

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**UNIDAD ZACATENCO**

**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

**“Sombras de Agujeros de Gusano Rotantes”**

**Tesis**

**Que presenta**

**Lic. Jonathan de Jesús Hernández Rodríguez**

**Para obtener el grado de**

**MAESTRO EN CIENCIAS EN LA ESPECIALIDAD DE FÍSICA**

**Director de tesis:**

**Dr. Tonatiuh Matos Chassin**

**Ciudad de México**

**Noviembre, 2018**



# Agradecimientos

Agradezco a mi director de tesis el Dr. Tonatiuh Matos Chassin por darme la oportunidad de trabajar con él y por todo el apoyo recibido durante el desarrollo de este trabajo.

A mis sinodales, el Dr. Darío Núñez Zúñiga y el Dr. Josué De Santiago Sanabria por sus sugerencias y comentarios para mejorar mi trabajo de tesis.

A mis profesores y el personal administrativo del departamento de física que siempre estuvieron ahí para ayudarme en lo que fuera necesario. A mis amigos y compañeros de generación por todos los momentos que pasamos y las alegrías compartidas.

A mis padres por apoyarme en mis decisiones y confiar en mi, pero sobre todo por su amor incondicional.



## **Resumen**

El aspecto que tiene un objeto astrofísico compacto visto por un observador lejano debido únicamente a las características de su espacio-tiempo se conoce como su sombra. La silueta es una observación directa del objeto astrofísico. En este trabajo se estudia la forma aparente o sombra que tienen dos tipos de soluciones a las ecuaciones de Einstein de agujero de gusano con rotación. Para encontrar la sombra de forma analítica se hace en este caso una aproximación de rotación lenta para que las ecuaciones de Hamilton-Jacobi sean separables, con esta separación se introduce una constante nueva de movimiento tipo Carter. Se relacionan las órbitas inestables de radio constante con lo que ve un observador muy lejos del agujero de gusano mediante los parámetros de impacto y las coordenadas celestes. Se obtienen las sombras como ecuaciones paramétricas en un plano  $x$ - $y$  (o plano del observador). Se caracterizan las sombras y se discuten resultados.

## **Abstract**

The appearance of a compact astrophysical object seen by a distant observer due to characteristics of its spacetime is known as its shadow. The silhouette is a direct observation of the astrophysical object. In this paper we study the apparent shape or shadow of two rotating wormholes which are solutions of Einstein field equations. To find the shadow analytically we consider a slow-rotating limit so that the Hamilton-Jacobi equations are separable, with this separation a new conserved quantity is introduced. Unstable orbits of constant radius are related to what an observer sees far from the wormhole by means of the impact parameters and celestial coordinates. The shadows are obtained as parametric equations in a  $x$ - $y$  plane (or observer plane). The rim of the shadows are characterized and results are discussed.



# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Sombras. Teoría básica.</b>	<b>5</b>
2.1. Geodésicas. . . . .	5
2.2. Trayectorias de fotones. . . . .	8
2.3. Coordenadas celestes. . . . .	9
2.4. Caracterización de la sombra. . . . .	10
<b>3. Sombras en agujeros negros.</b>	<b>13</b>
3.1. Schwarzschild. . . . .	13
3.1.1. Sombra. . . . .	14
3.2. Kerr . . . . .	16
3.2.1. Sombra. . . . .	16
<b>4. Sombras en agujeros de gusano.</b>	<b>21</b>
4.1. Agujero de gusano de Morris-Thorne . . . . .	21
4.1.1. Sombra . . . . .	23
4.2. Agujero de gusano atravesable con rotación. . . . .	26
4.2.1. Sombra. . . . .	26
4.3. Agujero de gusano tipo Kerr. . . . .	31
4.3.1. Sombra. . . . .	33
4.4. Agujero de gusano magnético sin violación de las condiciones de energía. . . . .	41
4.4.1. Sombra. . . . .	43
<b>5. Conclusiones.</b>	<b>51</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>53</b>





# Índice de figuras

2.1. Plano del observador y coordenadas celestes . . . . .	10
2.2. Sombra genérica en el plano del observador $(x,y)$ . . . . .	11
3.1. Sombra del agujero negro de Schwarzschild . . . . .	15
3.2. Sombra del agujero negro de Kerr . . . . .	20
4.1. Diagrama embebido para el agujero de gusano de Morris Thorne . . . . .	23
4.2. Sombra del agujero negro de Morris-Thorne. . . . .	25
4.3. Sombra del agujero de gusano atravesable con rotación. . . . .	30
4.4. Garganta del agujero de gusano tipo Kerr. . . . .	32
4.5. Función $\bar{\Theta}$ vs $r$ para el caso (i) Agujero de gusano tipo Kerr. . . . .	36
4.6. Función $\bar{\Theta}$ vs $r$ para el caso (ii) Agujero de gusano tipo Kerr. . . . .	36
4.7. Sombra agujero de gusano tipo Kerr variando el ángulo de observación $\theta$ .	38
4.8. Sombra agujero del gusano tipo Kerr variando el parámetro $r_0$ . . . . .	38
4.9. Sombra agujero de gusano tipo Kerr variando el parámetro $k$ . . . . .	39
4.10. Gráfica $\bar{r}$ vs $r_0$ para el agujero de gusano tipo Kerr. . . . .	40
4.11. Gráfica $\bar{r}$ vs $k$ para el agujero de gusano tipo Kerr. . . . .	40
4.12. Función $\bar{\Theta}$ vs $r$ para el caso (i) Agujero de gusano magnético. . . . .	45
4.13. Función $\bar{\Theta}$ vs $r$ para el caso (ii) Agujero de gusano magnético. . . . .	46
4.14. Sombra agujero de gusano magnético variando el ángulo de observación $\theta$ .	47
4.15. Sombra agujero de gusano magnético variando el parámetro $L$ . . . . .	48
4.16. Gráfica $\bar{r}$ vs $L$ del agujero de gusano magnético. . . . .	49



# Capítulo 1

## Introducción

Los agujeros de gusano son objetos consistentes con la relatividad general. Por su interpretación de túneles en el espacio-tiempo se han escrito historias de ciencia ficción y hecho películas como posibles candidatos para realizar viajes a través del universo. Si existen los agujeros de gusano en la realidad o no es un misterio, pero es importante realizar estudios de este tipo de objetos precisamente para descartar o no su probable existencia, una de las evidencias observacionales que se verá en este trabajo es su sombra.

Como se mencionó, los agujeros de gusano son objetos predichos por la relatividad general, pues representan soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein, uno considera un espacio-tiempo el cual está descrito por su métrica y a partir de ésta se encuentra la materia responsable de la geometría.

Históricamente, el estudio de agujeros de gusano se remonta a Flamm en 1916 donde estudiando la solución de Schwarzschild se dio cuenta de la existencia de regiones que conectaban dos espacios asintóticamente planos. En 1928 el matemático Hermann Weyl, interesado en la relatividad general y el electromagnetismo desarrolló un modelo tipo agujero de gusano.

Más tarde en 1935, Einstein estaba preocupado por el concepto de la materia tipo partícula y su teoría de la relatividad general, una teoría continua de campos. Muchos consideraban que las partículas eran singularidades en estos campos, pero Einstein no estaba convencido y en su intento de desarrollar un modelo libre de singularidades y finito en todas partes encontró una solución tipo agujero de gusano, conocido después como puente de Einstein-Rosen [1].

En 1955 John Wheeler y Misner interesados en aspectos topológicos de la relatividad general sobre todo en un espacio-tiempo múltiplemente conectado introdujeron en su trabajo [2] el nombre de agujero de gusano por primera vez. Por otro lado, Homer Ellis [3] y Bronnikov [4] estudiaron diversas soluciones tipo agujero de gusano en los la década de 1970 pero no fue hasta 1988 cuando Kip Thorne y Michael Morris estudiaron las condiciones

necesarias para que un espacio-tiempo tipo agujero de gusano fuera atravesable, entre ellas que el tipo de materia correspondiente a ese espacio tiempo era “exótica”. [5] Toda la materia conocida clásicamente tiene un tensor de energía momento que satisface ciertas condiciones de energía y en este caso se violaba la condición nula y por tanto todas las demás.

El hecho de que un agujero de gusano necesite como fuente de materia algo nunca antes visto es un problema, sin embargo, de acuerdo al modelo cosmológico más aceptado el universo está compuesto principalmente por energía oscura, una sustancia con presión negativa. Candidatos para energía oscura como la energía phantom también violan la condición nula de energía y por lo tanto hace posible su existencia. Es importante hacer notar que también se han encontrado soluciones tipo agujero de gusano donde no se violan las condiciones de energía, en este trabajo se estudia la sombra de una de ellas.

Independientemente del tipo de materia necesario para este tipo de espacio-tiempo o de si son atravesables o no, los agujeros de gusano son interesantes desde el punto de vista astrofísico como objetos compactos. Se cree que la prueba más fuerte de la existencia, por ejemplo, de los agujeros negros es a través de su observación directa. La forma en que luce un agujero negro visto por un observador lejano debido únicamente a efectos ópticos y su espacio-tiempo es lo que se conoce como su sombra. El estudio de las sombras de agujeros negros se ha vuelto popular debido a la presencia de agujeros negros supermasivos en el centro de las galaxias y a la resolución que los telescopios pueden alcanzar hoy en día. A pesar de que los agujeros negros son los mejores candidatos para para habitar el centro de las galaxias otros objetos como estrellas de bosones o agujeros de gusano no pueden descartarse y de ahí la importancia de estudiarlos. Al estudiar sus sombras se permitirá diferenciarlos y compararlos con las observaciones que se realicen a futuro. Uno de los proyectos más importantes para realizar esta tarea es el Event Horizon Telescope (EHT) (referencia) el cual es una colaboración internacional para tratar de obtener imágenes y ver directamente las inmediaciones de un agujero negro.

El EHT utiliza una técnica llamada Very-Long-Baseline Interferometry (VLBI). Para una mejor explicación sobre cómo funciona este método véase [6]. En términos simples la resolución angular de un radio telescopio va como  $\delta = \lambda/D$  donde  $\lambda$  es la longitud de onda que observa y  $D$  la apertura, entonces la resolución puede aumentar observando longitudes de onda más cortas o aumentando la apertura. La última de éstas es poco práctica ya que está limitada a los materiales de construcción, sin embargo, se pueden sumar las señales en fase de varios telescopios de tal forma que el arreglo funcione como un telescopio con una mayor apertura. Las señales detectadas por cada telescopio se guardan registrando el tiempo exacto de detección determinado por relojes atómicos, basado en el tiempo y las señales registradas se calcula el patrón de interferencia entre cada par de telescopios en la

red. El arreglo está formado por varios telescopios en diferentes partes del mundo. Al final, el telescopio virtual tendrá una apertura  $D$  del tamaño de la distancia más grande que hay entre dos telescopios de la red.

Siglas	Telescopio	Lugar
PdBI	Plateau de Bure Interferometer	Grenoble, France
IRAM	Institut de Radioastronomie Millimetrique	Pico Veleta, Spain
SMT	Submillimeter Telescope Observatory	Mount Graham, Arizona
JCMT	James Clerk Maxwell Telescope	Mauna Kea, Hawaii
SMA	Submillimeter Array	Mauna Kea, Hawaii
LMT	Large Millimeter Telescope	Sierra Negra, Mexico
APEX	Atacama Pathfinder Experiment	Chajnantor-Plateau, Chile
CARMA	Combined Array for Research in Millimeter-wave Astronomy	Inyo Mountains, California
ALMA	Atacama Large Millimeter/submillimeter Array	Chajnantor-Plateau, Chile
SPT	South Pole Telescope	Amundsen–Scott Station, Antarctica
GLT	Greenland Telescope	Summit Station, Greenland

Cuadro 1.1 Radio telescopios integrados a la red de VLBI.

