \frac{\omega}{4}(U_{m-1,n}^{[\mu+1]} + U_{m+1,n}^{[\mu]} + U_{m,n-1}^{[\mu+1]} + U_{m,n+1}^{[\mu]} - h^2\psi_{m,n}) + (1-\omega)U_{m,n}^{[\mu]}$

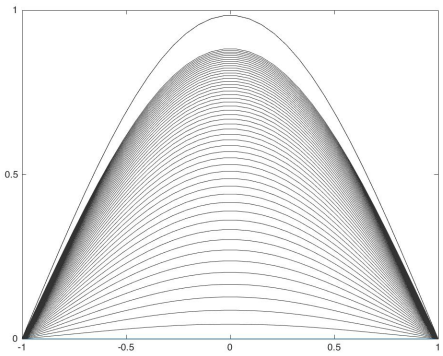
En el caso de relajaciones sucesivas el parámetro ω determina si el algoritmo es *relajado por exceso* ($\omega > 1$), *relajado por defecto* ($\omega < 1$) o igual con GS ($\omega = 1$). Si se presenta una relajación por exceso (por defecto), el método converge de manera más rápida (más lenta) respecto al método de GS. En la figura 3.3 se pueden comparar las tasas de convergencia para cada uno de estos métodos, confirmando que el algoritmo de relajaciones sucesivas tiene una tasa de convergencia más rápida que la de los otros dos métodos. En materia de cálculo, el algoritmo de Jacobi es el menos eficiente de estos tres, sin embargo, el más sencillo de implementar.

La solución a la ecuación (4.2) por medio del algoritmo de Jacobi se presenta en el mapa de la figura 3.4. Para el cómputo se ha empleado una malla uniforme de $N = N_x = N_y = 2^6$ nodos con N^2 repeticiones, la fuente $\phi = (x^2+y^2-2)\exp -\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ en el dominio $x, y \in [-5, 5]$. Los resultados tienen un error absoluto de $2{,}182 \times 10^{-3}$. En la figura 3.5, la rapidez con la que decrece el error respecto al tamaño de la malla, confirmando que el método es menos eficiente con referencia a los otros dos.

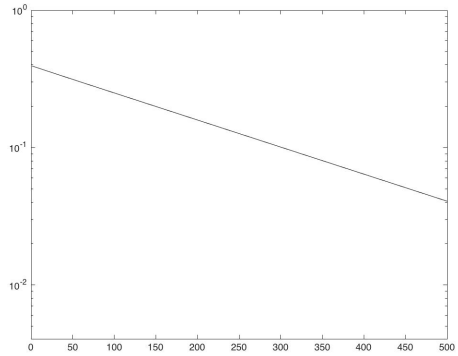
3.2.4. Métodos de Malla Múltiple

Los tres métodos del apartado anterior permiten resolver problemas con valor en la frontera. De ellos, el algoritmo de Jacobi tiene desventajas frente a los algoritmos de GS y de sucesiones relajadas en cuanto a la cantidad de trabajo requerida para obtener resultados con un margen de error del mismo orden de magnitud que el asociado a cada uno de los otros dos. La convergencia requiere de cuando menos $O(N^2)$ iteraciones, cosa poco factible para largas tareas de cómputo –*e.g.* figura 3.5, donde la reducción en el error es exigua aún yendo de $(2^5)^2$ a $(2^9)^2$ iteraciones.

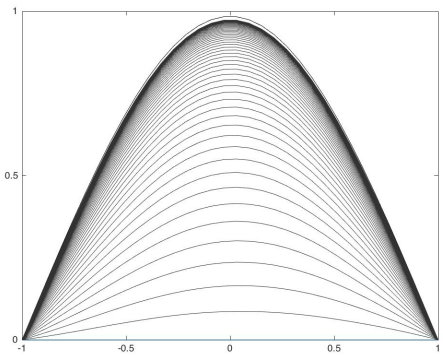
Tanto el método de GS como el de Jacobi producen errores suaves, permitiendo remover las frecuencias más altas del vector de error en apenas unas cuantas iteraciones, figura 3.6. De esta manera, una vez que tales frecuencias han sido removidas, sería una dilapidación de cómputo seguir iterando el algoritmo en el mismo ancho de malla,



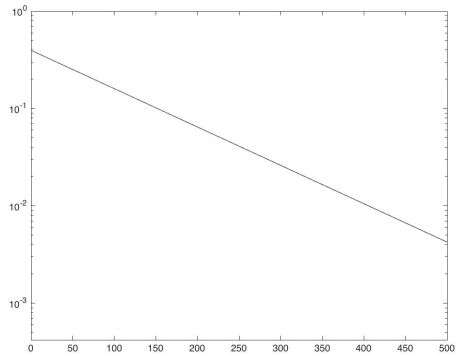
Jacobi



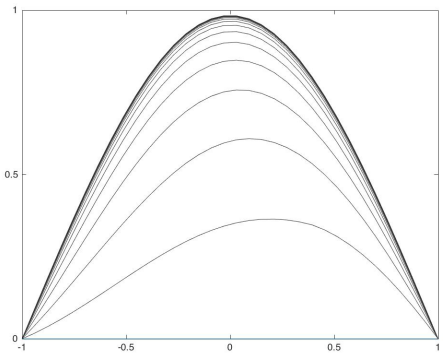
Tasa de Convergencia



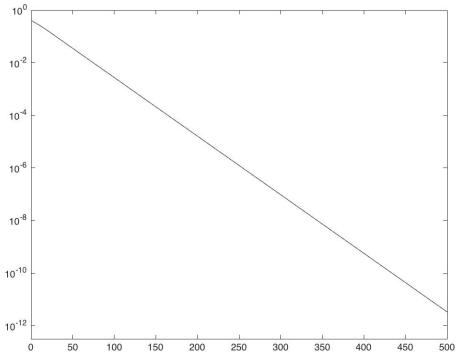
Gauss–Seidel



Tasa de Convergencia



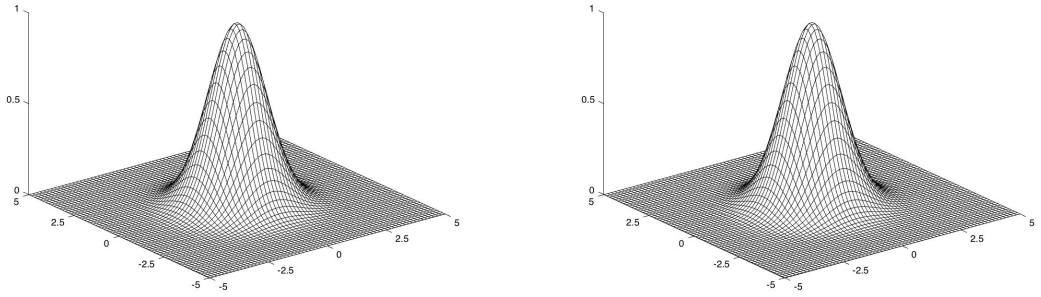
Relajaciones Sucesivas



Tasa de Convergencia

Figura 3.3 Solución a la ecuación de Poisson (4.2) en una dimensión sujeta a la fuente $\phi = (x^2 - 1)\exp -x^2/2$ en el dominio $x \in [-1, 1]$. En los tres casos, el tamaño de la malla es de $N = 2^5$ nodos. En los páneles del lado izquierdo, el algoritmo empleado, y a la derecha de cada uno, la tasa de convergencia caracterizada por el error absoluto en función del número de iteraciones.

sugiriendo la introducción de una malla de ancho más largo que el de la anterior para continuar con la remoción de las oscilaciones subsecuentes. El procedimiento se puede



Solución exacta Solución aproximada

Figura 3.4 Solución exacta y aproximada a la ecuación de Poisson (4.2) mediante el método de Jacobi. Para este ejemplo se ha considerado la fuente $\phi = (x^2 + y^2 - 2)\exp -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ en el dominio $x, y \in [-5, 5]$. La aproximación está hecha con una malla de $N = N_x = N_y = 2^6$ nodos y N^2 ciclos de iteración.

repetir tantas veces como sea necesario, razón por la cual a este tipo de algoritmos se les conoce como *métodos multi-malla*.

Los métodos multi–malla constituyen en sí una secuencia de etapas de filtrado, *i.e.*, mientras que para eliminar el ruido a altas frecuencias se emplea una malla fina de ancho h, para depurar las frecuencias medias y bajas, se pueden emplear anchos de malla $2h$ y $4h$, respectivamente. El número de etapas de filtrado se relaciona directamente con la eficiencia del método y al mismo tiempo con la calidad en la aproximación.

En general, el procedimiento consiste en llevar sucesivamente una matriz $\mathbf{A}_{[h]}$, de la forma (3.7), a una matriz $\mathbf{A}_{[2h]}$, donde el subíndice se refiere al ancho de malla relativo a cada caso.

La matriz de la malla $2h$ se obtiene, de manera aproximada, mediante la fórmula $\mathbf{A}_{[2h]} = \mathbf{R}\mathbf{A}_{[h]}\mathbf{I}$, siendo $\mathbf{R}$ *la matriz de restricción*, de dimensiones $N/2 \times N$, e $\mathbf{I}$ *la matriz de interpolación*, de dimensiones $N \times N/2$, mismas que satisfacen las relaciones:

$$\mathbf{IV} = \mathbf{U}, \qquad \mathbf{RU} = \mathbf{V}, \tag{3.17}$$

donde $\mathbf{V}$ es una malla gruesa respecto de $\mathbf{U}$.

Por otro lado, supongamos un esquema de dos mallas: una fina de ancho h y otra gruesa de ancho $2h$. Inicialmente se realiza un cierto número de iteraciones en la malla fina produciendo un residuo $-\mathbf{e}_{[h]}$. En la transferencia $\mathbf{A}_{[h]} \to \mathbf{A}_{[2h]}$, el residuo tambíen es remitido. Una vez en la malla gruesa, otro número de iteraciones toma lugar y

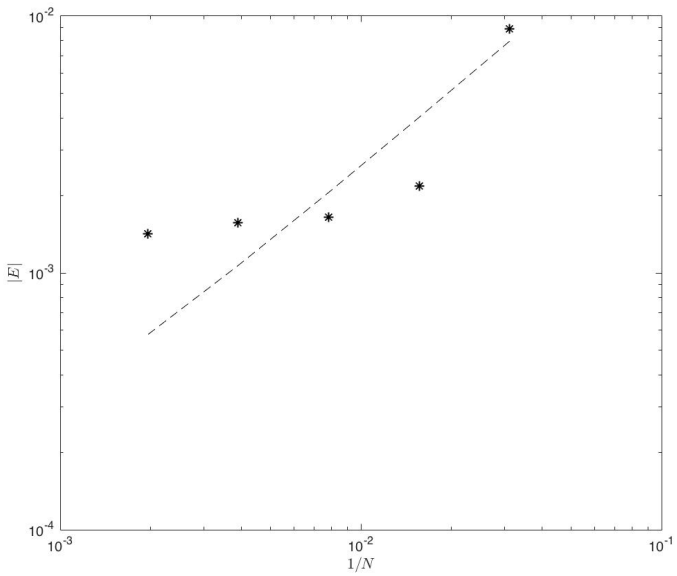


Figura 3.5 Tasa de convergencia del método de Jacobi medida en términos del ancho de la malla para la solución a (4.2). En el mapa, los asteriscos indican el error absoluto en función del inverso del tamaño del dominio, mientras que la línea punteada (con pendiente m =1.37) es el ajuste por mínimos cuadrados de estos datos.

correspondientemente un residuo $-\mathbf{e}_{[2h]}$. Eventualmente, se interpola el residuo $-\mathbf{e}_{[2h]}$ llevándolo a $-\mathbf{e}_{[h]}$ para efectuar el ajuste $\mathbf{U}_{[h]} + \mathbf{E}_{[h]}$ y comenzar de nuevo. Bajo esta circunstancia, al procedimiento se le conoce como *algoritmo de v–ciclos* (malla fina $\rightarrow$ malla gruesa $\rightarrow$ malla fina). Recalcando que, a mayor número de niveles de malla, menor trabajo requerido para lograr la convergencia.

Es posible implementar otro tipo de ciclos (figura 3.7). Considérese el v–ciclo dado por la secuencia

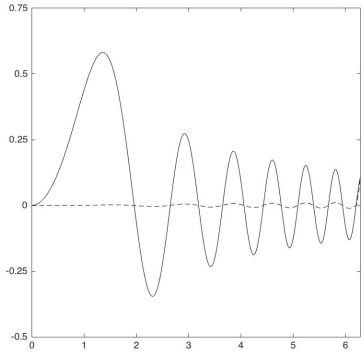
$$(h, 2h, 4h) \rightarrow (4h, 2h, h),$$

ésta no es la única vía de iteración en esos tres niveles de malla, una alternativa sería el *w–ciclo* definido por la secuencia

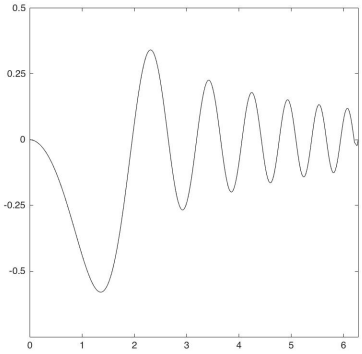
$$(h, 2h, 4h) \rightarrow (4h, 2h) \rightarrow (2h, 4h) \rightarrow (4h, 2h, h),$$

el cual es más eficiente que el primero debido a que el trabajo es considerablemente más rápido en las mallas gruesas que en las mallas finas.

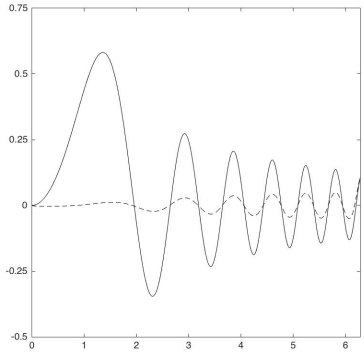
El procedimiento se puede invertir, es decir, iniciar en la malla gruesa y terminar en la fina, a estos algoritmos se les conoce como *multi–malla plena* (MMP). Por ejemplo, la



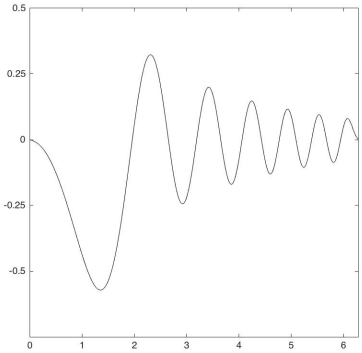
0 iteraciones



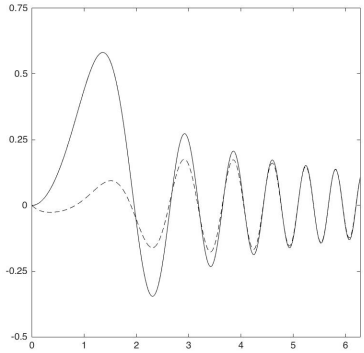
Error a 0 iteraciones



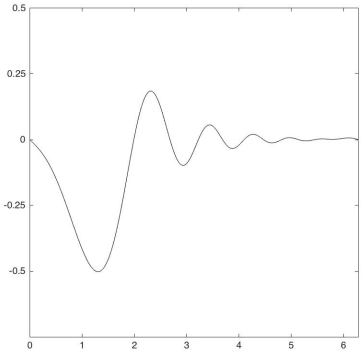
10 iteraciones



Error a 10 iteraciones



100 iteraciones



Error a 100 iteraciones

Figura 3.6 Amortiguamiento del error en el algoritmo de Jacobi. Del lado izquierdo, la solución exacta (línea sólida) a la ecuación de Poisson caracterizada como $u_{xx} = 2[(3 - 2x^4)x^{-2}J_1(x^2) - J_0(x^2)]$, $x \in [0, 2\pi]$ y la solución aproximada (línea punteada) en un dominio de $N = 2^8$ puntos. Del lado derecho, el error correspondiente para tal número de iteraciones. Como se aprecia, las frecuencias más altas son atenuadas en acaso unas cuantas repeticiones.

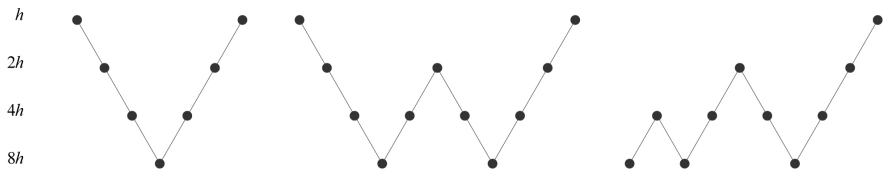


Figura 3.7 Tres esquemas distintos para cuatro niveles de malla, de izquierda a derecha: v–ciclos, w–ciclos y MMP con v–ciclos. Conforme se engrosa la malla, se agiliza la velocidad en el cómputo.

secuencia

$$(4h, 2h) \to (2h, 4h) \to (4h, 2h, h).$$

En suma, el algoritmo genérico es el siguiente:

1. Comenzar con unos cuantos ciclos de iteración en una malla fina $\mathbf{A}_{[h]}\mathbf{U} = \mathbf{F}$ para aproximar $\mathbf{U}_{[h]}$.

2. Transferir el residuo $-\mathbf{e}_{[h]} = \mathbf{F} - \mathbf{A}\mathbf{U}_{[h]}$ al nivel inmediato inferior mediante la *restricción* $-\mathbf{e}_{[2h]} = \mathbf{R}_{[h\to 2h]}\mathbf{e}_{[h]}$. Seguir descendiendo según el número de niveles de malla con $\mathbf{R}_{[2^{n-1}h\to 2^n h]}$, donde $n = 0, 1, 2, \ldots$

3. Resolver el sistema $\mathbf{A}_{[2^n h]}\mathbf{E}_{[2^n h]} = -\mathbf{e}_{[2^n h]}$.

4. Transferir el error $\mathbf{E}_{[2^n h]}$ al nivel inmediato superior mediante la *interpolación* $\mathbf{E}_{[2^{n-1}h]} = \mathbf{I}_{[2^n h\to 2^{n-1}h]}\mathbf{E}_{[2^n h]}$. Repetir según el número de niveles y ajustar $\mathbf{E}_{[h]} + \mathbf{U}_{[h]}$.

5. Iniciar el ciclo nuevamente y repetir hasta obtener la aproximación deseada.

Los pasos 2–3–4 pueden anidarse para formar w–ciclos. El algoritmo se puede extender fácilmente al caso de MMP si se invierten los v–ciclos y las composiciones de ellos.

3.3. Problemas Dependientes del Tiempo

La solución al problema de Cauchy depende ampliamente de la convergencia del método, lo que quiere decir, que el error en la aproximación debe acercarse a cero cuando el ancho de malla también se acerca a cero. Sin embargo, en los métodos para resolver ecuaciones parabólicas o hiperbólicas se necesitan de restricciones adicionales debido a que los cambios infinitesimales suceden tanto en el dominio de las coordenadas espaciales como en el de la coordenada temporal. Mientras que en la malla espacial (de grueso h) a

cada uno de los puntos se les denomina nodos, en la malla espacial (de grueso k) se les denomina pasos.

Similar al caso de los problemas independientes del tiempo, el teorema fundamental de las diferencias finitas para los problemas dependientes del tiempo se lee:

> cero–estabilidad + consistencia $\Longleftrightarrow$ convergencia.

Cero–Estabilidad. Se dice que el método es estable, si la suma de los errores individuales por cada paso produce un error global acotado. Y se dice que es *cero–estable*, si además cada uno de los errores individuales tiene el mismo comportamiento asintótico que el error local de truncado cuando $k \to 0$.

Consistencia. Si $\|\mathbf{e}\| \to 0$ cuando $k \to 0$.

Convergencia. Si $\|\mathbf{E}\| \to 0$ cuando $k \to 0$.

No obstante, el que el método sea convergente y cero–estable no implica que la solución obtenida sea la adecuada. Para resolver esta vaguedad, es imprescindible conocer el dominio S de estabilidad absoluta. A continuación mencionamos algunos ejemplos.