Aunque desde el punto de vista astrofísico de los agujeros negros, la solución de Kerr de la relatividad general sea la que se espera observar existen muchas soluciones tipo agujero negro en otras teorías de gravedad. Añadido a eso, existen otro tipo de soluciones sin horizonte como las soluciones tipo agujero de gusano que tampoco pueden descartarse, de ahí su importancia para estudiarlas. En este trabajo se estudia brevemente a manera de repaso la sombra de dos tipos de agujeros negros como lo son Schwarzschild y Kerr, además de dos tipos de soluciones de agujeros de gusano ya conocidos como lo son el agujero de gusano de Morris-Thorne y su generalización con rotación. La parte original de este trabajo se encuentra en las sombras de dos tipo de agujero de gusano con rotación como son el agujero de gusano tipo Kerr [7] y un agujero de gusano magnético sin violación de las condiciones de energía [8].



# Capítulo 2

## Sombras. Teoría básica.

### 2.1. Geodésicas.

En términos de la relatividad general para describir una geometría en general se etiquetan los puntos mediante coordenadas  $x^\mu$ , el elemento de línea  $ds^2$  especifica la distancia entre dos puntos cercanos separados por el intervalo  $dx^\alpha$ . De forma general:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

Donde  $g_{\alpha\beta}$  es un tensor simétrico de rango 2 que depende de las coordenadas  $x^\alpha$ . Como se verá en las siguientes secciones, las geodésicas juegan un papel determinante al encontrar las sombras de objetos compactos como agujeros negros o agujeros de gusano. Estas ecuaciones geodésicas pueden deducirse desde diferentes formalismos como el Lagrangiano, Hamiltoniano o Hamilton-Jacobi (HJ), todos ellos equivalentes pero algunos más útiles que otros dependiendo de lo que se desea estudiar. El movimiento de una partícula cayendo libremente debido a la gravedad sigue una trayectoria geodésica, la acción para una partícula de masa  $m$ :

$$S[x^\mu] = \int_1^2 L d\tau \quad L = -m \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}$$

con  $\tau$  el tiempo propio, toma un valor extremo para geodésicas, tomando la variación de la acción anterior y poniendo la restricción:

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1 \quad (2.3)$$

Se llega a las ecuaciones geodésicas en la forma estándar:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (2.4)$$

Estás son cuatro ecuaciones, cada una para el índice libre  $\mu$ , los coeficientes  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  se llaman los coeficientes de Christoffel, los cuales se construyen de la métrica y de sus derivadas de primer orden:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\nu\sigma,\lambda} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}) \quad (2.5)$$

Donde la ", representa derivada respecto al índice. Las ecuaciones geodésicas dadas por (2.1) describen el movimiento de partículas prueba en un espacio-tiempo curvo. Para un espacio-tiempo dado por su métrica, en general, estas ecuaciones son complicadas, sin embargo se puede aprovechar la simetría para simplificarlas. Una forma general de trabajar con constricciones es usando multiplicadores de lagrange, por lo que es conveniente expresar la acción de la forma:

$$S_1 [x^\mu(\tau), \eta(\tau)] = \int_1^2 L_1 d\tau \quad L_1 = \frac{1}{2} \left[ \eta^{-1} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - m^2 \eta \right]$$

Siendo  $\eta$  el multiplicador de lagrange. La variación de  $S_1$  respecto a  $x^\mu(\tau)$  resulta en:

$$\delta S_1 = \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \right) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_1^2 \left[ \frac{\partial L_1}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}^\mu} \right] \delta x^\mu d\tau$$

Donde para valores fijos  $x_1^\mu$  y  $x_2^\mu$  el primer término es cero y se tiene:

$$\frac{\partial L_1}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}^\mu} = 0 \quad (2.8)$$

Por otro lado, la variación respecto al multiplicador de lagrange  $\eta$  nos da:

$$\eta^2 = -\frac{1}{m^2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.9)$$

Sustituyendo la expresión anterior en  $L_1$  se encuentra que  $L = L_1$  entonces las ecuaciones de movimiento dadas por la variación de  $L_1$  respecto de  $x^\mu$  son equivalentes a las de las ecuaciones geodésicas de forma estándar.

Por otro lado el Hamiltoniano está dado por:

$$H = p_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} - L \quad p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \quad (2.10)$$



El cual es cero si se toma la acción dada por (2.2) pero tomando como acción la expresión (2.6) con  $L_1$ :

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}^\mu} = \eta^{-1} g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \\ H_1 &= p_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} - L_1 = \frac{1}{2} \eta (g^{\mu\nu} p_{\mu\nu} + m^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

La acción correspondiente en la forma del Hamiltoniano queda como:

$$S_H [x^\mu(\tau), p_\mu(\tau), \eta(\tau)] = \int_1^2 (p_\mu \dot{x}^\mu - H) d\tau$$

Con ecuaciones de movimiento en el formalismo Hamiltoniano dadas por:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \quad \frac{dp_\mu}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu} \quad (2.13)$$

La variación de  $S_H$  respecto  $\eta$  da la ecuación:

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + m^2 = 0 \quad (2.14)$$

La cual es la relación energía-momento en relatividad general. Haciendo la reparametrización  $d\sigma = \eta d\tau$  se escribe el Hamiltoniano como:

$$H = \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + m^2) \quad (2.15)$$

Donde para fotones el límite  $m \rightarrow 0$  está bien definido. Para derivar la ecuación de Hamilton-Jacobi se varía la acción  $S_1$  respecto a las coordenadas  $x^\mu(\tau)$  pero ahora se deja fijo el punto  $x_1^\mu = x^\mu(\tau_1)$  mientras se deja  $x_2^\mu = x^\mu(\tau_2)$  arbitrario. Ya que las ecuaciones de movimiento se cumplen tenemos que de (2.7) se tiene:

$$\delta S = p_\mu \delta x^\mu \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial x^\mu} = p_\mu \quad (2.16)$$

Sustituyendo lo anterior en (2.14) se encuentra la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} + m^2 = 0 \quad (2.17)$$

Esta ecuación normalmente se encuentra en la literatura como:

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{con} \quad \bar{S} = S + \frac{1}{2} m^2 \lambda \quad (2.18)$$

A la función  $S$  se le conoce como función principal de Hamilton. Matemáticamente la ecuación de Hamilton-Jacobi es una ecuación diferencial parcial de primer orden equivalente a las ecuaciones de movimiento de Hamilton, las cuales son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

En el caso donde una coordenada  $x^\alpha$  sea cíclica, es decir,  $\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} = 0$ , el sistema es invariante en la dirección de esa coordenada y por lo tanto existe una simetría. De las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} = -\dot{p}_\alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad p_\alpha = \text{constante} = \zeta \quad (2.19)$$

Ya que  $\frac{\partial S}{\partial x^\alpha} = p_\alpha$  entonces:

$$\zeta = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \quad \longrightarrow \quad S = \zeta x^\alpha + \bar{S}(x^\mu, \lambda)_{\mu \neq \alpha} \quad (2.20)$$

El término asociado para cada coordenada cíclica  $x^\alpha$ , en la función  $\bar{S}$  puede escribirse como  $x^\alpha p_\alpha$  con  $p_\alpha = \text{constante}$ .

## 2.2. Trayectorias de fotones.

La sombra del objeto compacto se produce por una fuente luminosa de fondo relativa al observador, de tamaño angular mayor al agujero negro. El observador distante verá una silueta parecida a una sombra sobre el fondo luminoso. La forma de la sombra depende principalmente de la métrica del espacio-tiempo en las proximidades del agujero negro y en cierta medida también de la posición del observador. Esta silueta está relacionada con los fotones que pueden acercarse lo más posible al agujero negro y que puedan escapar y ser dispersados. Así entonces, para encontrar la sombra de un objeto compacto es necesario analizar las trayectorias que siguen los fotones en las inmediaciones del espacio-tiempo. En específico son de interés las geodésicas de los fotones con coordenada radial constante, las cuales son llamadas comúnmente órbitas esféricas.

La condición para órbitas esféricas implican que para la coordenada  $r$  se tenga que en las ecuaciones de las geodésicas:

$$\dot{r} = 0 \quad \text{y} \quad \ddot{r} = 0 \quad (2.21)$$

Estas órbitas son inestables, es decir que tarde o temprano los fotones serán atrapados por el agujero negro o consiguen escapar y son dispersados hacia infinito. Se supondrá también que la métrica en cuestión tiene simetría al menos axial y por lo tanto existen dos cantidades conservadas las cuales están relacionadas con la energía y el momento angular del fotón.

Mediante el formalismo de Hamilton-Jacobi explicado anteriormente es posible encontrar otra cantidad conservada tipo Carter [9] la cual es la constante que resulta al hacer separación de variables en la ecuación de H-J. Para reducir el número de variables en las ecuaciones geodésicas se definen dos parámetros llamados parámetros de impacto definidos por:

$$\xi = \frac{L}{E} \quad \eta = \frac{C}{E^2} \quad \bar{\lambda} = E\lambda \quad (2.22)$$

Donde  $L$  es el momento angular y  $E$  la energía de la partícula prueba mientras que  $C$  la constante tipo Carter y  $\bar{\lambda}$  el nuevo parámetro afín. Mediante las condiciones en la coordenada radial para órbitas de radio constante se fijan los valores de los parámetros de impacto  $\xi = \xi(r)$  y  $\eta = r$  una perturbación en estos parámetros hace que el fotón caiga dentro del agujero negro o por el contrario salga dispersado. Luego, se relacionan estas órbitas con lo que vería un observador lejano mediante las coordenadas celestes  $(\alpha, \beta)$  las cuales se explican en la siguiente sección.

### 2.3. Coordenadas celestes.

La luz se curva con la gravedad, debido a esto, un observador ve a una fuente de luz lejana en una posición diferente a la que en realidad se encuentra. Las coordenadas celestes establecen la relación entre las trayectorias de las geodésicas de los fotones y lo que el observador lejano ve en realidad, ellas definen la silueta del objeto compacto. Estas coordenadas constituyen una pequeña parte de la esfera celeste del observador y permiten comparar los resultados con mediciones astronómicas reales.

Para el uso de las coordenadas celestes se requiere que la métrica sea asintóticamente plana debido a esto un observador localizado muy lejos del objeto compacto puede establecer un sistema de referencia de coordenadas euclidianas  $(x, y, z)$ . El eje de rotación del objeto se toma como el eje  $z$  y el observador se localiza, sin pérdida de generalidad en el punto  $(r_0, \theta_0, 0)$  con  $r_0 \rightarrow \infty$ . La trayectoria que sigue el rayo de luz desde la fuente está descrita por la curva paramétrica:  $\vec{v} = x(r)\hat{x} + y(r)\hat{y} + z(r)\hat{z}$ . El vector tangente en la posición del observador está dado entonces por la curva:  $\vec{u} = \left(\frac{dx}{dr}\right)\Big|_{r_0}\hat{x} + \left(\frac{dy}{dr}\right)\Big|_{r_0}\hat{y} + \left(\frac{dz}{dr}\right)\Big|_{r_0}\hat{z}$ .

El vector tangente intersecta el plano  $\alpha - \beta$  en el punto  $(\alpha_i, \beta_i)$ . El plano  $\alpha - \beta$  es normal al vector que une el origen con el punto del observador, llamamos a este plano el cielo del observador. En el sistema coordenado  $(x, y, z)$  el observador se localiza en el punto  $P_0 = (r_0 \sin \theta_0, 0, r_0 \cos \theta_0)$  y el punto en el plano  $\alpha - \beta$  como  $P_i = (-\beta_i \cos \theta_0, \alpha_i, \beta_i \sin \theta_0)$ .

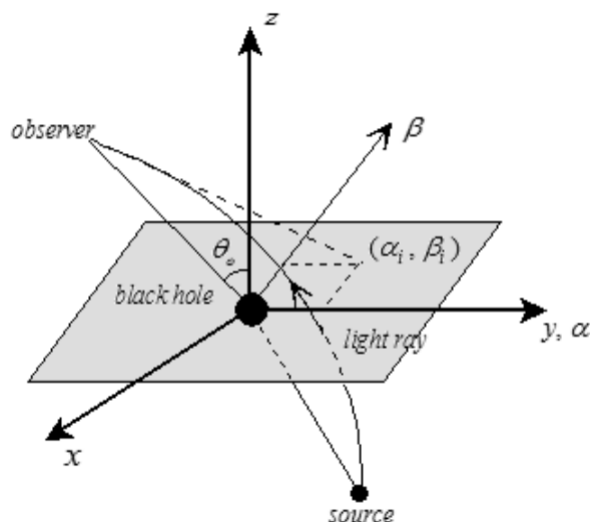


Figura 2.1 Geometría del plano del observador y coordenadas celestes. Fuente: [10]

La línea que pasa por estos puntos está dada por la ecuación:

$$\frac{x - r_0 \sin \theta_0}{r_0 \sin \theta_0 + \beta_i \cos \theta_0} = -\frac{y}{\alpha_i} = \frac{z - r_0 \cos \theta_0}{r_0 \cos \theta_0 - \beta_i \sin \theta_0} \quad (2.23)$$

Pasando a coordenadas  $(r, \theta, \varphi)$ , diferenciando respecto a  $r$  y tomando el límite  $r \rightarrow r_0, \theta \rightarrow \theta_0, \varphi \rightarrow 0$  se obtiene:

$$\frac{\sin \theta_0 + r_0 \cos \theta_0 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)}{r_0 \sin \theta_0 + \beta_i \cos \theta_0} = -\frac{r_0 \sin \theta_0 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)}{\alpha_i} = \frac{\cos \theta_0 - r_0 \sin \theta_0 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)}{r_0 \cos \theta_0 - \beta_i \sin \theta_0}$$

Despejando  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  de las expresiones anteriores y considerando a  $r_0$  muy grande se tiene para las coordenadas celestes:

$$\alpha_i = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left( -r_0^2 \sin \theta_0 \frac{d\varphi}{dr} \right) \quad \beta_i = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left( r_0^2 \frac{d\theta}{dr} \right) \quad (2.24)$$

Donde  $\frac{d\varphi}{dr}$  y  $\frac{d\theta}{dr}$  se toman de las ecuaciones geodésicas.

## 2.4. Caracterización de la sombra.

Como se vió en las gráficas de las sombras varias características de la misma dependen de la posición del observador, sin embargo en general la forma y tamaño dependen de las

propiedades del espacio-tiempo. Para cuantificar el tamaño de la sombra se utiliza el arreglo dado por [11]:

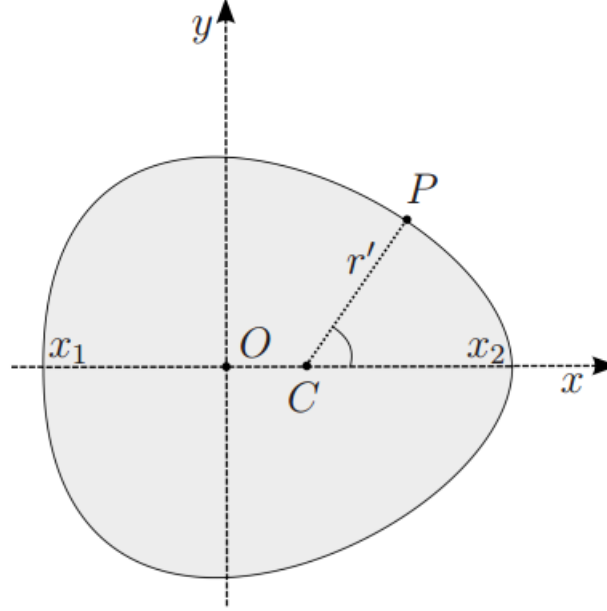


Figura 2.2 Sombra genérica en el plano del observador  $(x,y)$  Fuente:[11].

El punto  $O$  es origen del sistema coordenado  $(x,y)$ , el punto  $C$  es tomado como el centro de la sombra su coordenada  $x$  está dada por:  $x_C = (x_{max} + x_{min})/2$  donde  $x_{max}$  y  $x_{min}$  son la máxima y mínima coordenada  $x$  de la sombra.

Debido a que la sombra es simétrica respecto al eje  $x$  se tiene que  $y_C = 0$ . Un punto cualquiera  $P$  de la silueta de la sombra se encuentra a una distancia  $r'$  del centro  $C$  donde  $r' = \sqrt{y_P^2 + (x_P - x_C)^2}$ . Mediante el elemento de línea  $ds^2 = dx^2 + dy^2$  se definen el perímetro  $\mathcal{P}$  y el radio medio  $\bar{r}$  como:

$$\oint ds = \mathcal{P} \quad \bar{r} = \frac{1}{\mathcal{P}} \oint r' ds \quad (2.25)$$

El plano  $(x,y)$  es el plano imagen que tiene por coordenadas las coordenadas celestes con  $x \equiv \alpha$  y  $y \equiv \beta$  entonces:  $ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$  y como estas coordenadas describen la sombra de forma paramétrica  $\alpha = \alpha(r)$ ,  $\beta = \beta(r)$  se tiene para la integral de  $\mathcal{P}$  y  $\bar{r}$ :

$$\oint_{r_1}^{r_2} \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dr}\right)^2} dr = \mathcal{P} \quad (2.26)$$

$$\bar{r} = \oint_{r_1}^{r_2} \sqrt{\left[ \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \left( \frac{d\beta}{dr} \right)^2 \right] (\beta^2 + (\alpha - \alpha_C)^2)} dr \quad (2.27)$$

Donde  $r \in [r_1, r_2]$  son los valores inicial y final del parámetro  $r$  que describe la curva de la silueta de la sombra.

# Capítulo 3

## Sombras en agujeros negros.

### 3.1. Schwarzschild.

Como se indicó anteriormente, es importante distinguir entre el tipo de sombras que tienen diferentes tipos de objetos compactos, entre ellos los agujeros negros. La métrica de Schwarzschild es una solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío, la más general que describe la deformación del espacio-tiempo debido a un objeto esféricamente simétrico sin rotación ni carga. En coordenadas de Schwarzschild  $(t, r, \theta, \varphi)$  el elemento de línea se escribe como:

$$ds^2 = \left(-1 + \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.1)$$

La métrica de Schwarzschild depende del parámetro  $M$  que representa la masa del objeto. Características importantes en el espacio-tiempo de Schwarzschild que serán importantes considerar:

- En el límite  $t \rightarrow \infty$  la métrica se reduce al espacio plano de Minkowski y por lo tanto es asintóticamente plana.
- En el límite  $M \rightarrow 0$  la métrica se reduce al espacio-tiempo plano de Minkowski.
- La métrica es singular en  $r = 0$  y  $r = 2M$  pero calculando los invariantes de curvatura se encuentra que la segunda singularidad es debido a las coordenadas mientras que  $r = 0$  es una singularidad física.
- Su horizonte de eventos está dado por el radio de Schwarzschild, se localiza en  $r = 2M$  en unidades naturales.

### 3.1.1. Sombra.

La métrica de Schwarzschild es esféricamente simétrica y estática, debido a las simetrías presentes, una partícula de prueba en este espacio-tiempo tiene conservadas su energía  $E$  y el momento angular  $L$ . En general, la acción tiene la forma de:

$$S = -Et + L\varphi + S_r(r) + S_\theta(\theta) + \frac{1}{2}m^2\lambda \quad (3.2)$$

Sin embargo ya que solo estamos interesados en las trayectorias de las partículas de luz tomaremos desde un inicio  $m = 0$ . Esta acción y la ecuación de Hamilton-Jacobi derivan en la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{1}{-1 + \frac{2M}{r}}\right)E^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2 \sin^2 \theta} = 0 \quad (3.3)$$

Después de separar la parte radial de la angular:

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} = C$$

$$r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{r^2}{(-1 + \frac{2M}{r})} E^2 = -C$$

Estas ecuaciones pueden escribirse en términos de  $\frac{dr}{d\lambda}$  y  $\frac{d\theta}{d\lambda}$  mediante la relación  $\frac{\partial S}{\partial x^v} = p_v$ . Haciendo lo anterior e introduciendo los parámetros de impacto se llega a:

$$r^2 \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R} \quad (3.4)$$

$$r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta} \quad (3.5)$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\xi}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (3.6)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{\xi}{(-1 + \frac{2M}{r})} \quad (3.7)$$

Las condiciones de órbitas de radio constantes determinan los valores de críticos en los parámetros de impacto en este caso  $R = 0$  y  $\frac{dR}{dr} = 0$  resultan en:

$$r^4 - r^2\eta + 2Mr\eta = 0$$



$$4r^3 - 2r\eta + 2M\eta = 0 \quad (3.8)$$

Resolviendo estas ecuaciones para  $\eta$ :

$$\eta = 3r^2 = 27M^2 \quad (3.9)$$

Las condiciones solo establecen el valor del parámetro  $\eta$  ya que  $R$  es independiente de  $\xi$ , sin embargo, esto no es problema para encontrar la sombra. Mediante la condición de  $\Theta \geq 0$  se obtiene una cota inferior para el parámetro  $\xi$ ,  $\xi^2 \leq 27M^2 \sin^2 \theta$ . Las coordenadas celestes para esta sombra están dadas por:

$$\alpha = -\frac{\xi}{\sin \theta} \quad (3.10)$$

$$\beta = \sqrt{\eta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta}} \quad (3.11)$$

Para obtener la expresión de la sombra se despeja  $\xi$  de la ecuación de  $\alpha$  y se sustituye en la de  $\beta$ , lo cual resulta:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \eta = 27M^2 \quad (3.12)$$

Esta es una ecuación en el espacio  $\alpha - \beta$ , representa una circunferencia con radio  $\sqrt{27}M$ , es decir, el radio de la sombra es proporcional a la masa del agujero negro de Schwarzschild. De esta expresión también se deduce que la sombra es independiente del ángulo de observación esto debido a que la métrica es esféricamente simétrica.

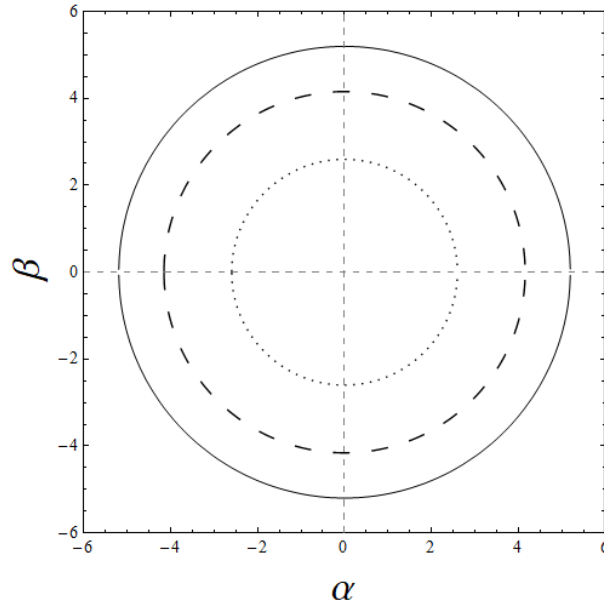


Figura 3.1 Sombra del agujero negro de Schwarzschild. Línea sólida  $M = 1$ . Línea rayada  $M = 0,8$ . Línea punteada  $M = 0,5$ .