3.3.1. Regiones de Estabilidad

En los métodos paso único, la aproximación $U_{\mu+1}$ depende únicamente del valor inmediato anterior U_μ pero no de los pasos precedentes. Entre estos métodos están las aproximaciones por series de Taylor (sección 3.1) y los algoritmos de Runge–Kutta. La implementación de estos métodos puede ser costosa si el problema a resolver demanda el cómputo de derivadas de orden superior o involucra términos no lineales. En cambio, los métodos de múltiples pasos pueden reducir el cómputo a partir de reciclar el cálculo previamente hecho. Aunque también poseen algunas desventajas, por ejemplo, debido a la dependencia de los pasos anteriores, el método no puede comenzar automáticamente a partir del valor inicial U_0, requiriendo de la implementación de un método de paso único para que en lo sucesivo tome lugar la recurrencia.

En general, la clase que caracteriza a los métodos de M pasos, se lee

$$\sum_{0\leq\nu\leq M} [a_\nu U_{\mu+\nu} - k\, b_\nu f(U_{\mu+\nu}, t_{\mu+\nu})] = 0, \tag{3.18}$$

donde la notación $U_\mu = U(t_\mu)$ y $t_\mu = \mu k$. Cuando el método es explícito (implícito) entonces $b_\nu = 0$ ($b_\nu \neq 0$).

Más aún, sean λ, ζ y z números complejos y supóngase que $u_t = \lambda u$; si se introduce la cantidad adimensional $z := k\lambda$, entonces (3.18) se reduce a:

$$\pi(\zeta; z) := \sum_{0 \leq \nu \leq M} (a_\nu - z b_\nu)\, \zeta_\nu = 0, \tag{3.19}$$

que se conoce como *polinomio de estabilidad*, cuyas raíces $U_{\mu+\nu} \to \zeta_\nu$ satisfacen las condiciones:

$$\begin{aligned} |\zeta_\nu| &\leq 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \\ |\zeta_\nu| &< 1, \quad \text{si } \zeta_\nu \text{ es una raíz degenerada.} \end{aligned} \tag{3.20}$$

La región de estabilidad absoluta de los métodos de un paso es el conjunto:

$$S := \{z \in \mathbb{C} : \, |R(z)| \, \leq \, 1\}, \tag{3.21}$$

tal que $U_{\mu+1} = R(z) U_\mu$, donde $R(z)$ es una función que satisface:

$$R(z) - \exp z = O(z^{p+1}), \quad z \to 0,$$

para un método exacto a p–orden.

En ciertos casos $R(z)$ puede corresponder a una aproximación de Padé de orden $r + s$, es decir:

$$R(z) = \left(\sum_{0 \leq \mu \leq r} a_\mu z^\mu \right) \left(1 + \sum_{0 \leq \nu \leq s} b_\nu z^\nu \right)^{-1}, \tag{3.22}$$

la función $R(z)$ permanece acotada en el compacto $[-1, 1]$ bajo ciertas condiciones; Wanner *et al.* [27] descubrieron que mediante la introducción de la clase $\{S_-, S_0, S_+\}$, definida como:

$$\begin{aligned} S_- &:= \{z \in \mathbb{C} : \, |\exp(-z)\, R(z)| < 1\}, \\ S_0 &:= \{z \in \mathbb{C} : \, |\exp(-z)\, R(z)| = 1\}, \\ S_+ &:= \{z \in \mathbb{C} : \, |\exp(-z)\, R(z)| > 1\}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

se puede encontrar el más alto orden de las aproximaciones de Padé que satisfacen (3.20), a saber, a orden $r + s \leq 6$ en la región de *estabilidad aceptable*, o simplemente región A–estable en el sentido de Dahlquist[5].

El método consiste en contar los *pétalos* de los diagramas de *órdenes de estrella* de la función $R(z)$, nombrados así por la forma peculiar que presentan (ver el lado derecho de la figura 3.9).

Algunos de los métodos lineales de paso único son:

Método	$R(z)$
Euler hacia adelante	$1 + z$
Euler hacia atrás	$1 \leq \lvert 1 - z \rvert$
Pídola	$z \pm \sqrt{(1 + z^2)}$
Trapezoidal	$\left(1 + \frac{1}{2}z\right)\left(1 - \frac{1}{2}z\right)^{-1}$
Taylor II	$1 + z + \frac{1}{2}z^2$
Runge–Kutta IV	$1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4$

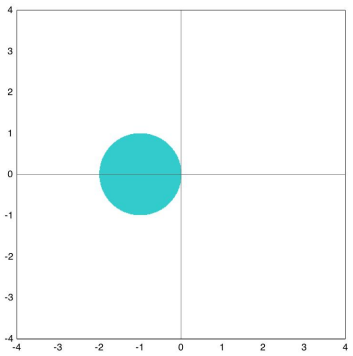
Entre estos, el método trapezoidal posee el error de truncado más pequeño. En la práctica, a fin de garantizar que el error permanezca acotado para todo tiempo t, incluso si el factor de Lipschitz y el número de pasos es muy largo, simplemente se asume que las curvas integrales sean uniforme y asintóticamente estables.

El método de Euler, es el caso más simple. El polinomio de estabilidad es $\pi(\zeta; z) = \zeta - (1 - z)$, cuando el método es hacia adelante, o $\pi(\zeta; z) = (1 - z)\zeta - 1$, cuando el método es hacia atrás. En la figura 3.8 se muestran las regiones de estabilidad (zona sombreada) para cada caso.

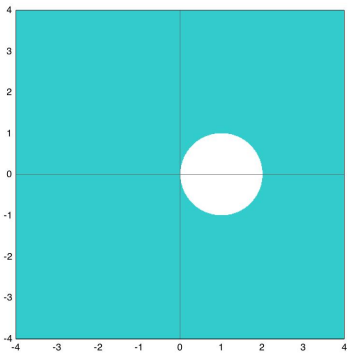
3.3.2. Método de Líneas

Dentro de las técnicas por diferencias finitas, el método de líneas es un caso especial ya que corresponde a un procedimiento a la vez analítico y a la vez numérico. El algoritmo consiste separar la ecuación diferencial respecto de sus variables independientes, trabajar

[5]Cuando la región de estabilidad absoluta S de algún método es densa en $\{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(z) < 0\}$, se dice que éste es A–estable.



Euler hacia adelante



Euler hacia atrás

Figura 3.8 Regiones de estabilidad absoluta para el método de Euler. Estas regiones, en el plano complejo, revelan los valores que puede asumir z tal que el error en el método se comporte asintóticamente igual al error local de truncado para todo tiempo t.

sobre una de ellas mediante las técnicas bien conocidas para resolver ecuaciones ordinarias y el resto a través de algún método de diferencias finitas, figura 3.10. Las ventajas son vastas frente a otros métodos exclusivamente numéricos, sobre todo en la rapidez y la precisión del cómputo.

Como ejemplo, consideremos la ecuación:

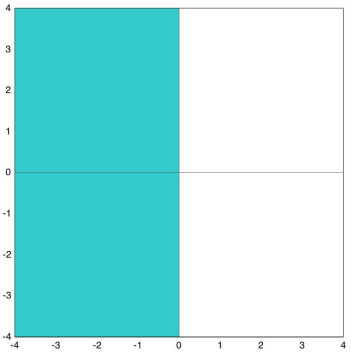
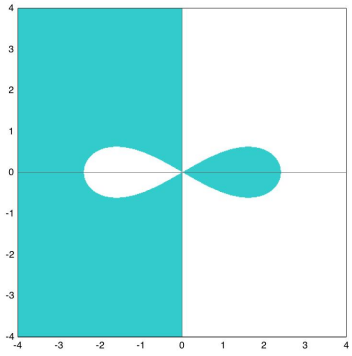
$$u_{xx} - c^{-2}u_{tt} = 0, \tag{3.24}$$

en este caso $u := u(x,t)$. Si se emplean las fórmulas de diferencias centradas (3.2) para segmentar x y t en N nodos y M pasos, se obtiene:

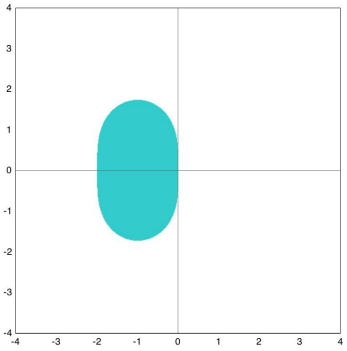
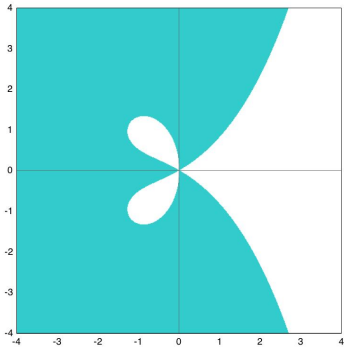
$$U_{n,m+1} \approx \delta^2 \left[U_{n-1,m} - 2U_{n,m} + U_{n+1,m}\right] + 2U_{n,m} - U_{n,m-1} \tag{3.25}$$

donde el valor adimensional $\delta := ck/h$ es el número de Courant–Friedrichs–Lewis (CFL), cantidad que se relaciona con la estabilidad del método. La iteración de este algoritmo es costosa, por cada uno de los M pasos se tendría que aplicar alguno de los métodos descritos en las secciones previas y repetir tantas veces como fuese necesario para alcanzar la convergencia. La idea del método de líneas es reducir la cantidad de trabajo a partir de llevar a alguna de las variables independientes a una aproximación discreta, sea x, y resolver analíticamente la parte concerniente a t. En este caso, la plantilla en (3.25) se reduce a:

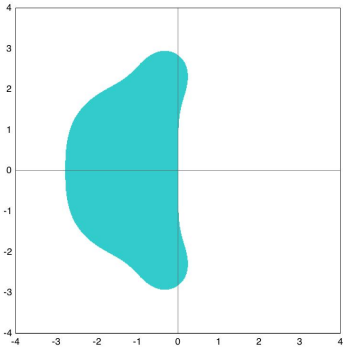
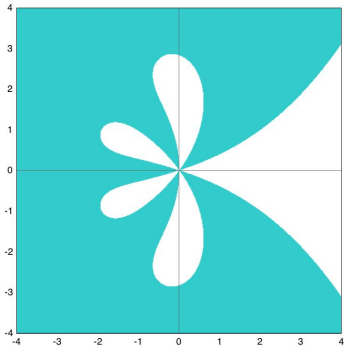
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}U_n(t) \approx \left(\frac{c}{h}\right)^2 \left[U_{n+1}(t) - 2U_n(t) + U_{n-1}(t)\right]. \tag{3.26}$$

(a) Trapezoidal

(b) Taylor II

(c) Runge–Kutta IV

Figura 3.9 A la izquierda, las regiones de estabilidad absoluta. A la derecha, las regiones de estabilidad relativa, o diagramas de órdenes de estrella de las racíces características para cada método.

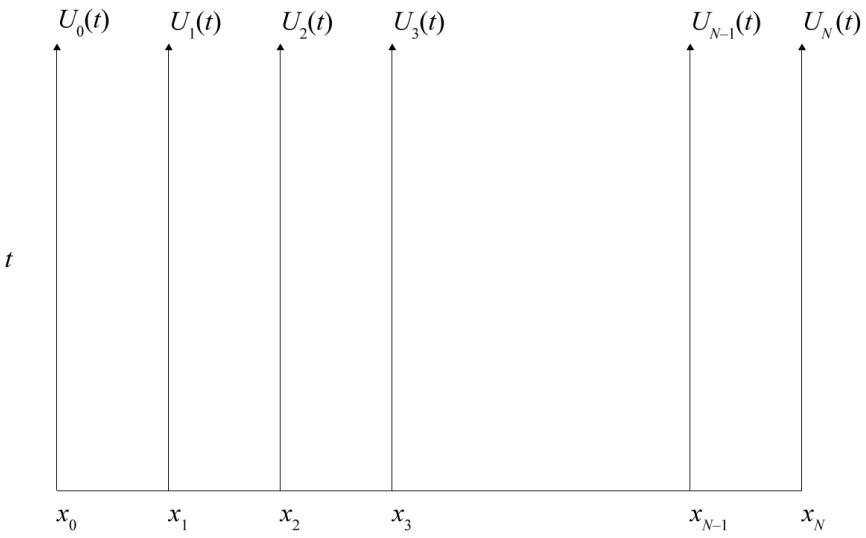


Figura 3.10 Método de líneas. En el esquema se representa el caso hipotético de alguna ecuación diferencial parcial en dos variables, x y t. La parte discreta (continua), asociada a x (a t), se resuelve de manera numérica (analítica). Las soluciones $U_n(t)$ se propagan a lo largo de los N nodos en función de t.

La solución exacta a (3.24) es de la forma $u = u(x \pm ct)$; si empleamos una Gaussiana de ancho y amplitud iguales con uno, centrada en el origen, en el dominio espacial $x \in [-1, 1]$ y en el dominio temporal $t \in [0, 5]$, se obtiene la gráfica del lado izquierdo de la figura 3.11. Mientras tanto, si para el miembro derecho de la ecuación (3.28) se emplean $N = 512$ nodos y 1024 iteraciones, la solución aproximada a la ecuación de onda es la que aparece en el lado derecho de la figura 3.11, donde se advierte que para cada nodo en x existe una solución que se propaga por todo el dominio temporal y que satisface cercanamente a (3.24). El método es convergente y por lo tanto cero–estable, como se aprecia en la figura 3.12.

Consideremos como último ejemplo la ecuación de difusión,

$$u_t = \kappa\, u_{xx}. \tag{3.27}$$

Por tratarse de una ecuación de primer orden en la variable t, la implementación del esténcil es más sencilla con respecto al de la ecuación (3.24). Nuevamente, llevando el miembro derecho de la ecuación de difusión a la representación discreta, se obtiene:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_n(t) \approx \left(\frac{\kappa}{h}\right)^2 [U_{n+1}(t) - 2U_n(t) + U_{n-1}(t)]. \tag{3.28}$$

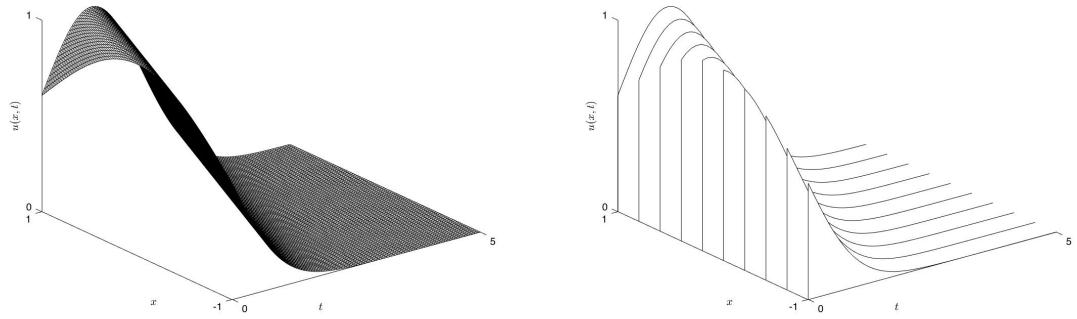
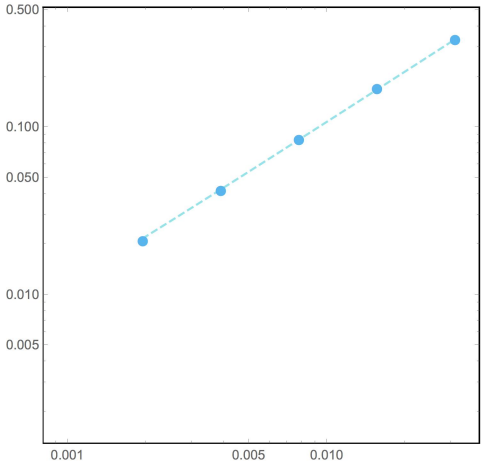
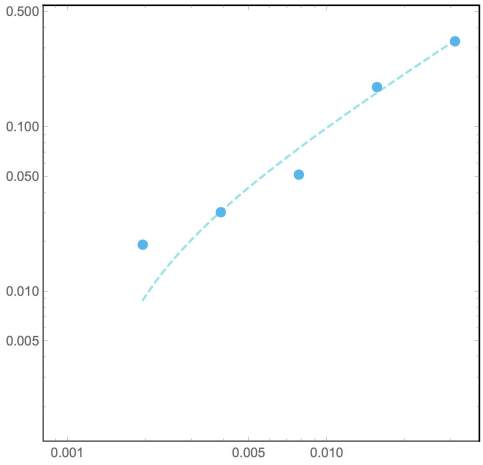


Figura 3.11 Solución a la ecuación de onda (3.24) por el método de líneas. En en el panel izquierdo, la solución exacta. En el panel derecho, la solución aproximada con $N = 512$ nodos (en la figura sólo se presentan diez), en el dominio espacial $x \in [-1, 1]$ y temporal $t \in [0, 5]$ con $c = 1$. Para resolver el miembro izquierdo de (3.28) se ha usado la función `ode15s` en MATLAB.

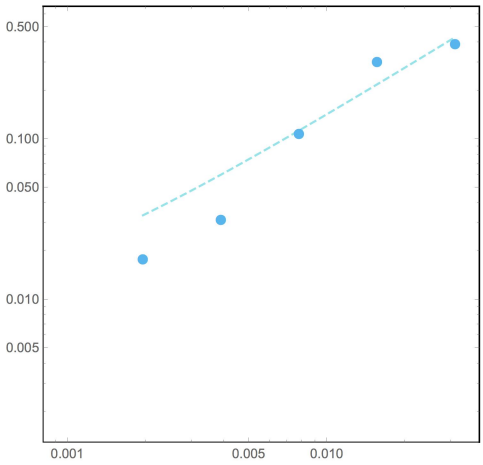
La solución exacta a (3.27) es $u = \exp(-t)\sin(\pi x)$, con $\kappa = 1$, correspondiendo al panel izquierdo de la figura 3.13 en el dominio $x \in [-1, 1]$ y $t \in [0, 5]$. Para aproximar la solución por medio del método de líneas hemos usado $N = 256$ nodos para el dominio espacial. La aproximación se presenta en el panel derecho de la misma figura. De manera adicional, en la figura 3.14 se muestra la tasa de convergencia del método, midiendo el error máximo respecto del ancho de malla.



m =1.36, $t = 0$



m =1.41, $t = 1/2$



m =1.53, $t = 3/2$

Figura 3.12 Tasa de convergencia de la solución a (3.24) por el método de líneas, en términos del máximo error respecto al espaciado de malla h, usando $N = 2^n$ nodos, con $n = 5, \ldots, 9$. Los valores de la pendiente m de la línea punteada son menores al orden del método, en este caso a segundo orden.

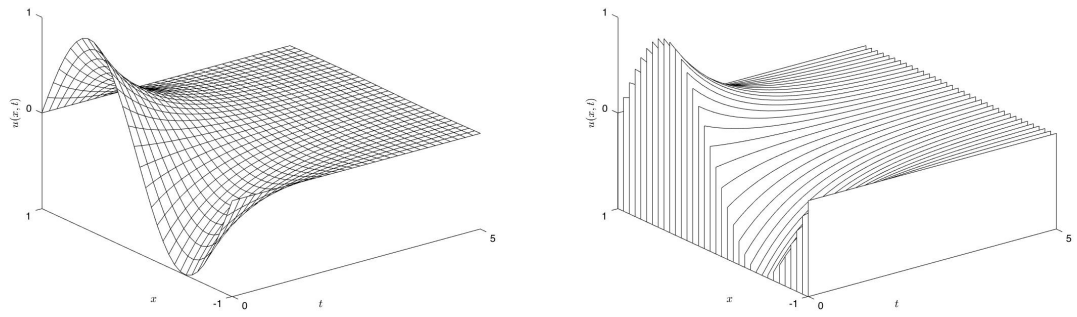
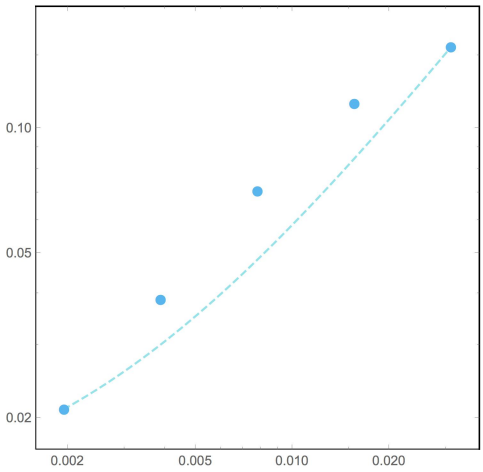
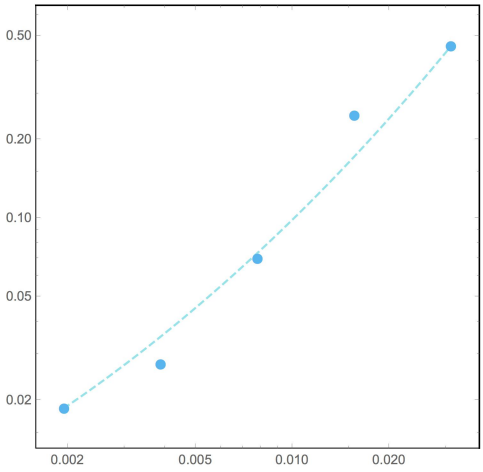


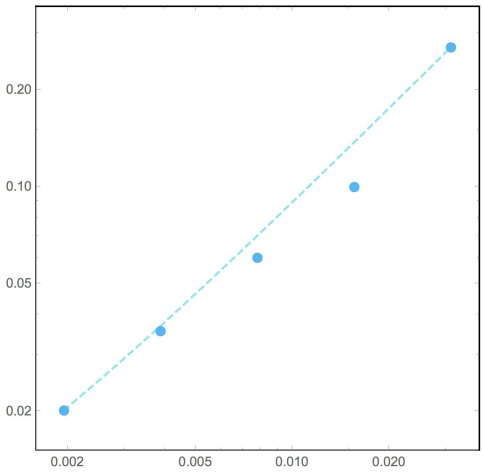
Figura 3.13 Solución a la ecuación de difusión. Lado izquierdo, solución exacta. Lado derecho, solución aproximada por el método de líneas. El miembro derecho de la ecuación (3.27) ha sido calculado de manera iterada (1024 iteraciones), entretanto, el miembro izquierdo se ha integrado con la función `ode15s` de MATLAB.



m =1.53, $t = 1/2$



m =1.94, $t = 3/2$



m =1.88, $t = 5/2$

Figura 3.14 Tasa de convergencia de la solución a (3.27) por el método de líneas, en términos del máximo error respecto al espaciado de malla h. Se han empleado $N = 2^n$ nodos, con $n = 5, \ldots, 9$. En cada caso se muestran los valores aproximados de la pendiente m de la línea punteada. El método empleado es exacto a segundo orden.

Capítulo 4

El Sistema Schrödinger–Poisson

El sistema Schrödinger–Poisson (SP) fue introducido por Ruffini y Bonazzola en 1969 durante el estudio de estrellas auto–gravitantes [12]. Las ecuaciones SP corresponden a las ecuaciones de Einstein–Klein–Gordon en el límite débil y por lo tanto constituyen un modelo simple para estudiar la mecánica cuántica no relativista acoplada a la gravedad Newtoniana. En este caso, cuando la ecuación de Poisson está caracterizada por el potencial gravitatorio, *i.e.* $\rho = m|\Psi|^2$ (con ρ la densidad y m la masa de la partícula), el sistema SP recibe el nombre de Schrödinger–Newton (SN).

Estas ecuaciones han sido objeto de estudio en diversos ámbitos, por ejemplo: en la formulación de una teoría no lineal de la mecánica cuántica [28]; o para sustentar la hipótesis de Károlyházy referente al colapso de la función de onda como consecuencia de efectos gravitacionales [29, 30]; o como modelo para el estudio de materia obscura por medio de campo escalar [31], que es una alternativa al modelo de materia oscura fría a escalas pequeñas [32].

A continuación introducimos las ecuaciones SN y a partir de aquí las ecuaciones SP. Enseguida, consideramos soluciones para la configuración en equilibrio y por simplicidad únicamente tomamos una coordenada espacial. Por último, mediante una versión desacoplada del sistema SP nos es posible encontrar una primera aproximación a sus soluciones.

4.1. Forma Canónica del Sistema Schrödinger–Newton

Considérese la ecuación de Schrödinger para un sistema de N partículas cuyas masas son $m_1, m_2, \ldots, m_N$:

$$\left[-\sum_{1\leq n\leq N} \frac{\hbar^2}{2m_n} \triangle_n + \sum_{1\leq j,n\leq N} \Omega_{jn} + \sum_{1\leq n\leq N} m_n \Phi_n \right] \Psi = i\hbar \Psi_t, \tag{4.1}$$

con $\hbar$ la constante de Planck, $\triangle$ el operador laplaciano, $\Psi = \Psi(\mathbf{X}, t)$ y donde $\mathbf{X}$ contiene los vectores de coordenadas espaciales $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N$ asignados a cada partícula respecto de un origen O arbitrario; $\Omega_{jn} = \Omega_{jn}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_n)$ es el potencial de interacción y $\Phi_n := \Phi(\mathbf{x}_n, t)$ es el potencial Newtoniano de gravitación que satisface la ecuación de Poisson:

$$\triangle \Phi = 4\pi G \int \mathrm{d}^3\mathbf{X}' \, |\Psi'|^2 \sum_{1\leq n\leq N} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n), \tag{4.2}$$

siendo G la constante de gravitación universal y δ la función delta de Dirac.

Si se sustituye la solución de (4.2) en (4.1) se llega a la ecuación integro–diferencial no lineal

$$\left[-\sum_{1\leq n\leq N} \frac{\hbar^2}{2m_n} \triangle_n + \sum_{1\leq j,n\leq N} \Omega_{jn} - \sum_{1\leq j,n\leq N} G\, m_j\, m_n \int \mathrm{d}^3\mathbf{X}' \, \frac{|\Psi'|^2}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}'_n|} \right] \Psi = i\hbar \Psi_t. \tag{4.3}$$

Si nos restringimos al caso especial de una partícula de masa m, entonces $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ y (4.3) se reduce a

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle - Gm^2 \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}' \, \frac{|\Psi'|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \Psi = i\hbar \Psi_t. \tag{4.4}$$

Para el conjunto de ecuaciones (4.1)–(4.4) se buscan soluciones que sean cuadrado integrables, por lo que Ψ debe ser una función normalizable tal que satisfaga la condición

$$\left(\int \mathrm{d}^3\mathbf{x} \, |\Psi|^2 \right)_t = 0;$$

también se asume que Ψ es una función suficientemente suave y con desvanecimiento asintótico; del mismo modo para Φ, que además es una función de valor real.

Al sistema no lineal (4.1)–(4.2) se le conoce como *sistema SN en la representación local* mientras que (4.3) –o la reducción en (4.4)– es el *sistema SN en la representación no local*.

Por otro lado, considérese la transformación $\mathscr{T} : (\Psi, \Phi; \mathbf{x}, t) \to (\psi, \phi; \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})$ definida por las relaciones:

$$\psi = \aleph_1 \, \Psi, \quad \phi = \aleph_2 \, \Phi, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \aleph_3 \, \mathbf{x}, \quad \tilde{t} = \aleph_4 \, t, \tag{4.5}$$

donde $\aleph_i$ son constantes a determinar tal que el sistema (4.1)–(4.2) se represente en términos adimensionales.

Las funciones ψ y ϕ deben poseer las mismas propiedades que Ψ y Φ; en ambos casos difieren, una de su otra, exclusivamente por múltiplos escalares, esto significa que si

$$\int \mathrm{d}^3x \, |\Psi|^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int \mathrm{d}^3\tilde{x} \, |\psi|^2 = 1,$$

entonces $\aleph_1^2 = \aleph_3^{-3}$.

Contrayendo la integral en la ecuación de Poisson (4.2), y por simplicidad considerando nuevamente el caso de una sola partícula, se obtiene:

$$\frac{\beta}{\aleph_3^2} \triangle \Phi = \aleph_1^2 |\Psi|^2,$$

lo que significa, por asociación directa, que $\aleph_1^2 \aleph_3^2 / \aleph_2 = 4\pi G m$ y por tanto $\aleph_2 = 1/4\pi G m \aleph_3$. De manera similar, para la ecuación de Schrödinger:

$$\left[-\frac{m}{\aleph_3^2 \aleph_2} \triangle + m\Phi \right] \Psi = i \frac{m}{\aleph_4 \aleph_2} \Psi_t,$$

con $\aleph_3 = 8\pi G m^3/\hbar^2$ y $\aleph_4 = 32\pi^2 G^2 m^5/\hbar^3$. Por lo tanto, las relaciones (4.5) son explícitamente:

$$\begin{aligned} \psi = \left(\frac{\hbar^2}{8\pi G m^3} \right)^{3/2} \Psi, \qquad \phi = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{(32)}\pi G m^2} \right)^2 \Phi, \\ \tilde{\mathbf{x}} = \frac{8\pi G m^3}{\hbar^2} \mathbf{x}, \qquad \tilde{t} = \frac{32\pi^2 G^2 m^5}{\hbar^5} t, \end{aligned} \tag{4.6}$$

y el sistema (4.1)–(4.2), se reescribe como:

$$\begin{aligned} \left[-\tilde{\triangle} + \phi \right] \psi = i \psi_{\tilde{t}}, \\ \tilde{\triangle} \phi = |\psi|^2, \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde el operador laplaciano $\tilde{\triangle}$ actúa sobre las coordenadas $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. La expresión (4.7) corresponde a la forma canónica del sistema SN y se conoce como *sistema SP*.

4.2. El Sistema Schrödinger–Poisson Sobre la Línea

Por simplicidad, en lo sucesivo consideraremos a (4.7) sobre una sola coordenada espacial, por ejemplo $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, 0, 0)$. De manera adicional, asumiremos que el sistema (4.7) posee soluciones estacionarias de la forma $\psi = u(\tilde{x}) \exp(\pm i\omega\tilde{t})$, siendo ω una constante real. Por lo anterior, $\phi = \phi(|u(\tilde{x}) \exp(\pm i\omega\tilde{t})|^2) = \phi(|u(\tilde{x})|^2)$, reduciendo al conjunto de ecuaciones acopladas:

$$\begin{aligned} \left[-\partial_{\tilde{x}}^2 + \lambda\phi\right] u &= \mp\omega\, u, \\ \phi_{\tilde{x}\tilde{x}} &= |u|^2, \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde λ es un parámetro real.

Para este caso particular, la solución a la ecuación de Poisson está dada por:

$$\phi = \int_0^{\tilde{x}} \mathrm{d}\tilde{x}'\, (\tilde{x} - \tilde{x}')|u'|^2, \tag{4.9}$$

con $(\tilde{x} - \tilde{x}')$ la correspondiente función de Green (ver anexo E).

Las ecuaciones SP en la representación local (4.8) son el objeto de estudio para el resto de nuestro trabajo. Del mismo modo, se ha considerado la representación no local a partir de sustituir (4.9) en (4.8) en términos de u.

En lo que sigue, es útil llevar (4.8) a una versión desacoplada. Consideremos únicamente el signo positivo en el miembro derecho de la primera línea en (4.8) y derivemos respecto de $\tilde{x}$ dos veces:

$$-u_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + \lambda\,(\phi\, u_{\tilde{x}\tilde{x}} + \phi_{\tilde{x}\tilde{x}}\, u) + 2\,\lambda\,\phi_{\tilde{x}}\, u_{\tilde{x}} = \omega\, u_{\tilde{x}\tilde{x}}, \tag{4.10}$$

debido a que $\phi_{\tilde{x}\tilde{x}} = |u|^2$ y a que $(\lambda\phi - \omega)u = u_{\tilde{x}\tilde{x}}$, lo anterior se reescribe como:

$$-u_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + u^{-1}(u_{\tilde{x}\tilde{x}})^2 + \lambda\, u\, |u|^2 + 2\,\lambda\,\phi_{\tilde{x}}\, u_{\tilde{x}} = 0, \tag{4.11}$$

solucionando para $\phi_{\tilde{x}}$:

$$\phi_{\tilde{x}} = \int \mathrm{d}\tilde{x}\, |u|^2 = \frac{u_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} - u^{-1}(u_{\tilde{x}\tilde{x}})^2 - \lambda\, u\, |u|^2}{2\,\lambda\, u_{\tilde{x}}}. \tag{4.12}$$

De nuevo, considerando el signo positivo en el miembro izquierdo de la ecuación de Schrödinger en (4.8), derivando una vez respecto de $\tilde{x}$ y solucionando para $\phi_{\tilde{x}}$ se obtiene:

$$\phi_{\tilde{x}} = \frac{u\, u_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} - u_{\tilde{x}}\, u_{\tilde{x}\tilde{x}}}{\lambda\, u^2}, \tag{4.13}$$

igualando (4.12) con (4.13) y solucionando para $u_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}$, llegamos a la siguiente ecuación:

$$u_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} = \frac{\lambda\, |u|^2\, u^3 + [\, (u_{\tilde{x}\tilde{x}})^2 + 2\, u_{\tilde{x}}\, u_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}\,]\, u - 2\, (u_{\tilde{x}})^2\, u_{\tilde{x}\tilde{x}}}{u^2}, \tag{4.14}$$

que posee las mismas curvas integrales que el sistema (4.8).

Suponiendo que u es un potencial de *bona fide*[1] se puede aceptar que sus derivadas decaen lo suficientemente rápido y omitir los últimos dos términos en (4.14) debido a que no contribuyen de manera significativa al comportamiento de la ecuación, por lo que escribimos:

$$u_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} \approx \lambda\, u^3, \tag{4.15}$$

para una primera aproximación.

Si el problema de Cauchy se especifica como $u(0) = 1, u_{\tilde{x}}(0) = 0, u_{\tilde{x}\tilde{x}}(0) = -1$ y $u_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} = 0$, la integración numérica de (4.15) muestra que la función u se comporta como se observa en la figura 4.1. En el cálculo numérico hemos notado que para valores $\lambda < 0$ y $\lambda \gg 1$, las soluciones no corresponden, en lo local, a la clase de potenciales de *bona fide*, concluyendo que, la anuencia en la forma de la solución depende ampliamente del criterio con que se elija el valor del parámetro de relajación. λ, *cfr.* último par en la figura 4.1.

Usando las soluciones numéricas de (4.15) podemos obtener una primera aproximación a las soluciones de (4.8), como se muestra en la figura 4.2, correspondiendo a cada uno de los casos presentados en la figura 4.1.

[1] *cfr.* capítulo 2.

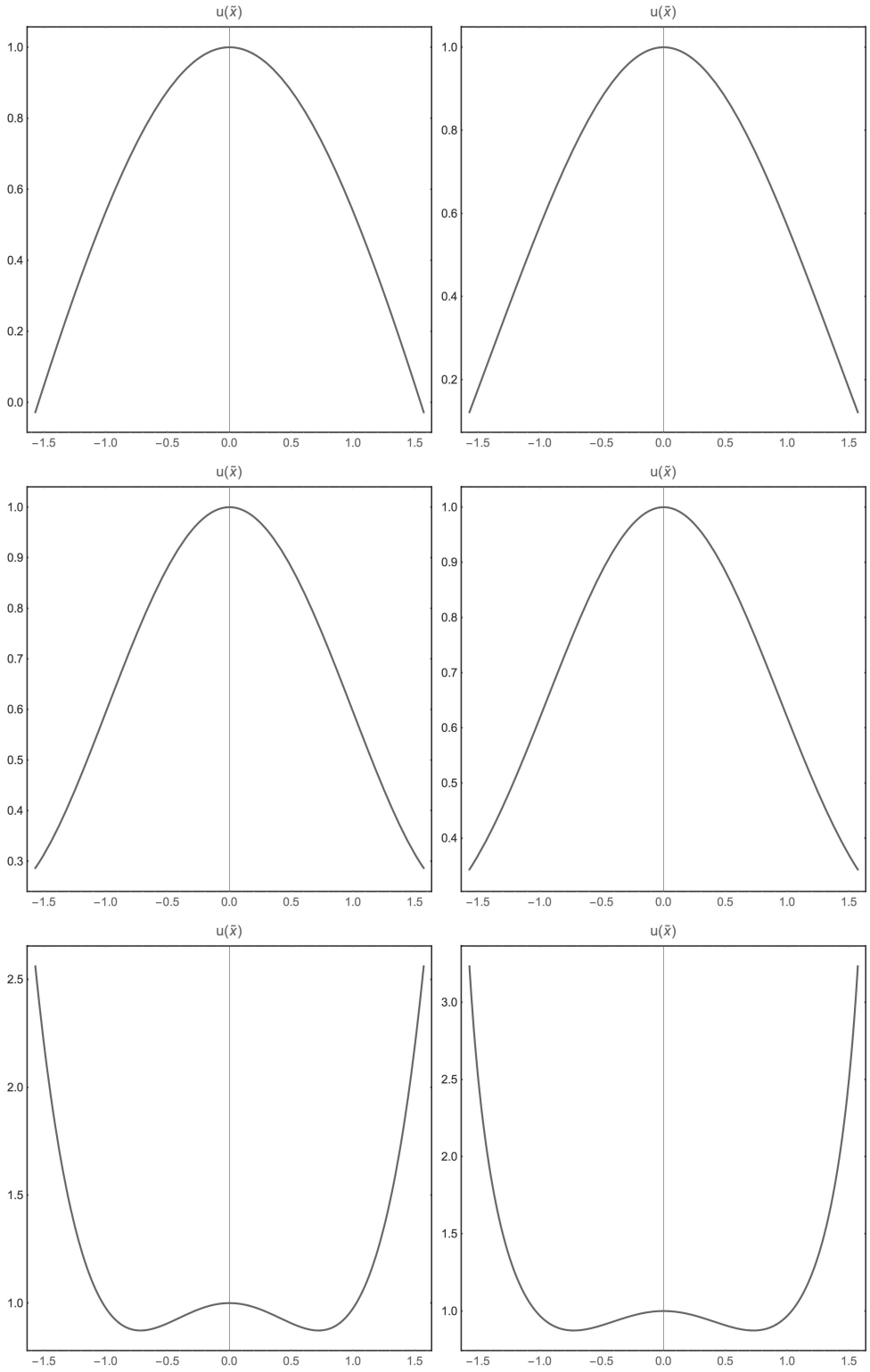


Figura 4.1 Solución numérica a (4.15) –lado izquierdo– y a (4.14) –lado derecho– en el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$, con $\lambda = \{1, 5/2, \exp(4\pi/5)\}$, respectivamente.