## 3.2. Kerr

Para el caso del agujero negro de Kerr el conjunto de ecuaciones es integrable gracias a la constante de Carter, esto quiere decir que el movimiento es regular y no caótico. El espacio-tiempo de Kerr tiene simetría axial alrededor de su eje de rotación, en forma explícita:

$$ds^2 = -dt^2 + \Sigma \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{2Mr}{\Sigma} (a \sin^2 \theta d\varphi - dt)^2 \quad (3.13)$$

En coordenadas Boyer-Lindquist  $(t, r, \theta, \varphi)$  y en unidades naturales, donde  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$   $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ . La métrica de Kerr depende de dos parámetros que son  $M$  que representa la masa del agujero negro y  $Ma$  su momento angular.

Tres características importantes en el espacio-tiempo de Kerr que serán importantes para las sombras:

- En el límite  $r \rightarrow \infty$  la métrica se reduce al espacio plano de Minkowski y por lo tanto es asintóticamente plana.
- En el límite  $a \rightarrow 0$  la métrica se reduce al espacio-tiempo de Schwarzschild, es decir:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left( 1 - \frac{2M}{r} \right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.14)$$

- La métrica es singular en  $\Delta = 0$  y  $\Sigma = 0$  pero calculando los invariantes de curvatura se encuentra que la primera singularidad es debido a las coordenadas mientras que  $\Sigma = 0$  es una singularidad física.

### 3.2.1. Sombra.

Ya que la métrica es estacionaria y axialmente simétrica admite dos vectores de Killing, en coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$  se escriben como  $k^\mu = (1, 0, 0, 0)$  y  $m^\mu = (0, 0, 0, 1)$ . Para una partícula con 4-velocidad  $u^\mu$  la energía  $E = -u^\mu k_\mu$  y el momento angular  $L = u^\mu m_\mu$  se conservan. Utilizando la ecuación de Hamilton-Jacobi y con la acción dada por:

$$S = -Et + L\varphi + S_r(r) + S_\theta(\theta) + \frac{1}{2}m^2\lambda \quad (3.15)$$

Se encuentra la siguiente relación:

$$-m^2 (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) = - \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] E^2 + \frac{4Mar}{\Delta} EL \\ + \left[ \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2}{\Delta} \right] L^2 + \Delta \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2$$

Donde separando las ecuaciones, es decir, la parte radial de la angular se obtiene:

$$\left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \left( aE \sin \theta - \frac{L}{\sin \theta} \right)^2 + m^2 a^2 \cos^2 \theta = C \\ \Delta \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 - \frac{[(r^2 + a^2)E - aL]^2}{\Delta} + m^2 r^2 = -C \quad (3.16)$$

Donde  $C$  es la constante de Carter. De las relaciones  $p_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}$  se obtienen las ecuaciones de las geodésicas de primer orden, las cuales se escriben como:

$$\Sigma \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R} \quad (3.17)$$

$$\Sigma \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta} \quad (3.18)$$

$$\Sigma \frac{d\varphi}{d\lambda} = - \left( aE - \frac{L}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{a}{\Delta} (E(r^2 + a^2) - La) \quad (3.19)$$

$$\Sigma \frac{dt}{d\lambda} = -a(aE \sin^2 \theta - L) + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - La] \quad (3.20)$$

Donde  $\lambda$  es el parámetro afín. Y  $R$  y  $\Theta$  dados por:

$$R = [E(r^2 + a^2) - aL]^2 - (m^2 r^2 + C) \Delta$$

$$\Theta = C - m^2 a^2 \cos^2 \theta - \left( Ea \sin \theta - \frac{L}{\sin \theta} \right)^2$$

Para partículas de luz  $m = 0$  en  $R$  y  $\Theta$ . Para simplificar los resultados de aquí en adelante se redefine una constante dada por:  $K = C - (Ea - L)^2$ . Por las ecuaciones geodésicas el movimiento se restringe en la región donde  $R \geq 0$  y  $\Theta \geq 0$ . Para obtener la sombra, se estudian las trayectorias de los fotones en lo que se conoce como geodésicas nulas, introduciendo los parámetros de impacto y la condición para partículas de luz sin masa, se obtiene:

$$\Sigma \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R} \quad (3.21)$$

$$\Sigma \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\bar{\Theta}} \quad (3.22)$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = -a + \frac{\xi}{\sin^2 \theta} + \frac{a}{\Delta} (r^2 + a^2 - \xi a) \quad (3.23)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = -a (a \sin^2 \theta - \xi) + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} (r^2 + a^2 - \xi a) \quad (3.24)$$

Con  $\bar{R}$  y  $\bar{\Theta}$  dados por:

$$\bar{R} = (r^2 + a^2 - a\xi)^2 - [\eta + (a - \xi)^2] \Delta$$

$$\bar{\Theta} = \eta + \cos^2 \theta \left( a^2 - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta} \right)$$

Las órbitas de radio constante están dadas por las condiciones  $R = 0$  y  $\frac{dR}{dr} = 0$  por medio de ellas se obtienen los valores críticos de los parámetros de impacto, en este caso se tiene:

$$\xi = -\frac{r^3 - 3Mr^2 + a^2(r+M)}{a(r-M)} \quad (3.25)$$

$$\eta = \frac{r^3}{a^2(r-M)^2} [4a^2M - r(r-3M)^2] \quad (3.26)$$

Las coordenadas celestes antes derivadas, dadas por:

$$\alpha = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( -r^2 \sin \theta \frac{d\varphi}{dr} \right) \quad (3.27)$$

$$\beta = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) \quad (3.28)$$

Después de tomar el límite y sustituyendo  $\frac{d\varphi}{d\lambda}$  y  $\frac{d\theta}{d\lambda}$  de las geodésicas se llega a:

$$\alpha = -\frac{\xi}{\sin \theta} \quad (3.29)$$

$$\beta = \pm \sqrt{\eta + a^2 \cos^2 \theta - \xi^2 \cot^2 \theta} \quad (3.30)$$

Caso extremo con  $a = M$

Se puede tener una expresión analítica y no paramétrica de la sombra para valores específicos del parámetro de rotación  $a$ . Para el caso donde  $a = M$  los parámetros de impacto resultan:

$$\xi = -\frac{(r-M)^2 - 2M^2}{M} \quad (3.31)$$

$$\eta = \frac{r^3(4M-r)}{M^2} \quad (3.32)$$

De la primera ecuación se obtiene a  $r$  como función de  $\xi$ :

$$r = M \pm \sqrt{M(2M - \xi)} \quad (3.33)$$

La función con menos se descarta pues  $r$  no puede ser menor a  $M$ . Luego, sustituyendo esta última ecuación en la expresión para  $\eta$  se llega a:

$$\eta = \frac{\left(M + \sqrt{M(2M - \xi)}\right)^3 \left(3M - \sqrt{M(2M - \xi)}\right)}{M^2} \quad (3.34)$$

Para encontrar la ecuación analítica de la sombra se usan las coordenadas celestes antes escritas. Por poner un ejemplo, tomemos  $\theta = \frac{\pi}{2}$  para este caso las coordenadas celestes resultan en  $-\xi$  y  $\beta^2 = \eta$ , sustituyendo en la ecuación de antes:

$$\beta^2 = \frac{\left(M + \sqrt{M(2M + \alpha)}\right)^3 \left(3M - \sqrt{M(2M + \alpha)}\right)}{M^2} \quad (3.35)$$

Donde ahora tenemos una ecuación en el espacio de  $-\beta$  es decir en el cielo del observador. Es importante ver que para  $\xi = 2M$  donde  $r = M$  el coeficiente para  $\eta$  se anula, y entonces  $\eta$  puede tomar cualquier valor. Para este valor de  $\xi$  la forma de la sombra es una línea vertical que conecta los puntos  $(-2M, -\sqrt{3}M)$  y  $(-2M, \sqrt{3}M)$ , esta forma de la sombra es debido al parámetro de rotación a medida que aumenta su valor se hace mas notorio.

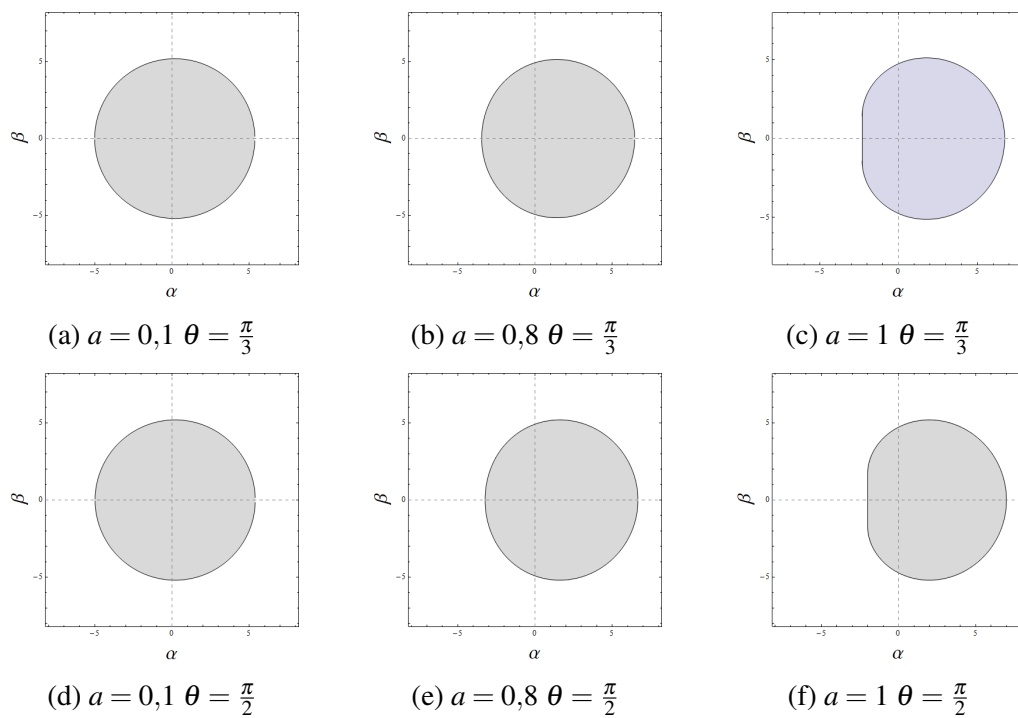


Figura 3.2 Sombra del agujero negro de Kerr. Para todos los casos se fijó  $M = 1$

# Capítulo 4

## Sombras en agujeros de gusano.

Para encontrar las sombras en agujeros de gusano supondremos que hay un observador en una de las regiones (o universos) que conecta el espacio-tiempo. En la misma región se encuentra una fuente de luz, los fotones de esta fuente de luz pueden caer dentro del agujero de gusano, atravesando la garganta y pasando a la otra región que conecta o pueden ser dispersados hacia infinito en la misma región del observador. El observador en infinito recibe solo los fotones dispersados y entonces en el cielo del observador estos se ven como zonas brillantes mientras que los capturados por el agujero de gusano como zonas oscuras.