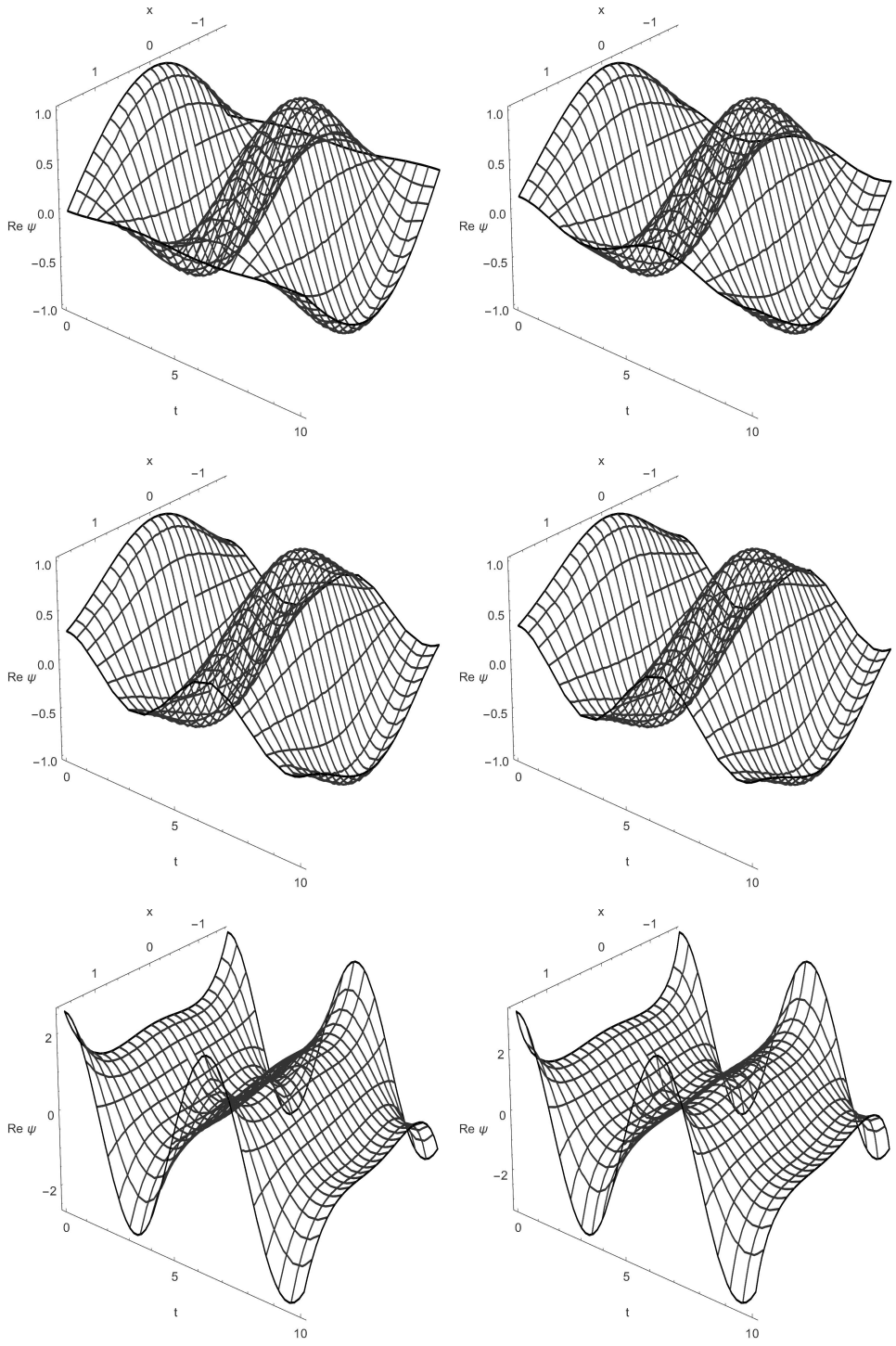


Figura 4.2 Primera aproximación a la solución de (4.8) (parte real). Cada panel corresponde a los casos presentados en la figura 4.1 en un dominio temporal $t \in [0, 10]$ con $\omega = 1$.

Capítulo 5

Soluciones Exactas y Numéricas del Sistema Schrödinger–Poisson

En la literatura se reporta la aplicación de las técnicas analíticas estudiadas en el capítulo 2 a una clase reducida de problemas no lineales, con mayor frecuencia las ecuaciones de: Korteweg–de Vries, Boussinesq, Kadomtsev–Petviashvili, Bour, Liouville, Schrödinger no lineal, Ernst, red de Toda, Yang–Mills, Gross–Neveu, entre otras.

Sin embargo, resolver un problema no lineal por un método u otro (transformada espectral, AKNS, Lax, Miura, Hirota, Zakharov–Shabat, etcétera) requiere de información inicial que se ignora o no se conoce de manera concreta a menos que el problema haya sido resuelto. La labor es completamente heurística y el método, en todo caso, es un apoyo para dar estructura al procedimiento.

A continuación introducimos una modificación al término discreto de la expresión (2.20) y comenzamos por suponer una *pseudo transformada espectral* S para el sistema SP. Como no es posible resolver la ecuación GLM de manera cerrada dada S, corregimos los primeros resultados demandando que las soluciones a (4.8) satisfagan el principio de separación. Las expresiones que hemos obtenido son exactamente solubles en las ecuaciones SP y hasta ahora desconocidas en la literatura.

5.1. Pseudo Transformada Espectral del Sistema SP.

Considérese la colección de datos extendida de (2.16),

$$S[u] := \{R(k),\ -\infty < k < \infty;\ p_n,\ q_n,\ n = 1, 2, \ldots, N,\ \nu \in \mathbb{Z}\}, \tag{5.1}$$

donde k toma valores reales, positivos (o $k^2 = -p_n^2$, $p_n > 0$) cuando se asocia a la parte continua (discreta) del operador de Schrödinger; q el es factor de normalización y ν un nuevo parámetro (discreto) que define el *kernel* de la ecuación GLM. El problema espectral inverso promovido a partir de (2.20) se puede ampliar a la expresión:

$$K(x) := \frac{1}{2\pi}\int_D \mathrm{d}k\ \exp(ikx)R(k) + \sum_{1\le n\le N} q_n\,\Gamma\left[\frac{1}{\nu+1}, p_n(-x)^{\nu+1}\right], \tag{5.2}$$

donde

$$\Gamma(a,z) := \int_z^\infty \mathrm{d}s\ \exp(-s)s^{a-1}, \tag{5.3}$$

es la función *gamma incompleta*.

En el caso especial $\nu = 0$, con $R(k) = 0$, $N = 1$, $p_1 = p$ y $q_1 = q$, se recupera el *kernel* en (2.20) y la transformada espectral de la ecuación KdV.

La pseudo transformada espectral S para el sistema SP (4.8) se introduce como la colección de datos:

$$S[u] := \{R(k) = 0,\ -\infty < k < \infty;\ p_1 = p,\ q_1 = q,\ N = 1, \nu = 1\}, \tag{5.4}$$

llevando a la ecuación GLM a:

$$W(x,y) + q\,\Gamma\left[\frac{1}{2}, p\,(x+y)^2\right] + \mu\, q\int_x^\infty \mathrm{d}z\ W(x,z)\,\Gamma\left[\frac{1}{2}, p\,(z+y)^2\right] = 0, \quad y > x, \tag{5.5}$$

y habiendo introducido el parámetro complejo μ.

Debido a que el *kernel* de (5.5) no es separable, *i.e.* $K(x+y) \neq K(x)K(y)$, es conveniente solucionar $W(x,y)$ en términos de series de von Neumann. La ecuación (2.21), luego de una primerta iteración, es reescrita como:

$$-W(x,y) = K(x+y) - \mu\int_x^\infty \mathrm{d}z\, K(z+y)\left[K(x+z) + \mu\int_x^\infty \mathrm{d}z'\, K(z'+z)W(x,z')\right],$$

intercambiando el orden de integración en el último término y reemplazando variables mudas:

$$-W(x,y) = K(x+y) - \mu \int_x^\infty \mathrm{d}z\, K(z+y)K(x+z) - \mu^2 \int_x^\infty \mathrm{d}z\, K_2(z+y)W(x,z), \quad (5.6)$$

donde $K_2(z+y)$ es una función complejo valuada, continua en algún intervalo acotado $l \in x$ y dada por

$$K_2(z+y) := \int_z^\infty \mathrm{d}z' K(z+z')K(z'+y). \quad (5.7)$$

Si se repite el mismo procedimiento M veces, entonces:

$$-W(x,y) = K(x+y) - \mu\, \sigma_M(x,y) - \rho_M(x,y), \quad (5.8)$$

bajo las definiciones

$$\begin{aligned} \sigma_M(x,y) &:= \sum_{1\le j\le M} \mu^{j-1} \int_x^\infty \mathrm{d}z\, K_j(z+y)K(x+z), \\ \rho_M(x,y) &:= \mu^{M+1} \int_x^\infty \mathrm{d}z\, K_{M+1}(z+y)W(x,z), \end{aligned} \quad (5.9)$$

y donde el j–ésimo *kernel* iterado es

$$K_j(z+y) := \int_z^\infty \mathrm{d}z'\, K_{j-1}(z+z')K(z'+y). \quad (5.10)$$

En la expansión (5.8) se asume que si $|K(x+y)|$ es una función acotada por un número $\epsilon \in \mathbb{R}$ en cualquier intervalo cerrado $l \in x$, entonces la desigualdad $|K(x+y)| \le \epsilon$ implica que $K_j(x+y)$ también es una función acotada para todo $j \ge 2$, es decir, $|K_j(x+y)| \le \epsilon^j l^{j-1}$. Por lo tanto, cada término de la suma $\sigma_M(x,y)$ en (5.9) satisface la inequidad:

$$\left|\mu^{j-1} \int_x^\infty \mathrm{d}z\, K_j(z+y)K(x+z)\right| \le \epsilon\, (\,|\mu|\,\epsilon\, l\,)^{j-1}\, \|K(x+z)\|, \quad (5.11)$$

más aún, si $|\mu|\,\epsilon\,l < 1$, entonces, la secuencia $\{\sigma_M(x,y)\}$ de sumas parciales es una secuencia de Cauchy si para un número real $\delta > 0$ se satisface la desigualdad:

$$\begin{aligned} |\sigma_k(x,y) - \sigma_j(x,y)| &\leq \epsilon \left[\sum_{j+1\leq m\leq k} (\,|\mu|\,\epsilon\,l\,)^{m-1} \right] \|K(x+y)\| \\ &\leq \epsilon\, \frac{(\,|\mu|\,\epsilon\,l\,)^j}{1-|\mu|\,\epsilon\,l}\, \|K(x+y)\| \\ &\leq \delta, \end{aligned} \tag{5.12}$$

para $j \to \infty$. De manera análoga:

$$|\rho_j(x,y)| \leq \epsilon\,(\,|\mu|\,\epsilon\,l\,)^j\, \|W(x,z)\|, \tag{5.13}$$

lo cual significa que $\rho_M(x,y)$ desvanecerá uniformemente en el intervalo l en el límite $M \to \infty$. Bajo estas condiciones, la secuencia $\sigma_M(x,y)$ de funciones continuas converge absoluta y uniformemente, en el intervalo l, a la función:

$$\begin{aligned} \sigma(x,y) &= \sum_{1\leq j<\infty} \mu^{j-1} \int_x^\infty \mathrm{d}z\, K_j(z+y) K(x+z) \\ &= \int_x^\infty \mathrm{d}z \left[\sum_{1\leq j\leq\infty} \mu^{j-1} K_j(z+y) \right] K(x+z) \\ &= \int_x^\infty \mathrm{d}z\, F(z,y;\mu) K(x+z), \end{aligned} \tag{5.14}$$

habiendo introducido $F(z,y;\mu)$ como el *kernel resolvente*.

Por lo anterior, la solución a la ecuación (2.21) tiene la forma

$$-W(x,y) = K(x+y) - \mu\,\sigma(x,y), \quad y > x; \tag{5.15}$$

de manera que para (5.5) se obtiene:

$$-W(x,y) = q\,\Gamma\left[\frac{1}{2},\, p\,(x+y)^2\right] - q\,\mu \int_x^\infty \mathrm{d}z\, F(z,y;\mu)\,\Gamma\left[\frac{1}{2},\, p\,(x+z)^2\right], \tag{5.16}$$

y la solución a las ecuaciones SP de la forma (4.8),

$$\begin{aligned} \left[-\partial_x^2 + \lambda\phi\right] u &= \mp\,\omega u, \\ \phi_{xx} &= |u|^2, \end{aligned} \tag{5.17}$$

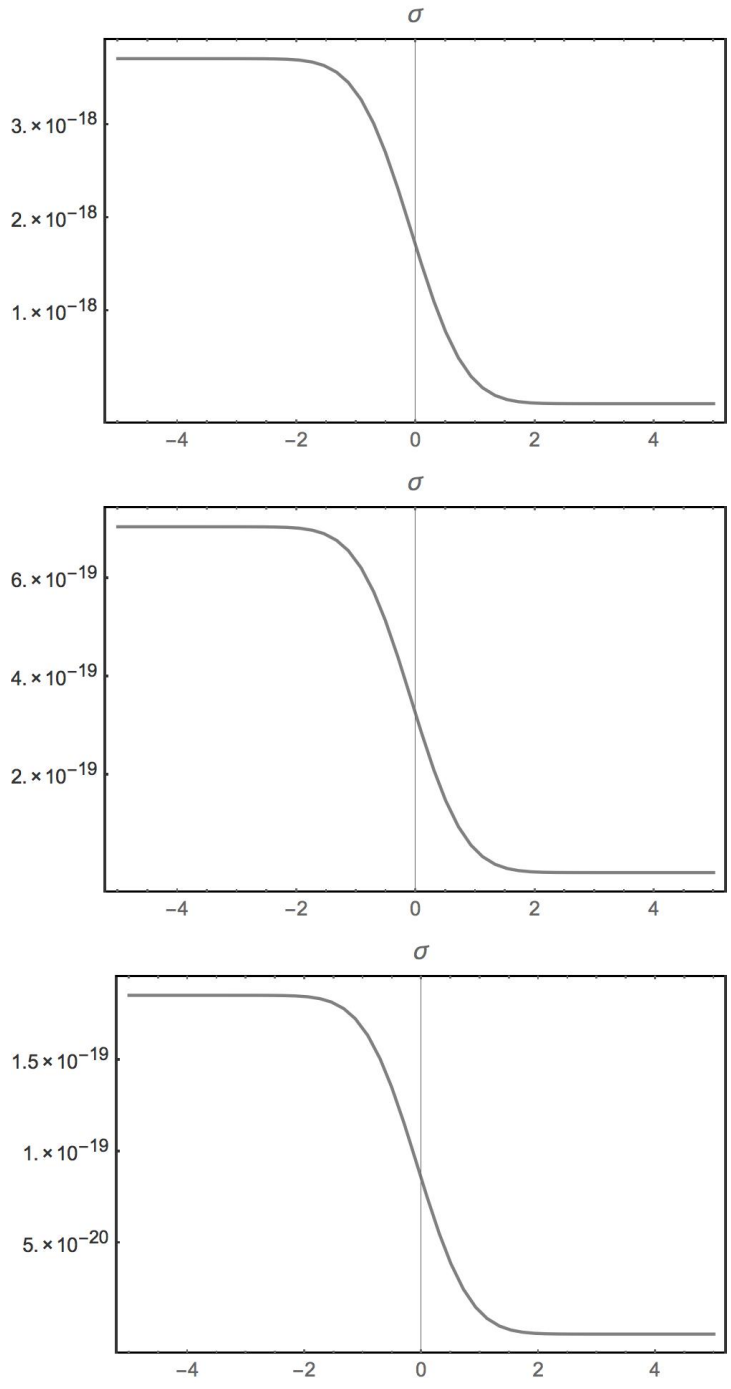


Figura 5.1 Convergencia de $\sigma(x, y)$ en (5.16). Los páneles corresponden a una, dos y tres iteraciones del algoritmo (5.20)–(5.21) con $\mu = 1$. Se observa que $\sigma(x, y)$ tiende a cero conforme se avanza en el número de iteraciones.

está dada, a partir de (5.16), por las fórmulas:

$$\begin{aligned} w(x) &= 2W(x, x+0), \\ w(x) &= \int_x^\infty \mathrm{d}y\, u(y), \\ u(x) &= w_x(x). \end{aligned} \tag{5.18}$$

5.1.1. Comportamiento Asintótico de $F(z, y; \mu)$

El *kernel* resolvente $F(z, y; \mu)$ puede ser construido como el cociente de dos funciones $P(z, y; \mu)$ y $Q(\mu)$ dadas por la expansión en series de la forma:

$$\begin{aligned} P(z, y; \mu) &:= \sum_{0 \le j < \infty} \frac{(-\mu)^j}{j!} B_j(z, y), \\ Q(\mu) &:= \sum_{0 \le j < \infty} \frac{(-\mu)^j}{j!} \beta_j, \end{aligned} \tag{5.19}$$

sujetas a los datos iniciales $B_0(z, y) = K(z + y)$ y $\beta_0 = 1$, mientras que para $j \ge 1$, $B_j(z, y)$ se calcula por medio de la relación recursiva:

$$B_j(x, z) = \beta_j \, K(z + y) - j \int_x^\infty \mathrm{d}s \, K_{j-1}(z + s) \, B_{j-1}(s, y), \tag{5.20}$$

donde

$$\beta_j = \int_l \mathrm{d}z \, B_{j-1}(z, z), \tag{5.21}$$

recordando que l es un intervalo en el dominio de x tal que $K(x + y)$, $y > x$, en (2.21) sea una función holomórfica y acotada. El algoritmo (5.20)–(5.21) funciona como sigue:

$$\begin{array}{ccc} B_0 & \to & \beta_1 \\ \downarrow & \swarrow & \\ B_1 & \to & \beta_2 \\ \downarrow & \swarrow & \\ B_2 & \to & \beta_3 \\ \downarrow & \swarrow & \\ B_3 & \to & \beta_4 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Para la primera iteración (5.20)–(5.21), fijando el valor $\mu = 1$ sin haber pérdida de generalidad, la integral en el miembro derecho de (5.16) es:

$$\begin{aligned} &\int_x^\infty \mathrm{d}z \, F(z, y; 1) \, \Gamma\left[\frac{1}{2}, \, p\,(x + z)^2\right] = \\ &- q\,(x + y)\,\Gamma^2\left[\frac{1}{2}, \, p\,(x + y)^2\right] + \frac{q}{p\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left[\frac{1}{2}, \, p\,(x + y)^2\right] \exp -p^2\,(x + y)^2 \\ &+ \frac{2qp}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \mathrm{d}z \, \exp -p^2(x + z)^2 \left\{(z + y)\,\Gamma\left[\frac{1}{2}, \, p\,(z + y)^2\right] - \frac{q}{p\sqrt{\pi}} \exp -p^2(z + y)^2\right\}, \end{aligned}$$

no podemos evaluar esta última expresión de manera cerrada, no obstante, el cómputo numérico indica que $\sigma(x,y)$ se acerca a cero conforme se avanza en el algoritmo (5.20)–(5.21), como se aprecia en la figura 5.1.

Por lo tanto, dado $F(z,y;1)$, podemos despreciar el segundo término de (5.16) en el límite $j \to \infty$, y así:

$$-W(x,y) = q\,\Gamma\left[\frac{1}{2},\, p\,(x+y)^2\right]; \tag{5.22}$$

aplicando las fórmulas (5.18) a (5.22), entonces la solución general al sistema SP (5.17) es de la forma,

$$u(x) = 2\,q\,v(x)\,\exp[\,-p\,(x+\aleph)^2\,], \tag{5.23}$$

$\aleph$ es una constante de integración, q es el coeficiente normalización, p es un parámetro real ligado a los valores propios (parte discreta) del operador de Schrödinger (*cfr.* sección 2.2) y $v(x)$ una función real a determinar.

5.2. Soluciones Exactas

Supongamos que $v_1 = v_1(x)$ y $v_2 = v_2(x')$ son soluciones que satisfacen las ecuaciones SP, entonces, a fin de que el producto $v_1 v_2$ sea soluble en

$$\left[-\partial_x^2 - \partial_{x'}^2 + \lambda\,\phi_{12}(\,|v_1 v_2|^2\,)\right] v_1 v_2 = \omega\, v_1 v_2, \tag{5.24}$$

es necesario que $\phi = \phi_{12} = \phi_{21}$, de manera que $\phi = \phi_1 + \phi_2 = \phi_2 + \phi_1$. Ello implica que $\phi = a \ln |v|^2$ y $\phi_n = a \ln |v|^2$, donde a es alguna constante y $n = 1, 2$. Por lo tanto, de la expresión (5.23), se requiere que la función v satisfaga tanto esta ley como la ecuación de Poisson, *i.e.* que:

$$(a \ln |v|^2)_{xx} = |v|^2, \tag{5.25}$$

suponiendo que $v(\pm\infty) \to 0$, la solución a esta ecuación es:

$$v = 2ap^2 \frac{\exp p\,(\eta + \aleph)}{\cosh p\,(x - \eta + \aleph)} + \frac{\exp p\,(\xi + \aleph)}{\cosh p\,(x + \xi + \aleph)}, \tag{5.26}$$

con $\xi := (2p)^{-1} \ln 2ap^2$ y $\eta := -(2p)^{-1} \ln 2ap^2$.