### 4.1. Agujero de gusano de Morris-Thorne

La solución de agujero de gusano esféricamente simétrica y estática mas general posible es de la forma de:

$$ds^2 = -e^{\phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.1)$$

La función  $b(r)$  es la que determina la forma espacial del agujero de gusano mientras que  $\phi(r)$  es una función asociada al corrimiento al rojo. Aquí se estudiará la sombra de un agujero de gusano que es un caso particular de la métrica (4.1). Tomando  $\phi(r) = 0$  y  $b = b_0^2/r$  y poniendo  $r(l)$  donde  $l$  es la distancia radial propia dada por:

$$l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{1}{[1 - b(r)]^{1/2}} dr$$

Resolviendo esta integral resulta:

$$l = \pm \sqrt{r^2 - b_0^2} \quad (4.3)$$

Donde el signo + es para el un universo y - para el otro. El caso particular de la métrica (4.1) es:

$$ds^2 = -dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.4)$$

Aquí las coordenadas tienen como rangos  $-\infty < t < \infty$ ,  $-\infty l < \infty$ ,  $0 < \theta < \pi$ ,  $0 < \varphi < \pi$  y  $b_0$  es una constante. La métrica anterior describe un agujero de gusano con garganta en  $l = 0$ . El espacio-tiempo tiene dos regiones asintóticamente planas en  $l \rightarrow -\infty$  y  $l \rightarrow +\infty$ .

Regresando a las coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$  esta métrica es de la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b_0^2/r} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.5)$$

Se puede usar un diagrama embebido para tener una representación espacial del agujero de gusano. Por la simetría esférica de la métrica consideremos  $\theta = \pi/2$ , luego, es un determinado tiempo  $t = \text{constante}$  la métrica resulta:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - b_0^2/r^2} + r^2 d\varphi^2 \quad (4.6)$$

Si se embebe esta métrica en un espacio tridimensional Euclidiano en coordenadas cilíndricas:

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (4.7)$$

Luego haciendo  $z(r)$  lo anterior puede escribirse como:

$$ds^2 = \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (4.8)$$

Comparando (4.8) y (4.6) se obtiene:

$$\frac{dz}{dr} = \pm \frac{1}{\left( \frac{r^2}{b_0^2} - 1 \right)^{1/2}} \quad (4.9)$$



Resolviendo esta integral, encontramos  $z(r)$ :

$$z(r) = \pm b_0 \ln \left( r/b_0 + \sqrt{(r/b_0)^2 - 1} \right) \quad (4.10)$$

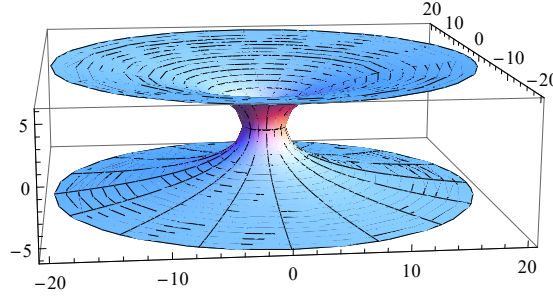


Figura 4.1 Diagrama embebido para el agujero de gusano de Morris Thorne.  $b_0 = 2$

### 4.1.1. Sombra

La métrica del agujero de gusano de Morris-Thorne es esféricamente simétrica y estática. Para una partícula de prueba en este espacio-tiempo su energía  $E$  y su momento angular  $L$  están conservadas debido a estas simetrías. Tomaremos entonces una acción dada por:

$$S = -Et + L\varphi + S_r(r) + S_\theta(\theta) \quad (4.11)$$

Donde hemos tomado  $m = 0$  desde un inicio pues solo nos interesan las partículas de luz. Introduciendo esta acción en la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$-E^2 r^2 + (r^2 - b_0^2) \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (4.12)$$

Separando la parte radial de la angular resulta en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} &= C \\ (r^2 - b_0^2) \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 - E^2 r^2 &= -C \end{aligned} \quad (4.13)$$

Donde  $C$  es la constante de separación. Mediante la relación  $\frac{\partial S}{\partial x^v} = p_v$  e introduciendo los parámetros de impacto las ecuaciones anteriores pueden escribirse como:

$$r^2 \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R} \quad (4.14)$$

$$r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta} \quad (4.15)$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\xi}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (4.16)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = \text{constante} \quad (4.17)$$

Donde  $\frac{d\varphi}{d\lambda}$  y  $\frac{dt}{d\lambda}$  completan las ecuaciones geodésicas y  $R$ ,  $\Theta$  están dados por:

$$R = (r^2 - b_0^2)(r^2 - \eta)$$

$$\Theta = \eta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta} \quad (4.18)$$

Las condiciones de órbitas de radio constante  $R = 0$  y  $\frac{dR}{dr} = 0$  o explícitamente:

$$r^4 - r^2(\eta + b_0^2) + b_0^2\eta = 0$$

$$4r^3 - 2r(\eta + b_0^2) = 0 \quad (4.19)$$

Resolviendo para  $\eta$  se obtiene el valor crítico del parámetro de impacto para este caso tenemos:

$$\eta = b_0^2 = r^2 \quad (4.20)$$

Las dos condiciones nos dan solo un valor para el parámetro  $\eta$ , no para  $\xi$  ya que  $R$  solo depende de  $\eta$ , sin embargo, esto no es problema para encontrar la sombra. Se puede dar una cota inferior al parámetro  $\xi$  mediante la condición  $\Theta \geq 0$ , el cual se traduce en  $\xi^2 \leq b_0^2 \sin^2 \theta$ .

Las coordenadas celestes están dadas por:

$$\alpha = -\frac{\xi}{\sin \theta} \quad (4.21)$$

$$\beta = \sqrt{\eta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta}} \quad (4.22)$$

Se puede tener una expresión no paramétrica de la sombra en el espacio  $\alpha - \beta$  despejando  $\xi$  de la expresión para  $\alpha$  y sustituyéndola en la de  $\beta$ . Haciendo esto resulta:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \eta = b_0^2 \quad (4.23)$$

De aquí se observa que la sombra son círculos de radio  $b_0$  y que además la sombra no depende del ángulo de inclinación del observador, algo que se esperaba ya que la métrica es esféricamente simétrica.

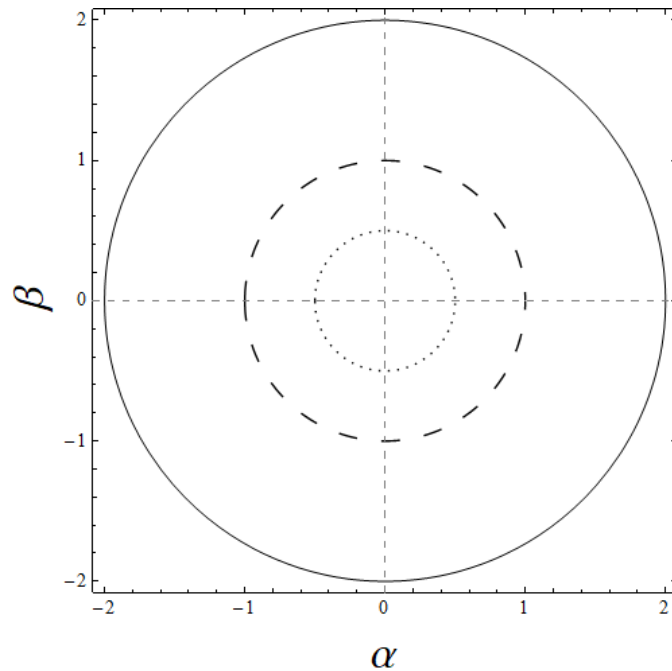


Figura 4.2 Sombra del agujero negro de Morris-Thorne. Línea sólida  $b_0 = 2$ . Línea rayada  $b_0 = 1$ . Línea punteada  $b_0 = 0,5$ .

## 4.2. Agujero de gusano atravesable con rotación.

La generalización del agujero de gusano de Morris-Thorne fué propuesta por Teo [12] en el que además de ser atravesable tiene también rotación. De forma general, la métrica es estacionaria y axialmente simétrica, explícitamente se escribe:

$$ds^2 = -Ndt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b}{r}} + r^2 K^2 \left[ d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\varphi - \omega dt)^2 \right] \quad (4.24)$$

Las funciones  $N$ ,  $\omega$ ,  $b$  y  $K$  dependen únicamente de las coordenadas  $r$  y  $\theta$ . Estas funciones están sujetas a condiciones que hacen que la solución tipo agujero de gusano sea bien comportada. La función  $N$  que representa el corrimiento al rojo debe ser finita y diferente de cero en todas partes para evitar singularidades en la curvatura u horizontes de eventos. La función  $K$  representa el radio del área dada por  $R = rK$  mientras que  $\omega$  determina la velocidad angular del agujero de gusano. La función de forma  $b$  debe satisfacer  $\partial_\theta b(r, \theta) = 0$  y  $\partial_r b(r, \theta) \leq 1$  en la garganta. Así mismo las derivadas angulares  $\partial_\theta N(r, \theta)$ ,  $\partial_\theta b(r, \theta)$ ,  $\partial_\theta K(r, \theta)$  deben ser igual a cero en el eje de rotación  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ .

Así mismo para que la métrica sea asintóticamente plana cuando se toma el límite  $r \rightarrow \infty$  debe tenerse:

$$N = 1 - \frac{M}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad K = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{b}{r} = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\omega = \frac{2J}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \quad (4.25)$$

Donde  $M$  es la masa ADM del agujero de gusano y  $J$  su momento angular. En el caso donde  $N$ ,  $K$ ,  $b$  y  $\omega$  dependen únicamente de la coordenada radial  $r$  las ecuaciones geodésicas son separables y por lo tanto se puede analizar la sombra de forma analítica.

### 4.2.1. Sombra.

Como se dijo previamente las funciones anteriores son separables en la ecuación de Hamilton-Jacobi si son solo funciones de la coordenada radial. Por lo que se supondrá que las funciones solo tienen esa dependencia. Se toma una acción de la forma usual como en los casos anteriores:

$$S = -Et + L\varphi + S_r(r) + S_\theta(\theta) + \frac{1}{2}m^2\lambda \quad (4.26)$$

Usando esto, las ecuaciones para  $S_r(r)$  y  $S_\theta(\theta)$  resultan como:

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 = C - \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \quad (4.27)$$

$$\left(1 - \frac{b}{r}\right) N^2 \left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = (E - \omega L)^2 - \left(m^2 N^2 + C \frac{N^2}{r^2 K^2}\right) \quad (4.28)$$

Siendo  $C$  la constante tipo Carter. Ya que nos interesan las geodésicas nulas haremos  $m = 0$ , además de introducir los parámetros de impacto  $\xi$ ,  $\eta$  y el parámetro afín  $\bar{\lambda} = E\lambda$ . Las ecuaciones resultan como:

$$\frac{N}{\left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2}} \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R} \quad (4.29)$$

$$r^2 K^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta} \quad (4.30)$$

$$N^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = \omega(1 - \omega\xi) + \frac{N^2 \xi}{r^2 K^2 \sin^2 \theta} \quad (4.31)$$

$$N^2 \frac{dt}{d\lambda} = 1 - \omega\xi \quad (4.32)$$

Donde  $R$  y  $\Theta$  son función de los parámetros de impacto y de las coordenadas radial y angular respectivamente:

$$R = (1 - \omega\xi)^2 - \eta \frac{N^2}{r^2 K^2}$$

$$\Theta = \eta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta} \quad (4.33)$$

Para determinar las órbitas críticas se utiliza la ecuación geodésica radial. Expresandola como una ecuación de balance de energía:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{eff} = 1 \quad (4.34)$$

Donde  $V_{eff}$  es el potencial efectivo dado por:

$$V_{eff} = 1 - \frac{1}{N^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) R(r) \quad (4.35)$$

La partícula saldrá dispersada lejos del agujero de gusano si existe un punto de retorno dado por  $\frac{dr}{d\lambda} = 0$  esto corresponde al máximo del potencial efectivo. Las órbitas de radio constante

estarán dadas por las condiciones:

$$V_{eff} = 1, \quad \frac{dV_{eff}}{dr} = 0, \quad \frac{d^2V_{eff}}{dr^2} \leq 0 \quad (4.36)$$

Existen dos clases de órbitas críticas, el primero el caso donde  $r = r_0$  es decir cuyo radio coincide con el radio de la garganta, donde  $(1 - \frac{b}{r}) = 0$ . El segundo caso corresponde al de órbitas fuera de la garganta, aquí  $(1 - \frac{b}{r}) \neq 0$ . Para este caso las condiciones del potencial efectivo se traducen a  $R$  como:

$$R = 0, \quad \frac{dR}{dr} = 0, \quad \frac{d^2R}{dr^2} \geq 0 \quad (4.37)$$

Usando las dos primeras condiciones se tienen los valores críticos de los parámetros de impacto:

$$\eta = \frac{r^2 K^2}{N^2} (1 - \omega \xi)^2$$

$$\xi = \frac{\Sigma}{\Sigma \omega - \omega'}, \quad \Sigma = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \ln \left( \frac{N^2}{r^2 K^2} \right) \quad (4.38)$$

En el caso de órbitas en la garganta de radio  $r = r_0$  el factor  $(1 - \frac{b}{r})$  es cero y entonces para que se cumplan las condiciones del potencial efectivo se debe tener:

$$R(r_0) = 0, \quad \left. \frac{d^2R}{dr^2} \right|_{r=r_0} \geq 0 \quad (4.39)$$

De la primera condición  $R(r_0) = 0$  tenemos:

$$(1 - \omega_0 \xi)^2 - (\eta + \xi^2) \frac{N_0^2}{r_0^2 K_0^2} = 0 \quad (4.40)$$

Donde el subíndice 0 implica evaluado en la garganta. Por otro lado, las coordenadas celestes están dadas por:

$$\alpha = -\frac{\xi}{\sin \theta} \quad (4.41)$$

$$\beta = \sqrt{\eta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta}} \quad (4.42)$$

La sombra debido a las órbitas circulares en la garganta está dada por las expresiones de las coordenadas celestes y de la ecuación de la condición  $R(r_0) = 0$ .

$$(N_0^2 - \omega_0^2 r_0^2 K_0^2 \sin^2 \theta) \alpha^2 - 2\omega_0 r_0^2 K_0^2 \sin \theta \alpha - r_0^2 K_0^2 + N_0^2 \beta^2 = 0 \quad (4.43)$$

Para proceder a encontrar la sombra del agujero de gusano se debe escoger una solución particular de la métrica. En muchos casos en la literatura se usa la siguiente elección de funciones que cumplen las condiciones antes descritas para que el agujero de gusano sea bien comportado:

$$N = \exp\left(-\frac{r_0}{r}\right), \quad K = 1, \quad \omega = \frac{2J}{r^3}, \quad b(r) = r_0 \quad (4.44)$$

Donde  $r_0$  es la garganta del agujero de gusano. Mientras que la elección de  $b(r)$  se elige ya que la sombra es independiente de esta función y es la elección mas simple que cumple con las condiciones. Al expandir la función  $N$  y compararla con (4.25) se obtiene que la masa del agujero de gusano  $M$  es igual al parámetro  $r_0$ .

La sombra está dada entonces por las ecuaciones (4.38) que describen la silueta debido a las órbitas de radio constante fuera de la garganta y de (4.43) que describe la silueta de la sombra debido a las órbitas inestables en la garganta. La silueta total es la superposición de estas dos siluetas.

Como puede observarse en la superposición de las siluetas ocurre en  $\alpha = 0$ . A medida que aumenta el momento angular del agujero de gusano la curva que describe la silueta debido a las órbitas en la garganta se aproxima a una línea recta en  $\alpha = 0$ . La sombra se compara con la de un agujero negro de Kerr con el mismo valor de la masa, en general, la sombra del agujero de gusano es parecida en forma a la del agujero negro para valores pequeños del momento angular pero difiere a medida que este parámetro aumenta. En general, la sombra del agujero de gusano es más pequeña.

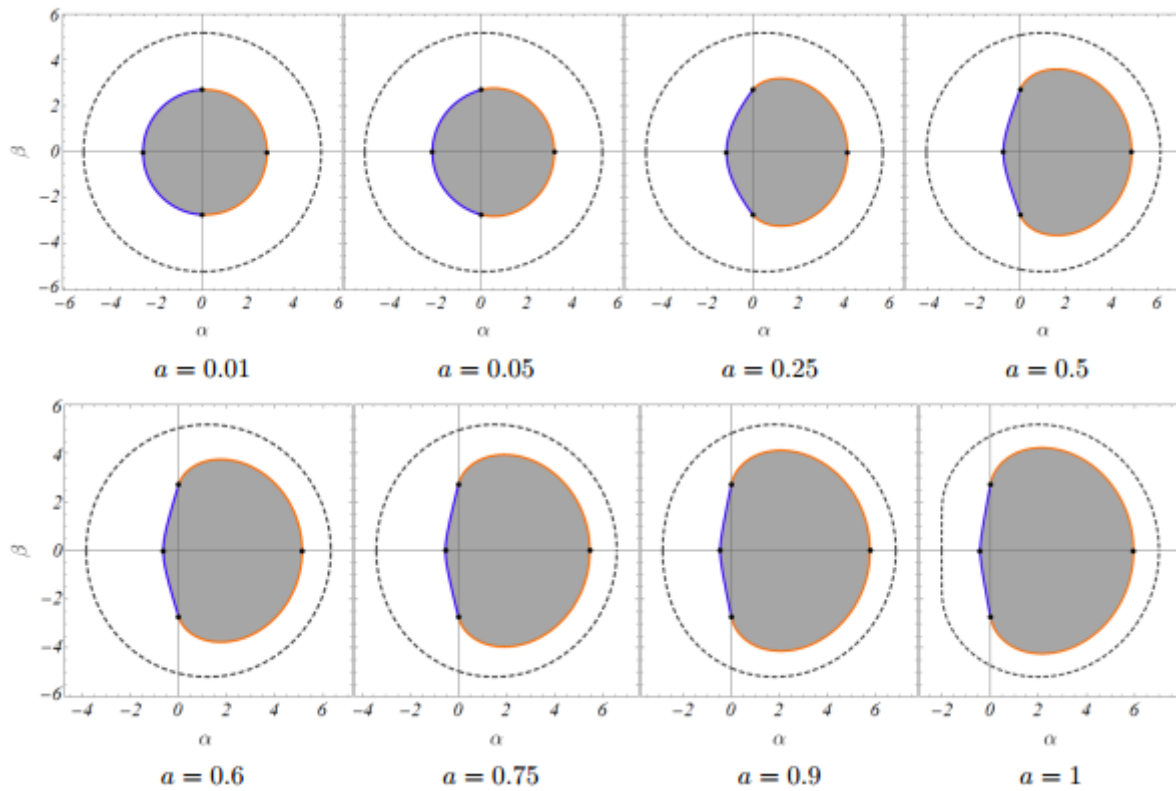


Figura 4.3 Sombra del agujero de gusano rotatorio para diferentes valores del parámetro  $a = J/M^2$  y  $\theta = \pi/2$ . La curva azul representa la parte de la sombra debido a las órbitas de radio constante con  $r = r_0$  en la garganta, mientras que la curva naranja las órbitas fuera de la garganta. La línea punteada representa la silueta de la sombra de un agujero negro de Kerr de la misma masa. Fuente: [13].



### 4.3. Agujero de gusano tipo Kerr.

En esta sección se estudiará una métrica tipo agujero de gusano la cual es solución a las ecuaciones de Einstein y que tienen como fuente un campo escalar con signo opuesto (phantom) [7]. La métrica es estática y axialmente simétrica esto significa que debido a la simetría del espacio-tiempo posee dos vectores de Killing, uno tipo tiempo y el otro tipo espacio. El elemento de línea se escribe en coordenadas Boyer-Lindquist como:

$$ds^2 = -f(dt + \omega d\varphi)^2 + \frac{1}{f} \left[ \Delta \left( \frac{dl^2}{\Delta_1} + d\theta^2 \right) + \Delta_1 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] \quad (4.45)$$

Donde los componentes  $\Delta_1$ ,  $\Delta$ ,  $f$ ,  $\omega$  y  $\lambda$  son en general funciones de  $l$  y  $\theta$  dadas por:

$$f = \frac{(a^2 + k_1^2) e^\lambda}{a^2 + k_1^2 e^{2\lambda}} \quad (4.46)$$

Con  $\lambda$  definido como:

$$\lambda = \frac{a^2 + k_1^2}{2k_1 \Delta} \cos \theta \quad (4.47)$$

$$\omega = a \frac{(l - l_1)}{\Delta} \sin^2 \theta \quad (4.48)$$

$$\Delta = (l - l_1)^2 + (l_0^2 - l_1^2) \cos^2 \theta \quad (4.49)$$

$$\Delta_1 = (l - l_1)^2 + (l_0^2 - l_1^2) \quad (4.50)$$

Aquí  $l_0$  y  $l_1$  son parámetros con unidades de distancia tales que cumplan  $g_{tt} > 0$ , entonces,  $l_0^2 > l_1^2 > 0$ . Los parámetros  $a$  y  $k_1$  tienen unidades de momento angular. La métrica es asintóticamente plana ya que en el límite cuando  $l \rightarrow \pm\infty$ ,  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow 0$  y  $f \rightarrow 1$ , mientras que  $\Delta$ ,  $\Delta_1 \rightarrow l^2$ :

$$ds^2 \rightarrow -dt^2 + dl^2 + l^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.51)$$

El cual corresponde al elemento de línea en el espacio plano en coordenadas esféricas. Los invariantes de la métrica están dados de forma general por:

$$Invariantes = \frac{F}{8k_1^2 \Delta^{r_1} \Delta_1^{r_2} (a^2 + k_1^2 e^{2\lambda})^{r_3}} \quad (4.52)$$

$F$  es una función que toma diferentes formas dependiendo del invariante pero es una función bien comportada y libre de singularidades, mientras que  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  son coeficientes positivos cuyo valor depende del invariante ( $r_1 = 4, r_2 = r_3 = 1$ ) para el escalar de curvatura.

De los invariantes podemos observar que hay una singularidad cuando  $\Delta = 0$  que corresponde a  $l = l_1$  y  $\theta = \pi/2$ . Al calcular la masa ADM del agujero de gusano y su momento angular se encuentra que,  $M = -l_1$  y  $J = a$ , por lo que la masa del agujero de gusano es negativa y el parámetro  $a$  es el que corresponde a su momento angular.