Como se comentó en la sección 4.2, la solución (estacionaria) al sistema SP es de la forma $\psi = u(x)\exp(i\omega t)$, con lo cual, de (5.23), finalmente se llega a la expresión:

$$\psi = 2q\left\{2ap^2 \frac{\exp[-p\,(x^2 - \eta + \aleph)]}{\cosh p\,(x - \eta + \aleph)} + \frac{\exp[-p\,(x^2 - \xi + \aleph)]}{\cosh p\,(x + \xi + \aleph)}\right\}\exp(-i\omega t), \tag{5.27}$$

que corresponde a un solitón individual, estacionario del sistema SP (ver figura 5.2), donde el factor global de normalización es:

$$q = \frac{\exp[\,2p\,(\xi + \aleph)\,]}{2a\,\sqrt{2\,\pi\,p}}, \tag{5.28}$$

y la relación de dispersión:

$$\omega = \frac{-p^2 + 12ap^4 - 4a^2p^6 + 2\,(1+2ap^2)^2\left[p - a\lambda \ln\left(\frac{8ap^2}{1+2ap^2}\right)\right]}{(1+2ap^2)^2}, \tag{5.29}$$

además, dado que $\omega \in \mathbb{R}$, entonces, a y λ también son números reales. En las figuras 5.3 y 5.4 se muestran los mapas de contorno de p/a (con $\lambda = 1$) y p/λ (con $a = 1$), respectivamente. No hay evidencia de que ω ($\sim E/\hbar$ en las ecuaciones SN) tome valores exclusivamente discretos.

En las figuras 5.5 y 5.7, se observa el comportamiento de (5.27) para algunos valores de a, p y λ en 5.3 y 5.4. Más aún, la densidad $|\psi|^2$ es constante en el tiempo, como se observa en las figuras 5.6 y 5.8, respectivas a cada panel en 5.5 y 5.7.

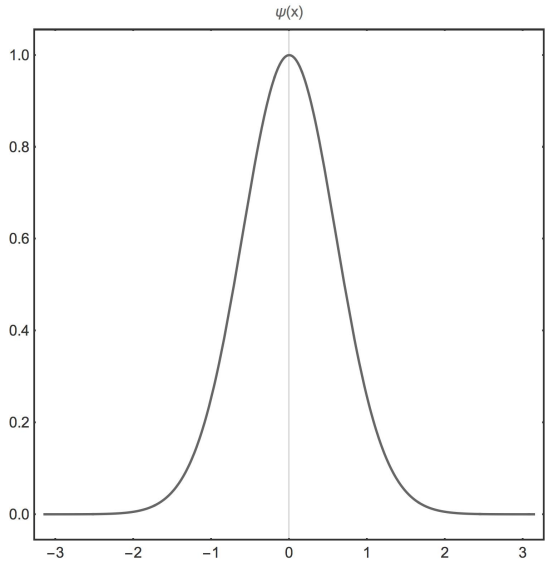


Figura 5.2 Perfil del solitón estacionario del sistema SP. En este ejemplo, $a = p = \lambda = 1$ y $t = 0$, en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Más aún, dado que u en (5.23) satisface la condición de separabilidad, podemos extender la solución (5.27) a más dimensiones. En particular, si nos restrigimos al caso isotrópico en el plano xOy, *i.e.* $p = p_x = p_y$, los solitones individuales se comportan como se muestra en la figura 5.9.

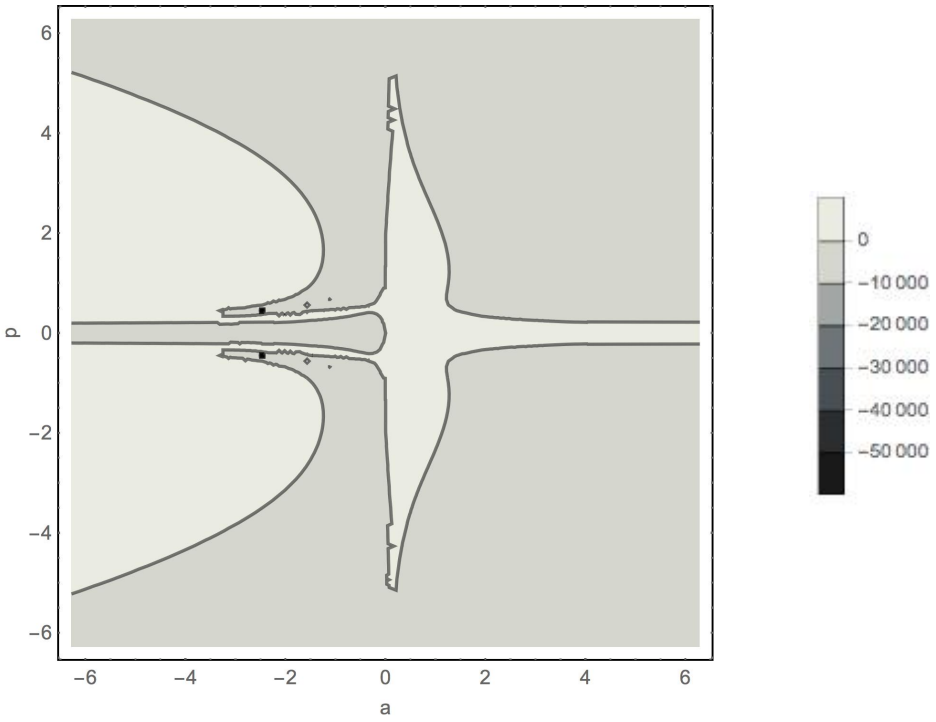


Figura 5.3 Mapa de contorno p/a de (5.29) con $\lambda = 1$.

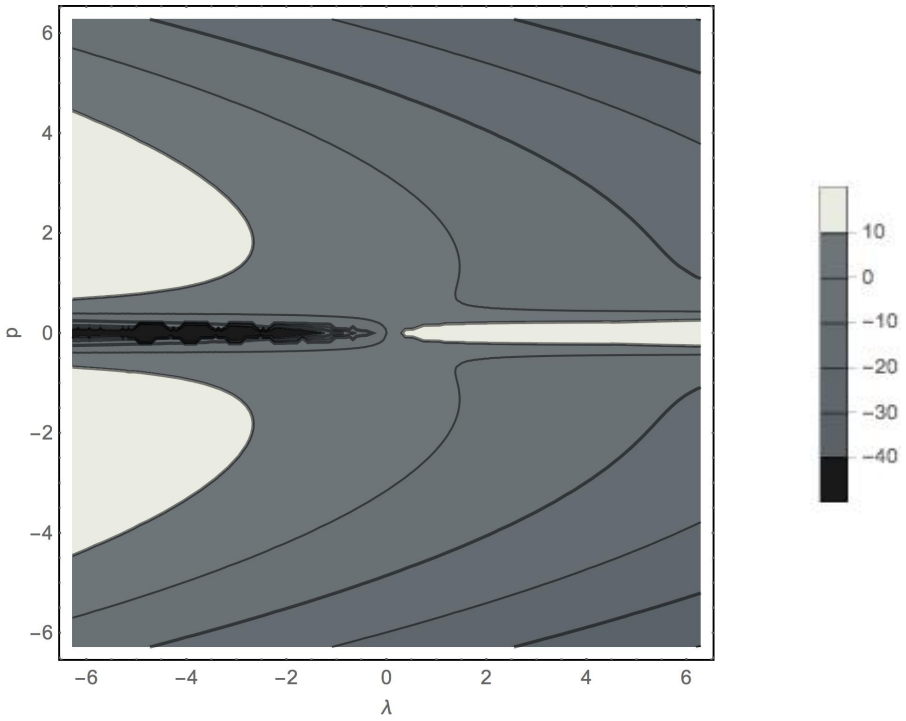
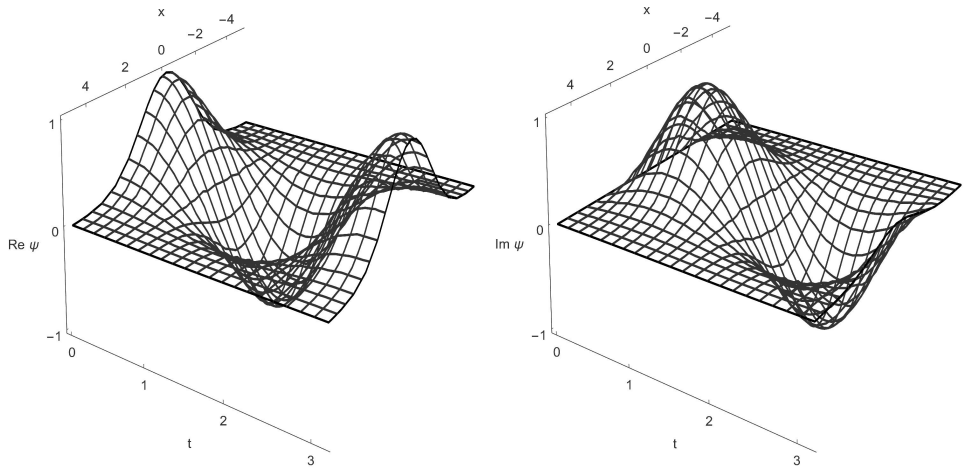
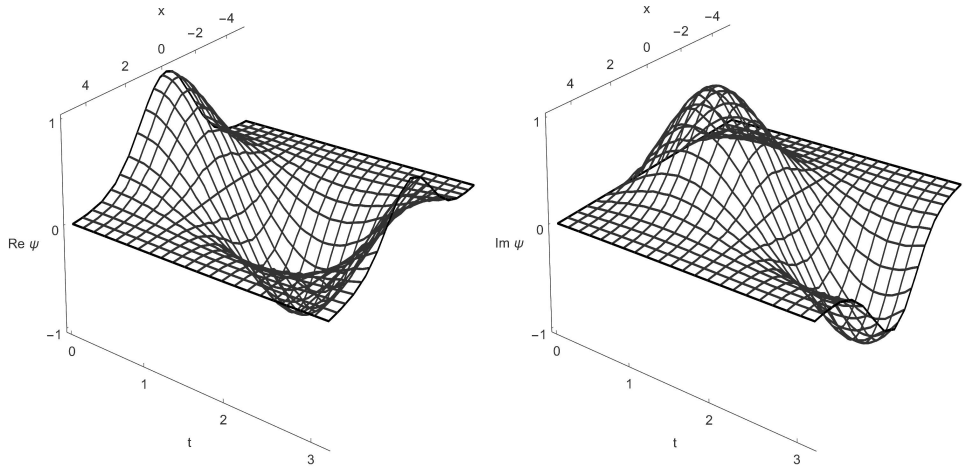


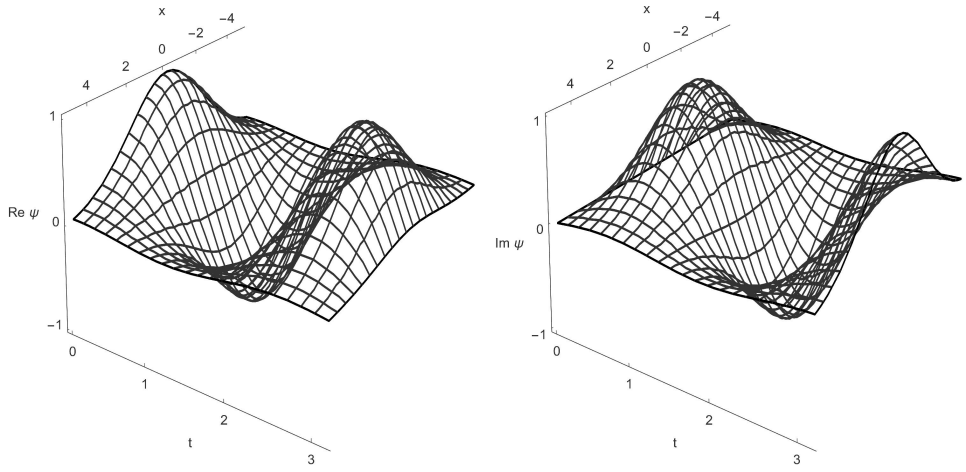
Figura 5.4 Mapa de contorno p/λ de (5.29) con $a = 1$.



(a) $a = 1/\sqrt{2}$, $p = 1/4$

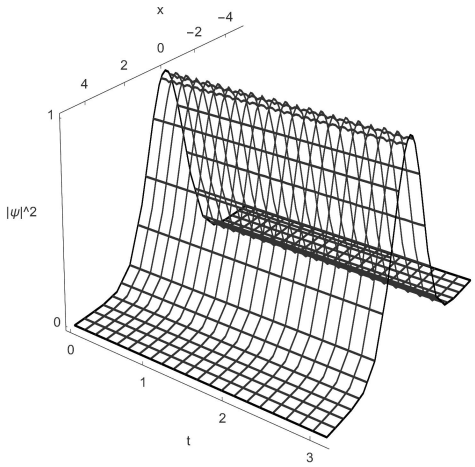


(b) $a = 1/\sqrt{8}$, $p = 1/4$

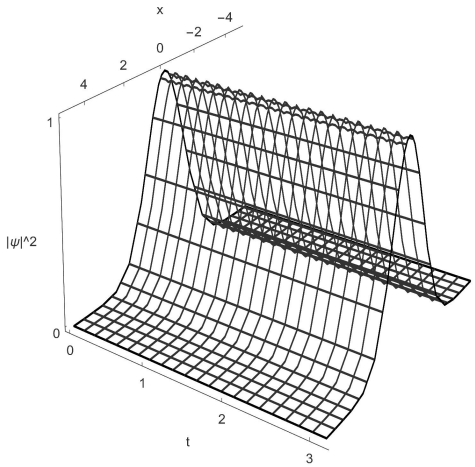


(c) $a = 1/\sqrt{8}$, $p = 1/8$

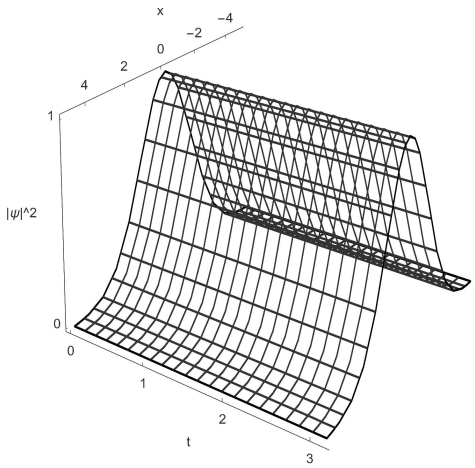
Figura 5.5 Soluciones exactas del sistema SP. En el lado izquierdo (derecho) la parte real (imaginaria) de ψ, para algunos valores arbitrarios de a, p y fijando $\lambda = 1$, en el intervalo espacial $[-5, 5]$ y temporal $[0, \pi]$.



(a) $a = 1/\sqrt{2}$, $p = 1/4$

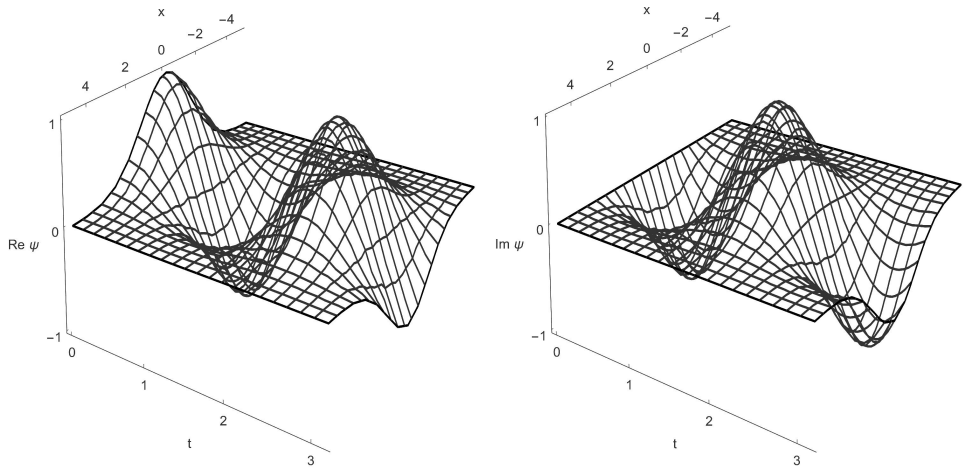


(b) $a = 1/\sqrt{8}$, $p = 1/4$

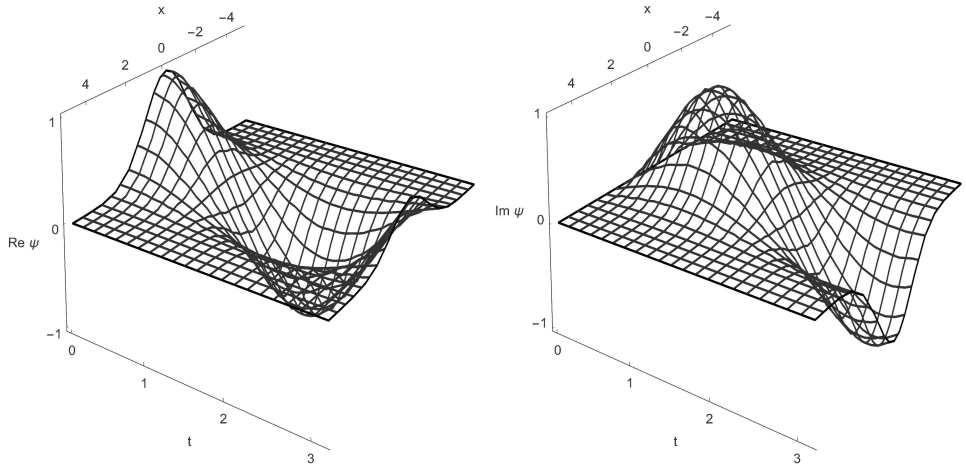


(c) $a = 1/\sqrt{8}$, $p = 1/8$

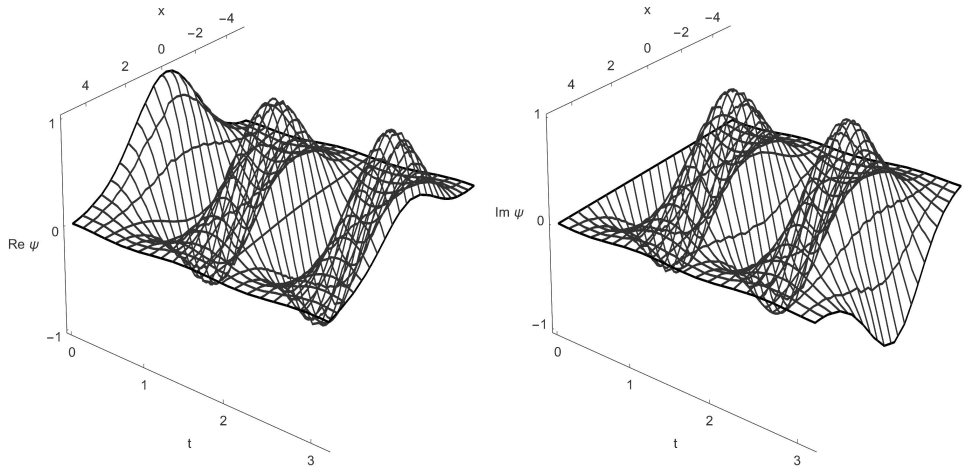
Figura 5.6 Densidad la función de onda. Se emplean los mismos valores de p, a, fijando $\lambda = 1$, así como los mismos intervalos espacial y temporal de la figura 5.5.



(a) $p = 1/4$, $\lambda = -2$

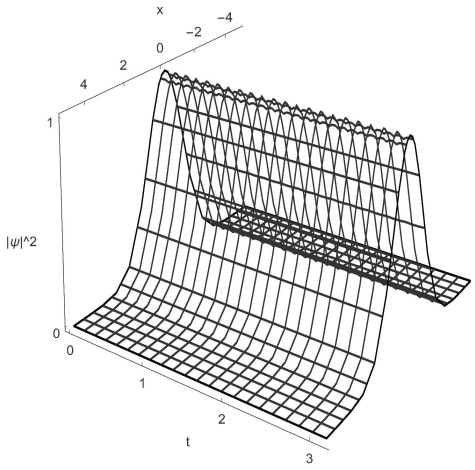


(b) $p = 1/3$, $\lambda = 3/2$

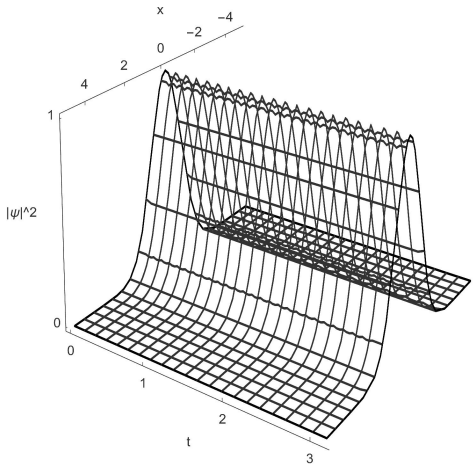


(c) $p = 1/6$, $\lambda = -3/2$

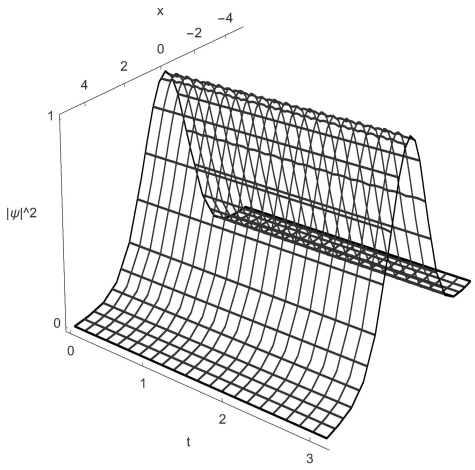
Figura 5.7 Soluciones exactas del sistema SP. En el lado izquierdo (derecho) la parte real (imaginaria) de ψ, para algunos valores arbitrarios de p, λ y fijando $a = 1$, en el intervalo espacial $[-5, 5]$ y temporal $[0, \pi]$.



(a) $p = 1/4$, $\lambda = -2$

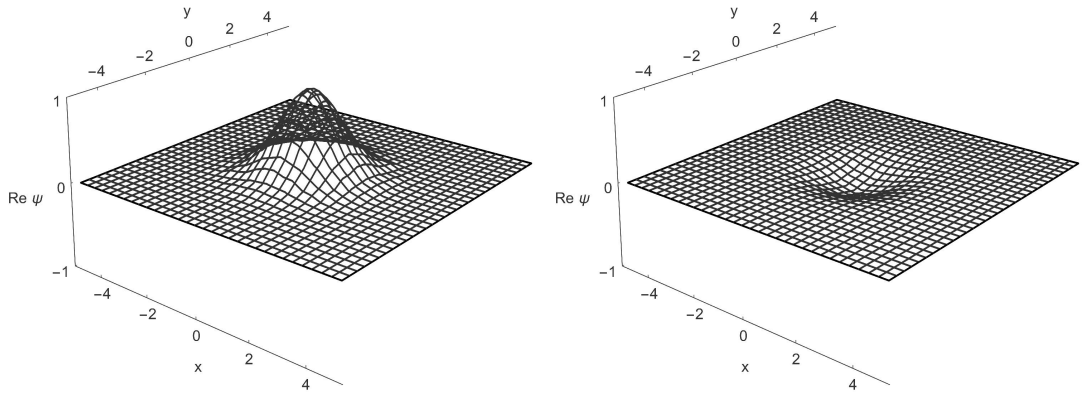


(b) $p = 1/3$, $\lambda = 3/2$

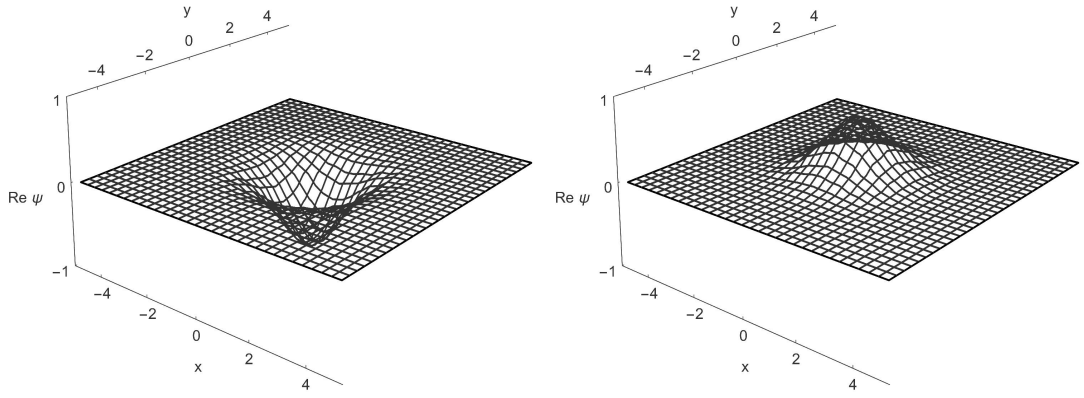


(c) $p = 1/6$, $\lambda = -3/2$

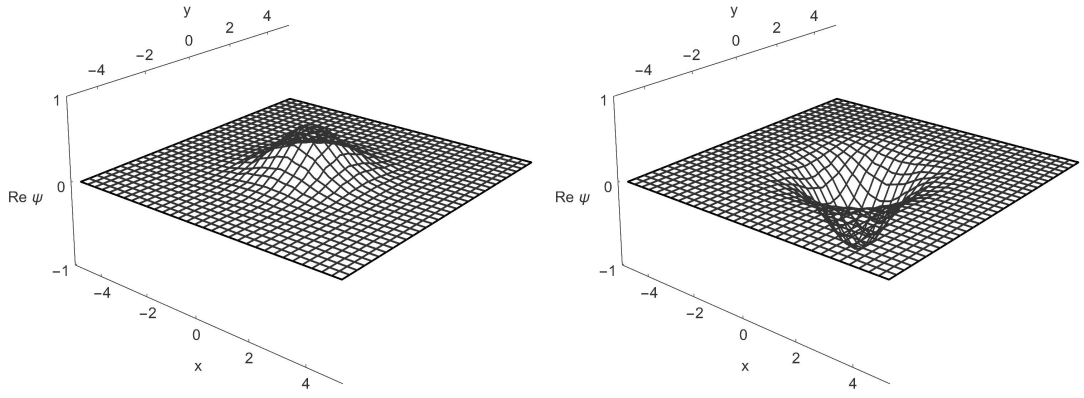
Figura 5.8 Densidad la función de onda. Se emplean los mismos valores de p, λ, fijando $a = 1$, así como los mismos intervalos espacial y temporal de la figura 5.7.



(a) $t = 0$ (b) $t = 2$



(c) $t = 4$ (d) $t = 6$



(e) $t = 8$ (f) $t = 10$

Figura 5.9 Soluciones exactas (estacionarias) del sistema SP en dos dimensiones. En este ejemplo se han elegido los valores $a = 1, p = 1/2, \lambda = 1/2$.

5.3. Soluciones Numéricas

Algunas soluciones numéricas a las ecuaciones (4.8) han sido bien estudiadas en [31, 33, 34]. Durante nuestro trabajo hemos experimentado con algunos aspectos numéricos del sistema SP. Esto se ha hecho en Cospy, una herramienta computacional que permite resolver ecuaciones diferenciales parciales no lineales así como simular eventos de N cuerpos a partir de técnicas de diferencias finitas. El código está equipado con métodos de malla única, malla múltiple y malla adaptativa. El procesamiento de datos se realiza en paralelo y la arquitectura está basada en C++ y Python. Cospy aún se encuentra en la fase de desarrollo[1] y corresponde a una generalización del código evaluado en [35, 36].

Las diferencias finitas implementadas en el código tienen una precisión hasta cuarto orden, empleando los siguientes coeficientes para las aproximaciones centradas [37]:

Orden de derivada	Orden de precisión	Coeficientes de nodos				
		-2	-1	0	1	2
1	2		$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
	4	$\frac{1}{12}$	$\frac{-2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{12}$
2	2		1	-2	1	
	4	$\frac{-1}{12}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{-5}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{-1}{12}$

Para resolver el problema de valor en la frontera de la ecuación de Poisson, se emplea un potencial imaginario de la forma

$$\phi_j = -\frac{i\,\phi_0}{2}\left(2 + \tanh\frac{x_j + x_0}{L} - \tanh\frac{x_0}{L}\right) \tag{5.30}$$

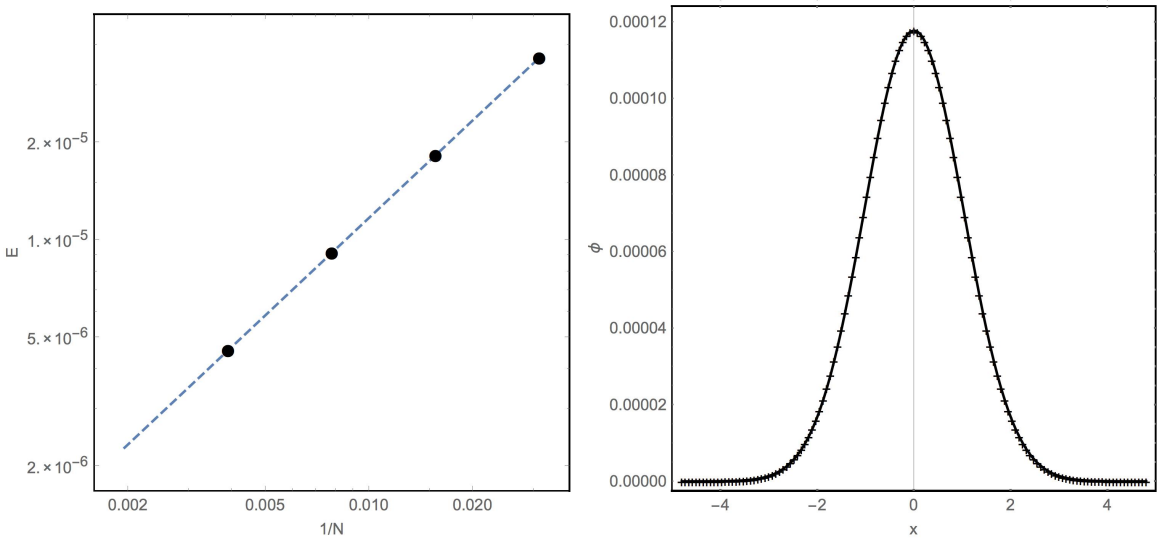
en los puntos extremos de la malla. Este potencial se comporta como una función de escalón suave, cuya amplitud es ϕ_0, ancho L y está desplazado respecto del origen en x_0 unidades.

El potencial (5.30) carece de relevancia física en las ecuaciones SN. Análogo a los potenciales ópticos, cuya finalidad es atrapar partículas en una región imaginaria, este

[1] Autor: Pablo Galaviz, pablo.galaviz@me.com

potencial se implementa con el fin de generalizar las condiciones a la frontera que son propias de las configuraciones en equilibrio y absorber el error en las fronteras[2].

El método empleado para resolver la ecuación de Poisson es convergente, como se muestra en el panel (a) de la figura 5.11, donde el error absoluto en función del grueso de malla ($\propto 1/N$) determina la tasa de convergencia.



(a) (b)

Figura 5.10 Convergencia del método para resolver la parte elíptica de las ecuaciones SP. (a) Tasa de convergencia para 2^n nodos, donde $n = 5, \ldots, 9$. El segmento de recta tiene una pendiente $m \approx 3.37$, valor por debajo del orden de precisión del método. (b) Solución exacta (línea continua) y aproximada (línea punteada) a la ecuación de Poisson, en el dominio $x \in [-6, 6]$, con $N = 256$ nodos.

Podemos comparar las soluciones analíticas presentadas en la sección 5.2 con los resultados numéricos de la evolución del sistema SP. Por ejemplo, considerando las expresiones (5.27)–(5.29), con $a = \lambda = 1$, fijando $q = 51/400$ y $p = 11/50$ para las solución analítica, y simulando con momento inicial $p_x = 0$ en un dominio $x \in [-20, 20]$ para $N = 32, 64, 128$ nodos, el resultado se muestra en la figura 5.11.

En las figuras 5.12–5.15 presentamos algunos de los resultados de la simulación de las ecuaciones SP. A diferencia de las soluciones analíticas presentadas en la sección anterior, el análisis numérico nos ha permitido encontrar soluciones para dos solitones del sistema SP (figuras 5.13 y 5.14). En la figura 5.15 se observa el comportamiento característico de la interacción entre dos solitones (*cfr.* figura 2.2).

[2]Consultar [31] y sus referencias para una discusión más detallada.

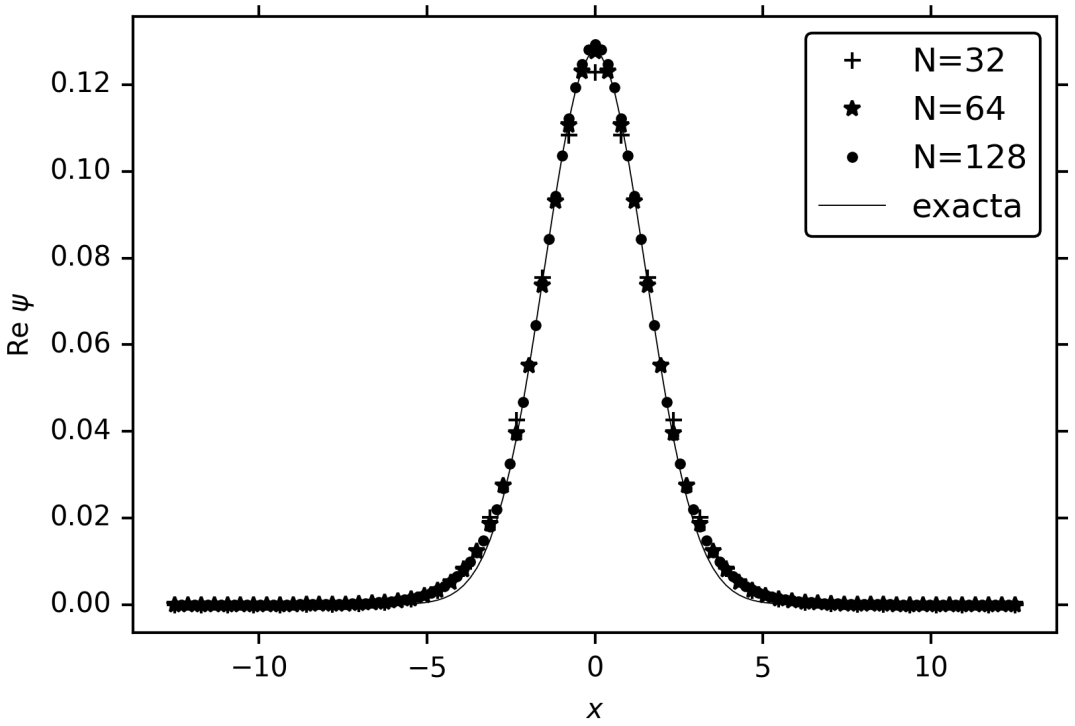
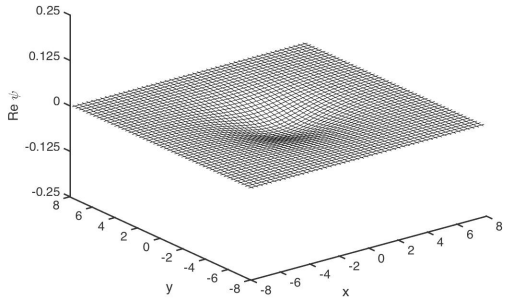
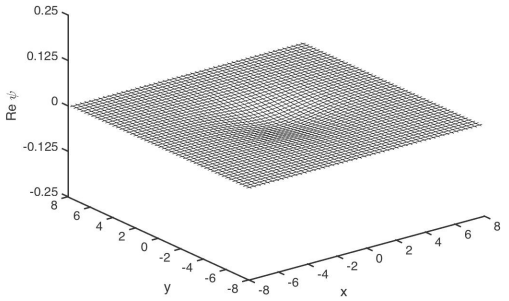


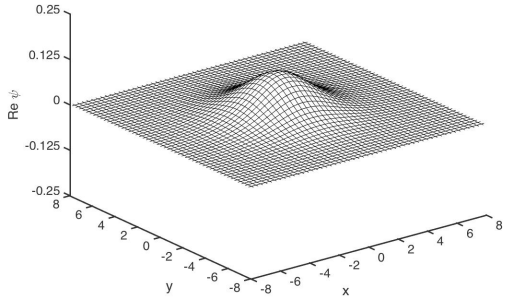
Figura 5.11 Soluciones numéricas y analíticas. Las soluciones numéricas, para $N = 32, 64, 128$ nodos tomando el perfil de un solitón estacionario centrado en el origen con momento inicial $p_x = 0$ y comparando con la solución analítica dada por las expresiones (5.27)–(5.29), con $a = \lambda = 1$, $q = 51/400$ y $p = 11/50$. En este caso, q no es un factor de normalización.



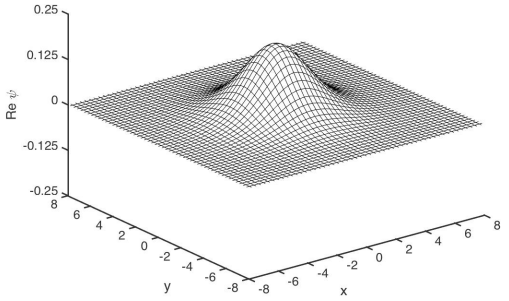
(a) $t = 45/8$



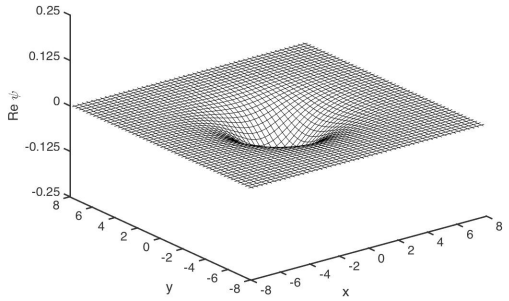
(b) $t = 25/4$



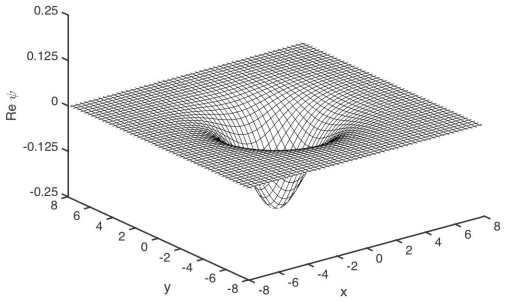
(c) $t = 55/8$



(d) $t = 15/2$

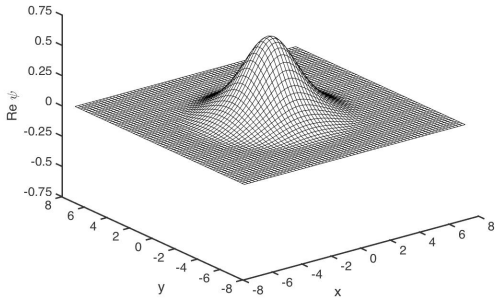


(e) $t = 65/8$

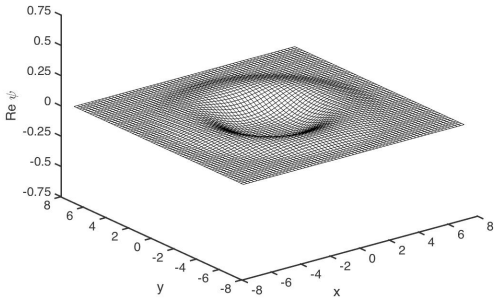


(f) $t = 75/8$

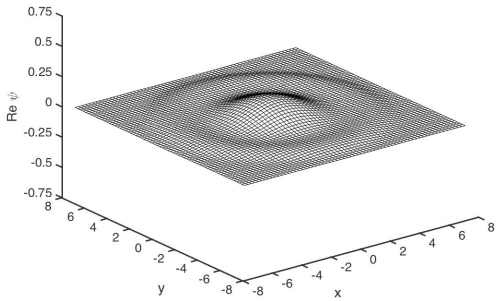
Figura 5.12 Solución numérica de las ecuaciones SP. Se muestra un solitón estacionario centrado en el origen, en el dominio $x, y, z \in [-8, 8]$, en un intervalo temporal $[0, 20]$, con momento inicial $p_0 = p_x = p_y = p_z = 0$ y sujetándose al valor inicial $\psi_0 = 0.22$. Se ha empleado una resolución de malla de 128^3 nodos ($N_x = N_y = N_z = 128$).