El elemento de línea puede escribirse como:

$$ds^2 = -f(dt + \omega d\varphi)^2 + \frac{K}{f}dl^2 + \frac{\Delta_1}{f} (Kd\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.53)$$

Donde  $K = \Delta/\Delta_1$  donde el término entre paréntesis se interpreta como el elemento de ángulo sólido modificado por el factor  $K$  que multiplica el término  $d\theta^2$ , la modificación se debe a que la simétrica esférica se rompe ya que la métrica es axialmente simétrica. El diagrama embebido se obtiene al considerar un tiempo  $t$  y ángulo  $\theta$  fijos. La métrica resulta entonces:

$$ds^2 = \frac{K}{f} \left( \frac{dl^2}{d\mathcal{R}} \right)^2 d\mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^2 d\varphi^2 \quad (4.54)$$

Donde  $\mathcal{R}^2 = R^2 \text{sen}^2 \theta_0$  y  $R^2 = f^{-1} \Delta_1$ . La superficie de embebido se escribe como

$$z(l, \theta_0) = \int_{l_1} \sqrt{\frac{K}{f} - \left( \frac{d\mathcal{R}}{dl} \right)^2} dl$$

En la figura se observa la función  $z$  para diferentes valores de  $\theta_0$ . La función es negativa cerca de  $\theta_0 = \pi/2$  por lo que no es bien comportada en el ecuador.

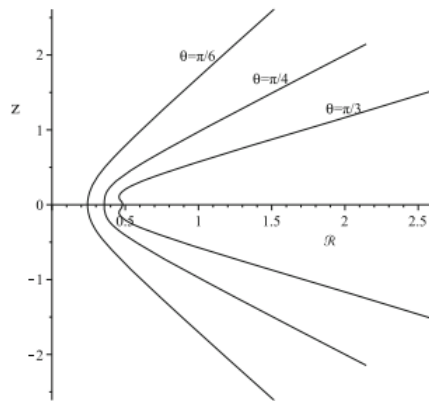


Figura 4.4 Garganta del agujero de gusano. Se tomó  $l_1 = 1,0$ ,  $l_0 = 1,1$ ,  $a = 0,11$  y  $k_1 = 0,1$ . La forma de la garganta cambia dependiendo del ángulo debido a que el espacio-tiempo es axialmente simétrico. Tomado de [7].

### 4.3.1. Sombra.

Para encontrar la sombra de forma analítica de este agujero de gusano se toma la aproximación de rotación lenta y campo débil de forma que se desprecien los términos a segundo orden y mayores, es decir,  $a^2 \ll 1$  y  $k_1^2 \ll 1$ . Con esta aproximación las funciones resultan como:

$$f \rightarrow 1 - \lambda, \quad \lambda = \frac{k_1 \cos \theta}{2\Delta} \quad (4.56)$$

Se toma también sin pérdida de generalidad  $r = l - l_1$  y  $r_0^2 = l_0^2 - l_1^2$ . Con esto las funciones que conforman las componentes de la métrica tienen la forma:

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 + r_0^2 \cos^2 \theta & \Delta_1 &= r^2 + r_0^2 \\ \omega &= a \frac{r}{2\Delta} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (4.57)$$

Mediante esta aproximación y aplicando el formalismo de Hamilton-Jacobi se consigue una constante de separación tipo Carter. Se toma una acción de la forma usual:

$$S = -Et + L\varphi + S_r(r) + S_\theta(\theta) + \frac{1}{2}m^2\lambda \quad (4.58)$$

Donde de nuevo se hace  $m = 0$  ya que nos interesan las geodésicas que siguen las partículas de luz. Sustituyendo lo anterior en la ecuación de Hamilton-Jacobi resulta en la siguiente expresión:

$$-\frac{E^2}{f^2}\Delta + \Delta_1 \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{\Delta}{\Delta_1 \sin^2 \theta} L^2 + EL \frac{ar}{\Delta_1} \quad (4.59)$$

Pero tomando en cuenta que

- $$\frac{\Delta}{f^2} = \Delta + k_1 \cos \theta = r^2 + r_0^2 \cos^2 \theta + k_1 \cos \theta \quad (4.60)$$

- $$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta_1 \sin^2 \theta} &= \frac{r^2 + r_0^2 \cos^2 \theta}{(r^2 + r_0^2) \sin^2 \theta} = \frac{r^2 + r_0^2 (1 - \sin^2 \theta)}{(r^2 + r_0^2) \sin^2 \theta} = \frac{r^2 + r_0^2 - r_0^2 \sin^2 \theta}{(r^2 + r_0^2) \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{r_0^2}{r^2 + r_0^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{r_0^2}{\Delta_1} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Por lo que esos factores pueden escribirse de forma separada en las coordenadas  $r$  y  $\theta$ . Sustituyendo lo anterior, la expresión explícita resulta:

$$-E^2 r^2 - E^2 \cos \theta (r_0^2 \cos \theta + k_1) + \Delta_1 \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} - \frac{r_0^2 L^2}{\Delta_1} + \frac{aELr}{\Delta_1} = 0 \quad (4.62)$$

Separando la parte radial de la angular tenemos:

$$\left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} - E^2 \cos \theta (r_0^2 \cos \theta + k_1) = C \quad (4.63)$$

$$\Delta_1 \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 - r^2 E^2 - \frac{r_0^2 L^2}{\Delta_1} + \frac{aELr}{\Delta_1} = -C \quad (4.64)$$

Donde  $C$  es la constante de separación. Lo anterior puede escribirse como:

$$\frac{\Delta dr}{f d\lambda} = \sqrt{R} \quad (4.65)$$

$$\frac{\Delta d\theta}{f d\lambda} = \sqrt{\Theta} \quad (4.66)$$

Donde  $R$  y  $\Theta$  están definidos como:

$$R = \Delta_1 (-C + r^2 E^2) + r_0^2 L^2 - aELr$$

$$\Theta = C - \frac{L^2}{\sin^2 \theta} + E^2 \cos \theta (r_0^2 \cos \theta + k_1) \quad (4.67)$$

Introduciendo los parámetros de impacto  $\xi = L/E$ ,  $\eta = C/E^2$  y el parámetro afín  $\bar{\lambda} = E\lambda$ .

$$R = \Delta_1 (-\eta + r^2) + r_0^2 \xi^2 - a\xi r$$

$$\Theta = \eta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta} + (r_0^2 \cos \theta + k_1) \cos \theta \quad (4.68)$$

Por lo que las ecuaciones geodésicas resultan en:

$$\frac{\Delta dr}{f d\bar{\lambda}} = \sqrt{R} \quad (4.69)$$

$$\frac{\Delta d\theta}{f d\bar{\lambda}} = \sqrt{\Theta} \quad (4.70)$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{f\omega + f\xi}{\Delta_1 \sin^2 \theta} \quad (4.71)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{f} - \frac{f\omega\xi}{\Delta_1 \sin^2 \theta} \quad (4.72)$$

Donde las ultimas expresiones completan las ecuaciones geodésicas para las coordenadas  $\varphi$  y el tiempo  $t$ . Las condiciones de órbitas de radio constante exigen que  $R = 0$  y  $\frac{dR}{dr} = 0$ , explícitamente se obtiene:

$$-\Delta_1 \eta + \Delta_1 r^2 + r_0^2 \xi^2 - a\xi r = 0 \quad (4.73)$$

$$2\Delta_1 r - 2r\eta + 2r^3 - a\xi = 0 \quad (4.74)$$

Por lo que se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas  $\eta$  y  $\xi$ . Como se puede observar en las ecuaciones anteriores el parámetro  $\xi$  aparece a segundo orden mientras que  $\eta$  a primero, por lo que al resolver las ecuaciones se tendrán dos familias para los parámetros de impacto. Los siguientes casos corresponden a los valores críticos de los parámetros de impacto respetando la aproximación hecha desde el principio de rotación lenta y campo débil.

▪ (i):

$$\xi = \frac{a(r^2 - r_0^2) + 4rr_0(r^2 + r_0^2)}{4rr_0^2} \quad (4.75)$$

$$\eta = 2r^2 + r_0^2 - \frac{a(r^2 + r_0^2)}{2rr_0} \quad (4.76)$$

▪ (ii):

$$\xi = \frac{a(r^2 - r_0^2) - 4rr_0(r^2 + r_0^2)}{4rr_0^2} \quad (4.77)$$

$$\eta = 2r^2 + r_0^2 + \frac{a(r^2 + r_0^2)}{2rr_0} \quad (4.78)$$

La solución físicamente aceptable debe cumplir con la condición impuesta en las ecuaciones geodésicas de  $\Theta \geq 0$ . Por lo que se sustituyen los valores de los parámetros de impacto de los dos casos en  $\Theta$ , con esto se obtiene  $\Theta(r)$ . Se hace la gráfica de  $\Theta$  vs  $r$  en ambos casos y se verifica cual cumple con  $\Theta \geq 0$ .

Como puede observarse de la gráfica de la función  $\bar{\Theta}$  vs  $r$  para el caso (i) se observa que  $\bar{\Theta} < 0$  para cualquier  $r$  y ángulo por lo que esta no representa una solución físicamente aceptable.

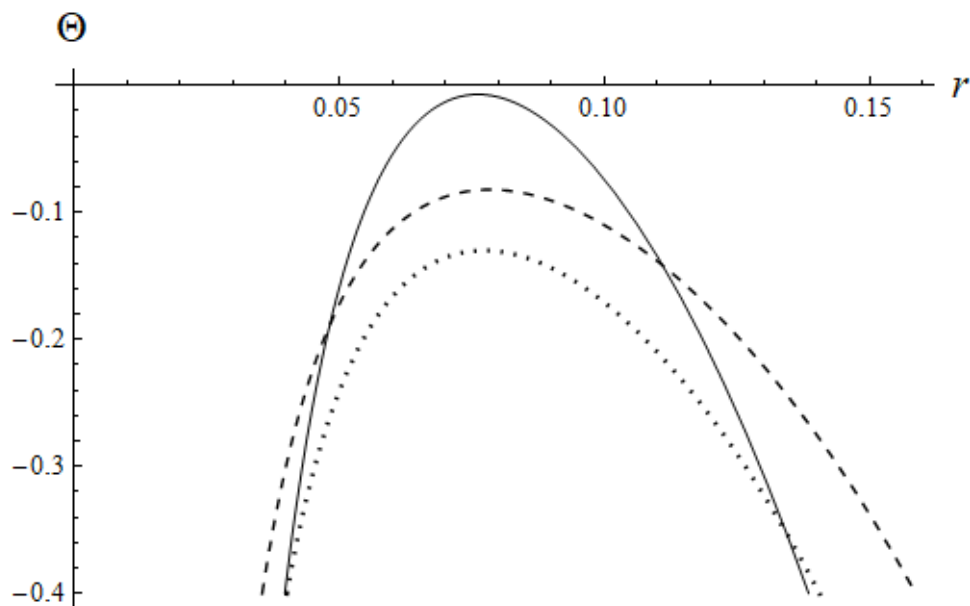


Figura 4.5 Función  $\bar{\Theta}$  vs  $r$  para el caso (i). Línea sólida  $\theta = \pi/4$ , línea rayada  $\theta = \pi/2$ , línea punteada  $\theta = 2\pi/3$ .