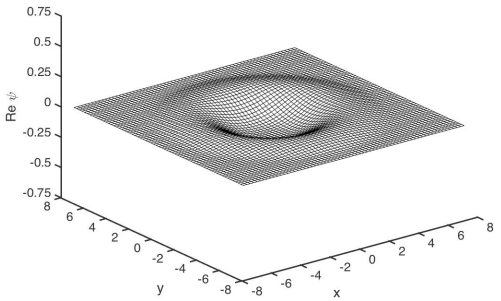
(a) $t = 10/3$



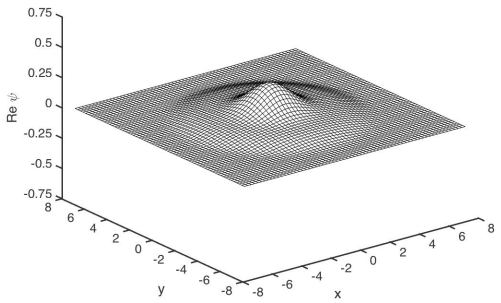
(b) $t = 20/3$



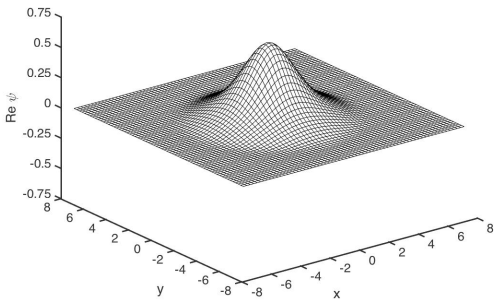
(c) $t = 10$



(d) $t = 40/3$

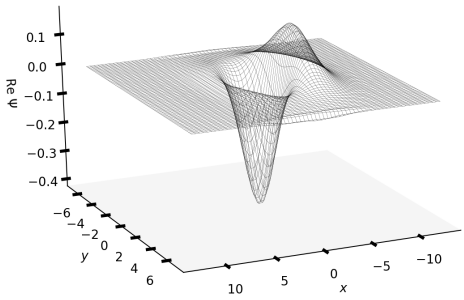


(e) $t = 46/3$

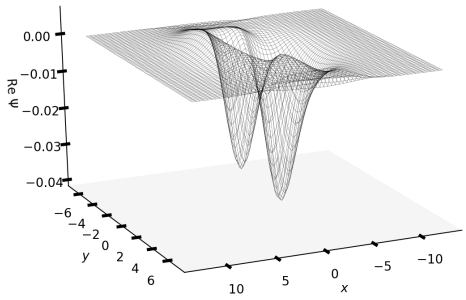


(f) $t = 50/3$

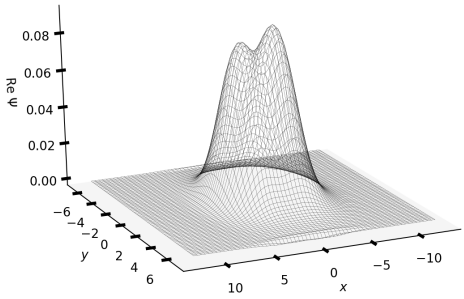
Figura 5.13 Solución numérica para dos solitones del sistema SP, centrados en el origen, en el dominio $x, y, z \in [-8, 8]$, en un intervalo temporal $t \in [0, 20]$, con un momento inicial $p_0 = p_x = p_y = p_z = 0$ (en ambos casos) y $\psi_0 = -0.0353$. En la simulación se han usado 128^3 nodos ($N_x = N_y = N_z = 128$).



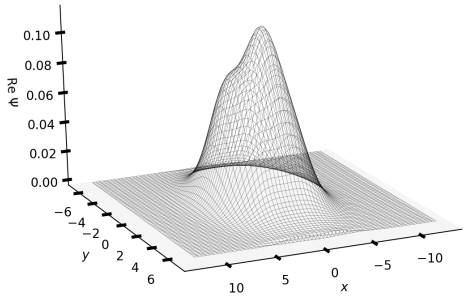
(a) $t = 3/32$



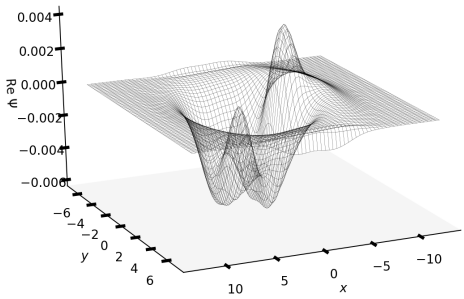
(b) $t = 9/8$



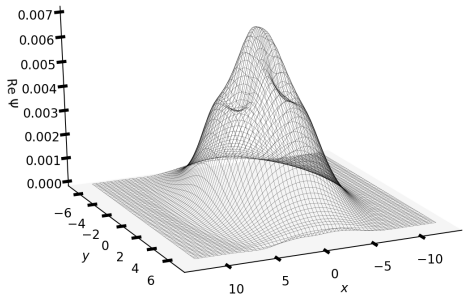
(c) $t = 3/2$



(d) $t = 33/16$

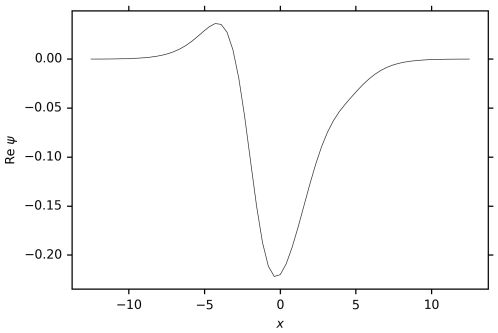


(e) $t = 21/8$

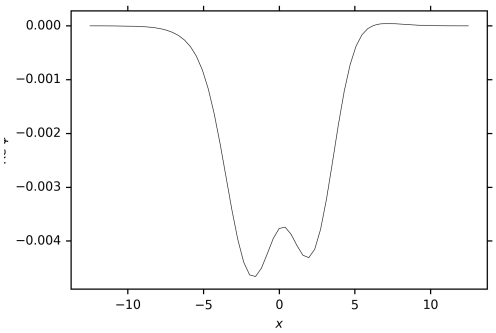


(f) $t = 45/16$

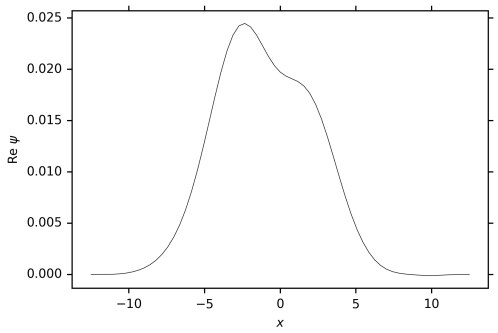
Figura 5.14 Colisión frontal de dos solitones SP. Los conglomerados se centran en $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$, con $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$, $p_x = 1/16$ y $p_y = p_z = 0$ en ambos casos. El dominio numérico $x, y, z \in [-25, 25]$, en un intervalo temporal $t \in [0, 12]$. La simulación se ejecutó con una resolución de 128^3 nodos ($N_x = N_y = N_z = 128$).



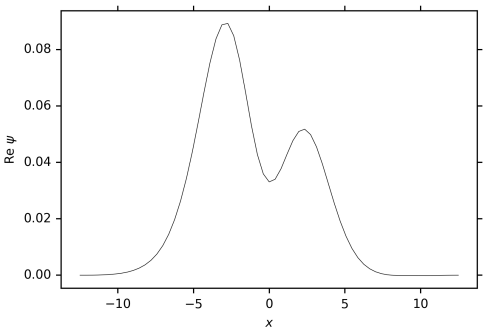
(a) $t = 3/32$



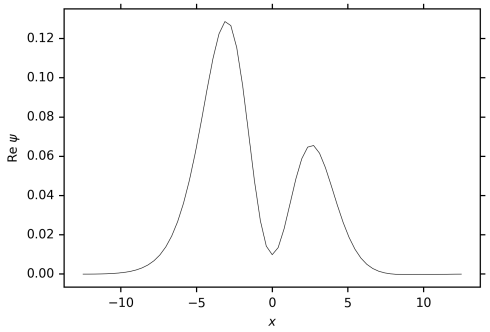
(b) $t = 39/16$



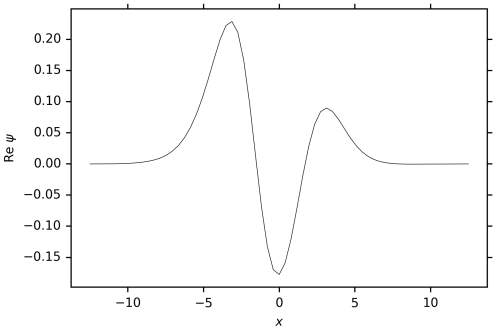
(c) $t = 69/16$



(d) $t = 39/8$



(e) $t = 81/16$



(f) $t = 87/16$

Figura 5.15 Perfil de colisión de dos solitones SP. Los conglomerados corresponden al ejemplo de la figura 5.14.

Capítulo 6

Conclusiones y Resultados

6.1. Conclusiones

Dentro de la teoría moderna de solitones, hemos estudiado la transformada espectral y la imagen AKNS como técnicas de solución de problemas no lineales. Hemos visto cómo ambas metodologías se vinculan entre sí.

La transformada espectral es el análogo no lineal de la transformada de Fourier. Primero, el problema es llevado al dominio espectral donde se induce la evolución temporal y luego es conducido de vuelta al dominio de configuración a partir de la ecuación GLM, misma que proveé de una relación unívoca entre la transformada espectral y la solución del problema no lineal.

En tanto, dentro de los métodos algebraicos, las imágenes de Lax y AKNS –ambas basadas en cambios isoespectrales del operador de Schrödinger— constituyen el análogo no lineal de las imágenes de Heisenberg y Schrödinger en el problema de evolución. Estos dos métodos llevan el problema a una representación lineal para después resolverlo a través de métodos por determinantes (Wronskianos, Casoratianos, regla de Cramer, entre otros).

En este trabajo sólo hemos estudiado soluciones a problemas no lineales que corresponden a la clase de potenciales de *bona fide*. Sin embargo, no es el único tipo de soluciones que puede pertenecer a problemas no lineales. Por su significación física, y también por simplicidad, nos hemos limitado a estudiar soluciones suaves, continuas y de desvanecimiento asintótico.

Se ha estudiado la relación entre la teoría de solitones y la geometría diferencial clásica, a saber, proveniente de las ecuaciones de Gauss–Weingarten. De esta teoría

surgen herramientas –como la transformada de Bäcklund y el teorema de superposición no lineal– que coadyuvan a la generación de soluciones por múltiples solitones.

Observamos que a partir de los atributos geométricos concernientes a soluciones de ecuaciones hiperbólicas, se generan superficies pseudo esféricas y visceversa. En particular estudiamos la generación de superficies hiperbólicas con curvatura negativa a través del sistema de Bianchi.

Una de las propiedades características de los solitones es su carácter no dispersivo y bien localizado aún después de la interacción con otro solitón de la misma especie. El equivalente geométrico de esta cualidad, es el teorema del egregio de Gauss.

No obstante, observamos que no hay una técnica analítica completamente sistemática en la teoría moderna de solitones. Resolver un problema no lineal por uno u otro método requiere, en un principio, de cierta información que se conoce sólo después de haber resuelto el problema.

El análisis numérico es un acercamiento alternativo para la solución de problemas no lineales. Hemos estudiado algunas técnicas por diferencias finitas para resolver problemas tanto de valor en la frontera como problemas de valor inicial.

6.2. Resultados

Con el fin de dar aplicación a las técnicas que estudiamos durante la primera parte de este trabajo, hemos abordado el sistema SP.

Se ha introducido una extensión al *kernel* de la ecuación GLM, mismo que caracteriza el problema espectral inverso. Solamente se ha reformado la parte que concierne al espectro discreto del operador de Schrödinger. En todo caso, es posible recuperar el *kernel* original.

Con ayuda de esta modificación se ha introducido una *pseudo* transformada espectral para el sistema SP –le damos el nombre de *pseudo* porque no corresponde, en un sentido estricto, a la transformada espectral del sistema SP, sino que únicamente se emplea para resolver la ecuación GLM y enseguida probar las soluciones en nuestro problema.

Hemos asumido que la solución es separable. Mediante esta constricción se ha encontrado que el potencial, soluble en la ecuación de Poisson, debe poseer una forma muy particular, a saber, en términos del logaritmo del módulo al cuadrado de la función de onda.

La solución analítica para un solitón individual en (5.27), es exactamente soluble en el sistema SP. La expresión es hasta ahora desconocida en la literatura. Por simplicidad, sólo consideramos soluciones estacionarias.

Hemos obtenido una relación de dispersión en términos del momento lineal y de otros parámetros, ecuación (5.29). Luego de algunas observaciones, no podemos concluir que la velocidad angular del solitón (que se vincula a la energía en las ecuaciones SN) asuma valores discretos.

No hemos podido encontrar soluciones por múltiples solitones. Si para estos efectos se operase directamente de (5.4), habría que resolver de nuevo la ecuación GLM, esta vez de la forma

$$\begin{aligned} W(x,y) + \sum_{1<n\leq N} q_n \, \Gamma\left[\frac{1}{2}, p_n(x+y)^2\right] \\ + \mu \, q \int_x^\infty \mathrm{d}z \; W(x,z) \sum_{1<n\leq N} q_n \, \Gamma\left[\frac{1}{2}, p_n(z+y)^2\right] = 0, \quad y > x, \end{aligned} \tag{6.1}$$

y enseguida buscar $N > 1$ correcciones análogas a $v(x)$; el cómputo parece ser poco viable. Como alternativa está la transformada de Bäcklund de (5.27), que corresponde a un conjunto de ecuaciones acopladas para el que hay que encontrar las condiciones de integrabilidad por algún método de relajación a fin de generar múltiples permutaciones de Bianchi. Esta labor constituye uno de nuestros quehaceres a futuro.

Por otro lado, si ψ es soluble en (5.17) –y por tanto en (4.7)–, entonces, también lo es $\Upsilon(x+\varphi t, t)\exp[\pm i(\omega t + \kappa x)]$, con φ la velocidad del solitón y κ el *número de onda solitaria*. Aunque la función Υ corresponde al caso evolutivo de u en (5.23), esta solución no viene precisamente de la aplicación de las fórmulas (2.29) dada la transformada espectral del tipo:

$$S(t) := \{R(k,t), \; -\infty < k < \infty; \; p_n, \; q_n(t), \; n = 1, 2, \ldots, N, \; \nu \in \mathbb{Z}\}; \tag{6.2}$$

a lo más, podemos suponer que las soluciones no estacionarias de las ecuaciones SP poseen la forma:

$$\psi \sim 2q(t)\left\{2ap^2 \frac{\exp[-p\,(x^2+\varphi t-\eta)]}{\cosh p\,(x-\eta+\aleph)} + \frac{\exp[-p\,(x^2+\varphi t-\xi)]}{\cosh p\,(x+\xi+\aleph)}\right\}\exp(-i[\kappa x+\omega t)]. \tag{6.3}$$

Independientemente de las soluciones exactas, hemos realizado distintos experimentos numéricos de lo cual presentamos algunos resultados: las primeras aproximaciones a partir de desacoplar el sistema SP (sección 4.2) y apoyándonos del código Cospy (sección 5.3), en cuyo caso reportamos soluciones que aún no han sido discutidas en la literatura.

Bibliografía

[1] Russell, J. S. Report on Waves. In *Report of the fourteenth meeting of the British association for the advancement of science*, vol. 1, 311–390 (John Murray, London, 1845).

[2] Seeger, A., Donth, H. & Kochendörfer, A. Theorie der Versetzungen in eindimensionalen Atomreihen III. Versetzungen, Eigenbewegungen und ihre Wechselwirkung. *Z. Phys.* **134**, 173–193 (1953).

[3] Zabusky, N. J. & Kruskal, M. D. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.* **15**, 240–243 (1965).

[4] Boussinesq, J. Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitarie ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences* **72**, 755–759 (1871).

[5] Rayleigh, L. On waves. *Phil. Mag.* **1**, 257–279 (1876).

[6] McCowan, J. On the solitary wave. *Phil. Mag.* **32**, 45–58 (1891).

[7] Korteweg, D. & de Vries, G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.* **39**, 422–443 (1895).

[8] Gardner, C., Greene, J., Kruskal, M. & Miura, R. Method for solving the Korteweg–de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095–1097 (1967).

[9] Lax, P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **21**, 467–490 (1968).

[10] Zakharov, V. & Shabat, A. Exact theory of two–dimensional self–focusing and one–dimensional self–modulation of waves in a nonlinear media. *Soviet Physics JETP* **34**, 62–69 (1971).

[11] Bruschi, M. & Ragnisco, O. Bäcklund transformations and Lax technique. *Lett. Nuovo Cimento* **29**, 331–334 (1980).

[12] Ruffini, R. & Bonazzola, S. Systems of self–gravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state. *Phys. Rev.* **187**, 1767–1783 (1969).

[13] Calogero, F. & Degasperis, A. *Spectral Transform and Solitons*, vol. I (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982).

[14] Lam, G. *Elements of Soliton Theory* (Wiley, New York, 1980).

[15] Ablowitz, M., Kaup, D., Newell, A. & Segur, H. The inverse scattering transform: Fourier analysis for nonlinear problems. *Stud. Appl. Math.* **53**, 249–315 (1974).

[16] Meinel, R., Neugebauer, G. & Steudel, H. *Solitonen: Nichtlineare Strukturen* (Akademie Verlag GmbH, Berlin, 1991).

[17] Darboux, G. Sur une proposition relative aux equations linéaires. *C.R. Acad. Sci. Paris* **94**, 1456–1459 (1882).

[18] Harrison, B. Bäcklund transformation for the Ernst equation of general relativity. *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1197–1200 (1978).

[19] Cadavid, A. & Finkelstein, R. General relativistic solitons. *Phys. Rev. D.* **57**, 7318–7326 (1998).

[20] Struick, D. *Lectures on Classical Differential Geometry* (Addison–Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Mass, 1961).

[21] do Carmo, M. *Differential Geometry of Curves and Surfaces* (Prentice–Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976).

[22] Rogers, C. & Shadwick, W. *Bäcklund Transformations and Their Applications* (Academic Press, New York, 1982).

[23] Prus, R. Geometry of Bianchi surfaces in E^3. *Master Thesis, Warsaw University* (1995).

[24] LeVeque, R. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations* (SIAM, Philadelphia, 2007).

[25] Trefethen, L. *Spectral Methods in MATLAB* (SIAM, Philadelphia, 2000).

[26] Golub, G. & Ortega, J. *Scientific Computing and Differential Equations: An Introduction to Numerical Methods* (Academic Press, New York, 1992).

[27] Wanner, G., Hairer, E. & Nørsett, S. Order stars and stability theorems. *BIT Numerical Mathematics* **18**, 475–489 (1978).

[28] Bialynicki-Birula, I. & Mycielski, J. Nonlinear wave mechanics. *Ann. Phys.* **100**, 62–93 (1976).

[29] Diósi, L. Gravitation and quantum–mechanical localization of macro–objects. *Phys. Lett.* **105A**, 199–202 (1984).

[30] Penrose, R. On gravity's role in quantum state reduction. *Gen. Relativ. Gravit.* **28**, 581–600 (1996).

[31] Guzmán, F. S. & Ureña-López, L. Evolution of the Schrödinger–Newton system for self–gravitating scalar field. *Phys. Rev. D.* **69**, 124033 (2004).

[32] Suárez, A. & Matos, T. Structure formation with scalar–field dark matter: the fluid approach. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **416**, 87–93 (2011).

[33] Moroz, I., Penrose, R. & Tod, P. Spherically–Symmetric solutions of the Schrödinger–Newton equations. *Class. Quantum Grav.* **15**, 2733–2742 (1998).

[34] Moroz, I. & Tod, P. An analytical approach to the Schrödinger–Newton equations. *Nonlinearity* **12**, 201–216 (1999).

[35] Galaviz, P., Brügmann, B. & Cao, Z. Numerical evolution of multiple black holes with accurate initial data. *Phys. Rev. D.* **82** (2010).

[36] Galaviz, P. *Numerical simulations of three black holes.* Ph.D. thesis, Friedrich–Schiller–Universität Jena (2010).

[37] Fornberg, B. Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids. *Mathematics Of Computation* **51**, 699–706 (1988).

Anexo A

Ecuaciones Evolutivas Integrables

La siguiente lista no es un compendio completo de aquellas ecuaciones evolutivas no lineales que son susceptibles a la integración mediante alguna de las técnicas descritas en el capítulo 2.

Familia Korteweg–de Vries	
Korteweg–de Vries (KdV)	$u_t + u_{xxx} + 6u_x u = 0$
Peregrine–Benjamin–Bona–Mahoney	$u_t + u_x - u_{txx} + 6u_x u = 0$
KdV transicional	$u_t + u_{xxx} - 6f(t)u_x u = 0$ $f(\pm\infty) = \pm 1$
KdV cilíndrica	$u_t + u_{xxx} - [6u_x - (2t)^{-1}]u = 0$
KdV esférica	$u_t + u_{xxx} - (6u_x - t^{-1})u = 0$
KdV modificada	$u_t + u_{xxx} \pm 6u_x u^2 = 0$
Kadomtsev–Petviashvili o KdV 2–dimensional	$(u_t + u_{xxx} - 6u_x u)_x \pm u_{yy} = 0$
Burgers	$u_t - u_{xx} - 2uu_x = 0$
Boussinesq	$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxx} + 3(u^2)_{xx} = 0$
Benjamin–Ono	$u_t + \mathbf{H}u_{xx} - 6u_x u = 0$ $\mathbf{H}f(x) = \pi^{-1}\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \, \frac{f(y)}{y - x}$

Todas las ecuaciones que aparecen en la lista anterior satisfacen la clase (2.1). Otras ecuaciones que pueden o no satisfacer la clase (2.1) pero en cambio satisfacen la clase generalizada (2.38) son:

Otras Ecuaciones Evolutivas No Lineales	
Bour	$u_{xt} \pm \sin u = 0$
	$u_{xx} - u_{tt} \pm \sin u = 0$
Ernst	$(\mathrm{Re}\, E)^{-1} (E_\rho^2 + E_z^2) = E_{\rho\rho} + \rho^{-1} E_\rho + E_{zz}$
	$(\mathrm{Re}\, E)^{-1} (\mathrm{grad}\, E)^2 = \Delta E$
Schrödinger no lineal	$iu_t + u_{xx} \pm 2\lvert u\rvert^2 u = 0$
Liouville	$u_{xt} = \exp(\eta\, u)$
Wadati–Konno–Ichikawa–Schimizu	$iu_t + \left[(1 + \lvert u\rvert^2)^{-1/2} u\right]_{xx} = 0$
Phi–Cuatro	$\phi_{tt} - \phi xx - \phi + \phi^3 = 0$
Harry Dim	$v_t = v_{xxx} v^3$
	$u_t + 2u_{xxx}^{-1/2} = 0, \quad u = v^{-2}$

Los siguientes conjuntos de datos caracterizan las matrices de la clase AKNS (2.47) asociadas a alguna de las ecuaciones no lineales de la lista previa.

Korteweg–de Vries

$$
\begin{aligned}
A &= -\lambda_x + i2(\lambda k - 2k^3) \\
B &= 4\lambda k^2 - \lambda_{xx} - 2\lambda^2 + i2\lambda_x k \\
C &= 2\lambda - 4k^2 \\
\mu &= -1 \\
\lambda &= u
\end{aligned}
$$

Bour

$$
\begin{aligned}
A &= i\frac{\cos u}{4k} \\
B &= i\frac{\sin u}{4k} \\
C &= B \\
\mu &= -\lambda
\end{aligned}
$$

Schrödinger No Lineal

$$
\begin{aligned}
A &= -i(\lambda\mu + 2k^2) \\
B &= 2\lambda k + i\lambda_x \\
C &= 2\mu k - i\mu_x \\
\mu &= \pm\lambda \\
\lambda &= u
\end{aligned}
$$

Ernst

$$
\begin{aligned}
E(\rho,\zeta) := E(z), \quad z &:= \rho + i\zeta \\
a &= \frac{E_z}{2\mathrm{Re}\, E} \\
b &= \frac{E_z^*}{2\mathrm{Re}\, E} \\
\mathbf{D}^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{k(k^2-1)}{2(z+z^*)}\frac{\partial}{\partial k} \\
\mathbf{D}^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{k^2-1}{2k(z+z^*)}\frac{\partial}{\partial k}
\end{aligned}
$$

para el sistema lineal

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U} &= \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{V} &= \begin{pmatrix} a^* & 0 \\ 0 & b^* \end{pmatrix} + \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 0 & a^* \\ b^* & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Anexo B

Relación Entre la Transformada Espectral y la Imagen AKNS

Las funciones $a(x,k,t)$ y $b(x,k,t)$ en la expresión (2.39) pueden ser expandidas en términos de sus potencias en k para rastrear el par de ecuaciones lineales que satisfaga la condición de integrabilidad debido a la ecuación de la clase (2.1) –*cf.* el *ansatz* de la forma (2.47). Aunque en general estas dos funciones obedecen a la siguiente forma explícita

$$a(x,k,t) := \frac{\widetilde{\alpha}(-4k^2,\mathbf{\Lambda};t)u_x(x,t) - \widetilde{\beta}(-4k^2,\mathbf{\Lambda};t)u_t(x,t) + ik\alpha(-4k^2,t)}{\widetilde{\beta}(-4k^2,t)},$$
$$b(x,k,t) := \frac{2\int_x^\infty \mathrm{d}y\,\left[\widetilde{\alpha}(-4k^2,\mathbf{\Lambda};t)u_y(y,t) - \widetilde{\beta}(-4k^2,\mathbf{\Lambda};t)u_t(y,t)\right] + \alpha(-4k^2,t)}{\widetilde{\beta}(-4k^2,t)};$$

y a su vez

$$\widetilde{\alpha}(\zeta_1,\zeta_2;t) := \frac{\alpha(\zeta_1,t)-\alpha(\zeta_2,t)}{\zeta_1-\zeta_2},$$
$$\widetilde{\beta}(\zeta_1,\zeta_2;t) := \frac{\beta(\zeta_1,t)-\beta(\zeta_2,t)}{\zeta_1-\zeta_2};$$

con α y β polinomios en ζ de la forma

$$\alpha(\zeta,t) = \sum_{0\leq n<N} \alpha_n(t)\zeta^n,$$
$$\beta(\zeta,t) = \sum_{0\leq n<N} \beta_n(t)\zeta^n.$$

Más aún, la ecuación de evolución del operador de Schrödinger que corresponde a (2.38) es

$$\mathbf{H}_t\beta(-4\mathbf{H},t)=[\mathbf{M},\mathbf{H}], \tag{B.1}$$

donde ahora

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}:=\\&\mathbf{D}\alpha(-4\mathbf{H},t)+\sum_{0\le n<N}\left[\alpha_n(t)\mathbf{P}_n-\beta_n(t)\mathbf{Q}_n\right](-4\mathbf{H})^{n-m-1},\quad m=0,1,\ldots,n-1,\end{aligned} \tag{B.2}$$

sujeto a las abreviaciones

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_n:=\mathbf{P}_n(x,t)&=\sum_{0\le m<n-1}\left\{2\left[\int_x^\infty \mathrm{d}y\,\mathbf{\Lambda}^m u_y(y,t)\right]\mathbf{D}-\mathbf{D}\int_x^\infty \mathrm{d}y\,\mathbf{\Lambda}^m u_y(y,t)\right\},\\ \mathbf{Q}_n:=\mathbf{Q}_n(x,t)&=\sum_{0\le m<n-1}\left\{2\left[\int_x^\infty \mathrm{d}y\,\mathbf{\Lambda}^m u_t(y,t)\right]\mathbf{D}-\mathbf{D}\int_x^\infty \mathrm{d}y\,\mathbf{\Lambda}^m u_t(y,t)\right\}.\end{aligned}$$

A su vez, las correspondientes ecuaciones de evolución para la transformada espectral son:

$$\beta(-4k^2,t)R_t(k,t)=i2k\alpha(-4k^2,t)R(k,t), \tag{B.3}$$

para la parte contínua y

$$\begin{aligned}p_{n,t}(t)&=0,\\ \beta(4p_n^2,t)q_{n,t}(t)&=-2p_n\,\alpha(4p_n^2)\,q_n(t),\quad n=1,2,\ldots,N,\end{aligned} \tag{B.4}$$

para la parte discreta del espectro, donde se puede notar que los valores propios del operador de Schrödinger son constantes para todo t y por lo tanto la evolución dada por (B.1) es isoespectral. Este último tratamiento generaliza las relaciones de evolución (2.29) y, por tal motivo, a la transformada espectral sujeta a la clase (2.1) estudiada en la sección 2.2.

Anexo C

Fórmulas de Diferencias Finitas

Algunas de las fórmulas más comunes para aproximar, por malla fija, la primera y la segunda derivada de una función hipotética u respecto de su variable independiente x.

Fórmulas para la primera derivada	
$u_x(x_n) \approx$	Término de truncado
$\frac{u(x_{n-2})-4u(x_{n-1})+3u(x_n)}{2h}$	$\frac{1}{3}h^2\,u^{(3)}(x_n)$
$\frac{-3u(x_n)+4u(x_{n+1})-3u(x_{n+2})}{2h}$	$\frac{1}{3}h^2\,u^{(3)}(x_n)$
$\frac{-u(x_{n-1})+u(x_{n+1})}{2h}$	$\frac{1}{6}h^2\,u^{(3)}(x_n)$
$\frac{-u(x_{n-3})+6u(x_{n-2})-18u(x_{n-1})+10u(x_n)+3u(x_{n+1})}{12h}$	$\frac{1}{20}h^4\,u^{(5)}(x_n)$
$\frac{-3u(x_{n-1})-10u(x_n)+18u(x_{n+1})-6u(x_{n+2})+u(x_{n+3})}{12h}$	$\frac{1}{20}h^4\,u^{(5)}(x_n)$
$\frac{u(x_{n-2})-8u(x_{n-1})+8u(x_{n+1})-u(x_{n+2})}{12h}$	$\frac{1}{30}h^4\,u^{(5)}(x_n)$
$\frac{u(x_{n-4})-8u(x_{n-3})+30u(x_{n-2})-80u(x_{n-1})+35u(x_n)+24u(x_{n+1})-2u(x_{n+2})}{60h}$	$\frac{1}{105}h^6\,u^{(7)}(x_n)$
$\frac{2u(x_{n-2})-24u(x_{n-1})-35u(x_n)+80u(x_{n+1})-30u(x_{n+2})+8u(x_{n+3})-u(x_{n+4})}{60h}$	$\frac{1}{105}h^6\,u^{(7)}(x_n)$
$\frac{-u(x_{n-3})+9u(x_{n-3})-45u(x_{n-1})+45u(x_{n+1})-9u(x_{n+2})+u(x_{n+3})}{60h}$	$\frac{1}{140}h^6\,u^{(7)}(x_n)$

Fórmulas para la segunda derivada

$u_{xx}(x_n) \approx$	Término de truncado
$\frac{-u(x_{n-3})+4u(x_{n-2})-5u(x_{n-1})+2u(x_n)}{h^2}$	$\frac{11}{12}h^2\,u^{(4)}(x_n)$
$\frac{2u(x_n)-5u(x_{n+1})+4u(x_{n+2})-3u(x_{n+3})}{h^2}$	$\frac{11}{12}h^2\,u^{(4)}(x_n)$
$\frac{u(x_{n-1})-2u(x_n)+u(x_{n+1})}{h^2}$	$\frac{1}{12}h^2\,u^{(4)}(x_n)$
$\frac{u(x_{n-4})-6u(x_{n-3})+14u(x_{n-2})-4u(x_{n-1})-15u(x_n)+10u(x_{n+1})}{12h^2}$	$\frac{13}{180}h^4\,u^{(6)}(x_n)$
$\frac{10u(x_{n-1})-15u(x_n)-4u(x_{n+1})+14u(x_{n+2})-6u(x_{n+3})+u(x_{n+4})}{12h^2}$	$\frac{13}{180}h^4\,u^{(6)}(x_n)$
$\frac{-u(x_{n-2})+16u(x_{n-1})-30u(x_n)+16u(x_{n+1})-u(x_{n+2})}{12h^2}$	$\frac{1}{90}h^4\,u^{(6)}(x_n)$
$\frac{-2u(x_{n-5})+16u(x_{n-4})-54u(x_{n-3})+85u(x_{n-2})+180u(x_{n-1})-378u(x_n)+214u(x_{n+1})-11u(x_{n+2})}{180h^2}$	$\frac{47}{5040}h^6\,u^{(8)}(x_n)$
$\frac{-11u(x_{n-2})+214u(x_{n-1})-378u(x_n)+180u(x_{n+1})+85u(x_{n+2})-54u(x_{n+3})+16u(x_{n+4})-2u(x_{n+5})}{180h^2}$	$\frac{47}{5040}h^6\,u^{(8)}(x_n)$
$\frac{2u(x_{n-3})-27u(x_{n-2})+270u(x_{n-1})-490u(x_n)+270u(x_{n+1})-27u(x_{n+2})+2u(x_{n+3})}{180h^2}$	$\frac{1}{560}h^6\,u^{(8)}(x_n)$

Anexo D

Clasificación de las EDP de Segundo Orden

Considérese la ecuación diferencial parcial semi–lineal de segundo orden en dos variables independientes x, y:

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = \phi\left(x, y, u, u_x, u_y\right), \tag{D.1}$$

donde se supone a a, b y c como funciones suficientemente suaves tales que tengan derivadas contínuas por lo menos a segundo orden.

Dado un punto (x, y), la ecuación (D.1) puede ser:

Tipo	Condición
Elíptica	$b^2 - ac < 0$
Parabólica	$b^2 - ac = 0$
Hiperbólica	$b^2 - ac > 0$

La ecuación (D.1) puede ser reducida a su forma canónica, en tal caso, primero es útil escribir su ecuación característica

$$a\,\mathrm{d}y^2 - 2b\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + c\,\mathrm{d}x^2 = 0,$$

de lo cual se obtienen las ecuaciones:

$$a\,\mathrm{d}y - \left(b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{D.2}$$

y a partir de aquí encontrar las integrales, como se verá a continuación.

D.1. Forma canónica de las ecuaciones elípticas

Aquí las integrales a las ecuaciones en (D.2) son complejas. En este caso la propagación a lo largo de las curvas características no determina una solución a la ecuación diferencial con significado físico obvio.

Se propone que la integral de la primera ecuación en (D.2) tenga la forma

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C,$$

donde $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$.

Haciendo el cambio de variables $(x, y) \to (\xi, \eta)$ mediante las relaciones

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y),$$

entonces la ecuación (D.1) se reduce a su forma canónica

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \phi\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right). \tag{D.3}$$

En el caso $\phi = 0$, (D.3) corresponde a la ecuación de Laplace.

D.2. Forma canónica de las ecuaciones parabólicas

Para este caso las ecuaciones en (D.2) tienen una integral en común,

$$\varphi(x, y) = C.$$

Ahora, considérese el cambio de variables $(x, y) \to (\xi, \eta)$ a través de las relaciones

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y),$$

con η una función suficientemente suave tal que satisfaga la condición de no degeneración del Jacobiano $D(\xi, \eta)/D(x, y)$ para algún dominio dado. Entonces la ecuación (D.1) se

reduce a su forma canónica

$$u_{\eta\eta} = \phi\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right). \tag{D.4}$$

La función η se puede tomar como $\eta = x$ ó $\eta = y$, la forma general $\eta = \eta(x, y)$ se toma para simplificar el lado derecho de la ecuación (D.4).

Por ejemplo, en el caso partícular donde $\phi = u_\xi$, (D.4) corresponde a la ecuación de calor–difusión.

D.3. Forma canónica de las ecuaciones hiperbólicas

Las integrales de las ecuaciones en (D.2) son

$$\varphi(x, y) = C_1, \qquad \psi(x, y) = C_2,$$

donde estas integrales representan dos familias (distintas) de curvas características reales.

Haciendo el cambio de variables $(x, y) \to (\xi, \eta)$ mediante las relaciones

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y),$$

la ecuación (D.1) se reduce a su forma canónica

$$u_{\xi\eta} = \phi_1\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right). \tag{D.5}$$

También, aplicando la transformación

$$\xi = \tau + \zeta, \qquad \eta = \tau - \zeta,$$

se obtiene, de manera equivalente, la forma canónica

$$u_{\tau\tau} - u_{\zeta\zeta} = \phi_2\left(\tau, \zeta, u, u_\tau, u_\zeta\right). \tag{D.6}$$

Las funciones ϕ_1 y ϕ_2 solamente difieren entre sí por un factor de escala, siendo $\phi_2 = 4\phi_1$. En el caso especial de $\phi_2 = 0$, (D.6) corresponde a la ecuación de onda sin fuentes.

Anexo E

Función de Green de la Ecuación de Poisson

Consideremos la ecuación de Poisson en una dimensión:

$$u_x x = f(x) \tag{E.1}$$

, y supongamos que u y sus derivadas (respecto de x) desvanecen en los extremos.

Del cálculo elemental sabemos que:

$$u(x) = \int_0^x \mathrm{d}x'\, u_{x'}(x') + \aleph_1 \tag{E.2}$$

para una cierta constante $\aleph_1$, y de manera similar:

$$u_x(x) = \int_0^x \mathrm{d}x'\, u_{x'x'}(x') + \aleph_2. \tag{E.3}$$

Supongamos que u satisface (E.1), entonces:

$$u_\xi(\xi) = \int_0^\xi \mathrm{d}y\, f(y) + \aleph_2, \tag{E.4}$$

insertando este resultado en (E.2)

$$u(x) = \int_0^x \mathrm{d}x' \left(\int_0^\xi \mathrm{d}y\, f(y) \right) + \aleph_1 + \aleph_2 x, \tag{E.5}$$

tomando el primer término e integrando por partes,

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{d}x' \left(\int_0^\xi \mathrm{d}y\, f(y)\right) &= x\int_0^x \mathrm{d}x' f(x') - \int_0^x \mathrm{d}x' x' f(x') \\ &= \int_0^x \mathrm{d}x'\,(x-x')f(x'),\end{aligned} \tag{E.6}$$

y por lo tanto la solución a (E.2) es:

$$\begin{aligned}u(x) &= \int_0^x \mathrm{d}x'\,(x-x')f(x') + \aleph_1 + \aleph_2 x \\ &= \int_0^x \mathrm{d}x'\,(x-x')f(x'),\end{aligned} \tag{E.7}$$

una vez aplicando las condiciones a la frontera.

Anexo F

Tipos de Condiciones a la Frontera

Sea $u := u(\mathbf{X})$ solución a una ecuación diferencial parcial de segundo orden, donde $\mathbf{X} = (X^1, X^2, \ldots, X^M)$ es un vector de M coordenadas definido sobre el dominio solución Ω. Sea $\mathbf{x} = x^1, x^2, \ldots, x^M$ el vector de coordenadas definido sobre la frontera del dominio Ω. Los siguientes son tipos de condiciones a la frontera:

Tipo	Forma
Dirichlet	$u(\mathbf{x}) = B_D(\mathbf{x})$
von Neumann	$u_{x^m}(\mathbf{x}) = B_N(\mathbf{x})$
Robin	$a\,u(\mathbf{x}) + b\,u_{x^m}(\mathbf{x}) = B_R(\mathbf{x})$

siendo a, b, B_D, B_N y B_R funciones suaves definidas en la frontera de Ω y $m = 1, \ldots, M$.