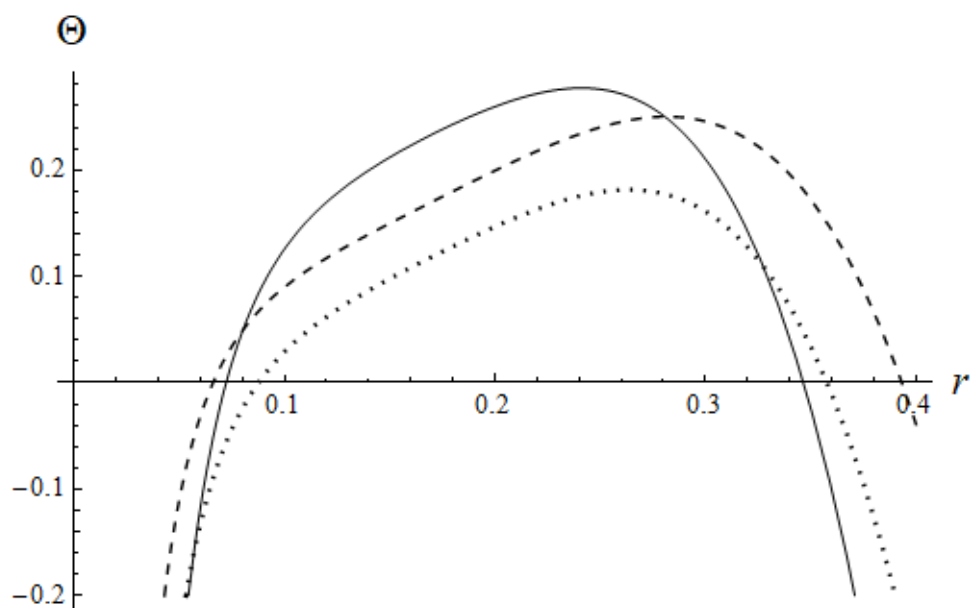


Figura 4.6 Función  $\bar{\Theta}$  vs  $r$  para el caso (ii). Línea sólida  $\theta = \pi/4$ , línea rayada  $\theta = \pi/2$ , línea punteada  $\theta = 2\pi/3$ .

En el caso(ii) se tiene que para una determinada región  $\bar{\Theta} \geq 0$  por lo que esta solución se toma como la posible físicamente y en donde existen órbitas de radio constante.

Las coordenadas celestes están dadas por:

$$\alpha = -\frac{\xi}{\sin \theta} \quad (4.79)$$

$$\beta = \pm \sqrt{\eta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta} + (r_0^2 \cos \theta + k_1) \cos \theta} \quad (4.80)$$

La sombra queda definida en el plano  $\alpha - \beta$  por las ecuaciones anteriores y los valores críticos de (ii). Para verificar si existe contribución de la sombra debido a la garganta como en el caso del agujero de gusano en la sección (4.2) se pone la ecuación radial de la forma:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{eff} = 1 \quad (4.81)$$

Donde el potencial efectivo en este caso está dado por:

$$V_{eff} = 1 - \left(\frac{f}{\Delta}\right)^2 R \quad (4.82)$$

Donde las condiciones en el potencial efectivo para que existan órbitas de radio constante están dadas por:

$$V_{eff} = 1, \quad \frac{dV_{eff}}{dr} = 0, \quad \frac{d^2V_{eff}}{dr^2} \leq 0 \quad (4.83)$$

Al evaluar el potencial efectivo en la garganta se tiene que  $V_{eff} \neq 1$  ya que:

$$\left(\frac{f}{\Delta}\right)^2 \Big|_{r=0} = \left(\frac{2r_0^2 \cos \theta - k}{2r_0^4 \cos^3 \theta}\right)^2 \quad (4.84)$$

$$R(r=0) = -r_0^2 \cos^2 \theta \eta + r_0^2 \xi^2 \quad (4.85)$$

Ya que el potencial no es un máximo en la garganta  $r = 0$  ( $l = l_1$ ) no cumple con las condiciones para que haya órbitas de radio constante y por lo tanto no aporta a la sombra. Se puede exigir que en la garganta  $R = 0$  eso cumpliría con la primera condición para el potencial efectivo pero no cumple con  $\frac{dV_{eff}}{dr} = 0$ . Si se exige que  $\frac{dR}{dr} = 0$  para cumplir la segunda condición se estaría regresando a las mismas condiciones impuestas a  $R$  anteriormente pero evaluando de forma arbitraria en  $r = 0$ , confirmando que en efecto no hay órbitas de radio constante en la garganta. Otra forma de ver que la garganta no aporta a la sombra es observando la función  $\Theta \leq 0$  para  $r = 0$ . A continuación se muestran las gráficas de las sombras variando el ángulo de observación y los parámetros  $k$  y  $r_0$ .

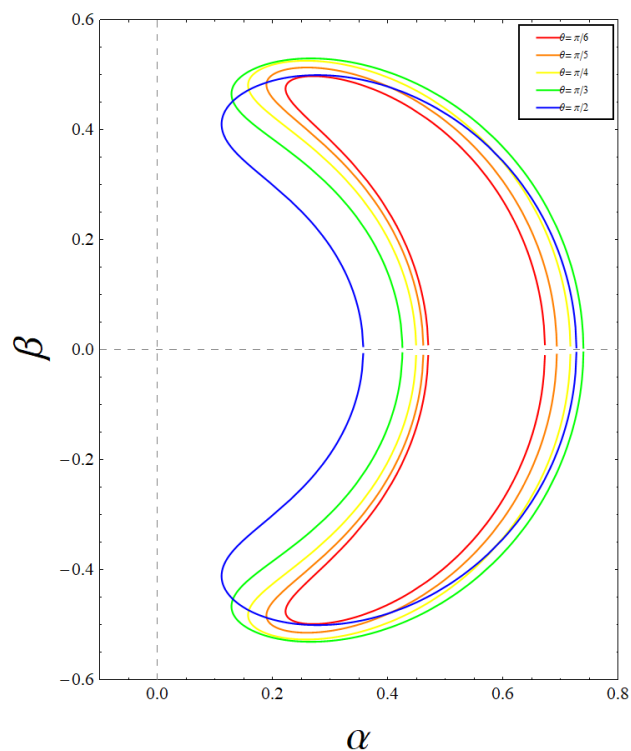


Figura 4.7 Sombra del agujero de gusano tipo Kerr variando el ángulo de observación  $\theta$ . Para las sombras  $a = 0,1$ ,  $r_0 = 0,1$  y  $k = 0,1$

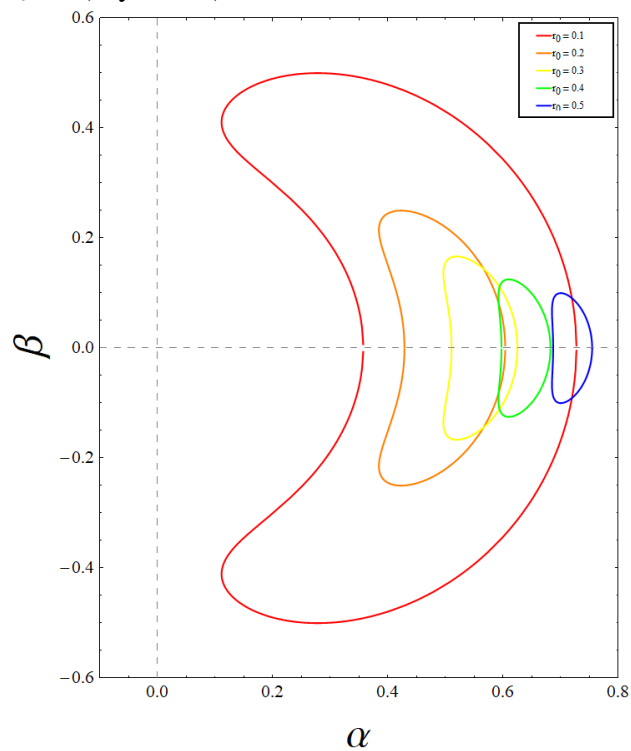


Figura 4.8 Sombra del agujero de gusano tipo Kerr variando el parámetro  $r_0$ . Para todas las sombras  $a = 0,1$ ,  $k_1 = 0,1$  y  $\theta = \pi/2$ .



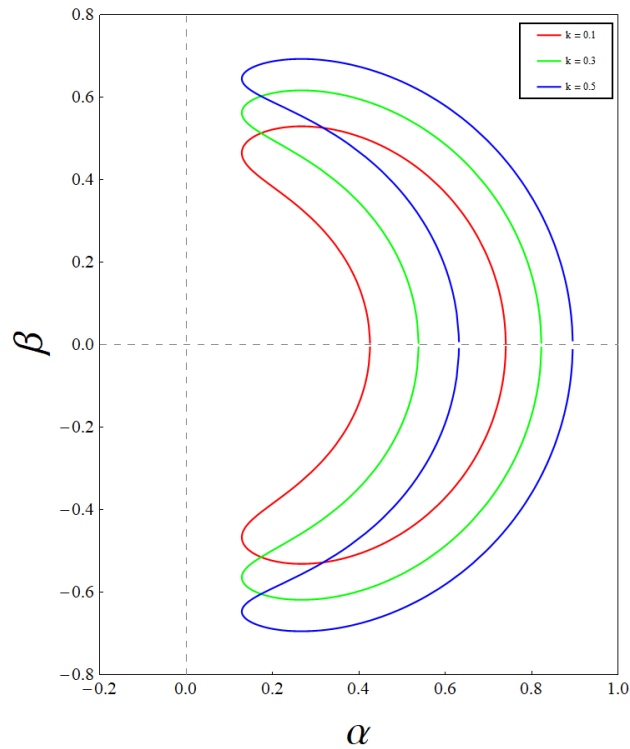


Figura 4.9 Sombra del agujero de gusano tipo Kerr el variando el parámetro  $k$ . Para las sombras  $a = 0,1$ ,  $r_0 = 0,1$  y  $\theta = \pi/3$ .

Como se ve en las gráficas la sombra depende del ángulo de observación pues la métrica no tiene simetría esférica, por otra parte el parámetro  $k$  hace la sombra mas grande en la coordenada  $\beta$  y la coordenada  $\alpha$  es independiente de éste parámetro, mientras que la cantidad  $r_0$  modifica considerablemente el tamaño de la sombra. Para medir como cambia el tamaño de la silueta con los diferentes parámetros se utiliza la caracterización descrita en la sección 2, en la cual nuestro indicador del tamaño es el radio promedio de la sombra. A continuación se muestran las gráficas  $\bar{r}$  vs  $r_0$  y  $\bar{r}$  vs  $k$ :

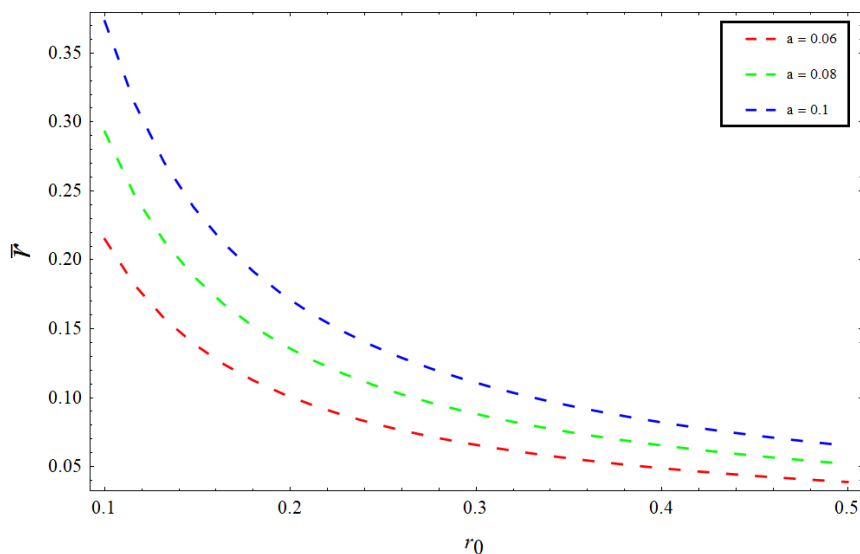


Figura 4.10 Gráfica  $\bar{r}$  vs  $r_0$  para el agujero de gusano tipo Kerr para diferentes valores del parámetro  $a$ .

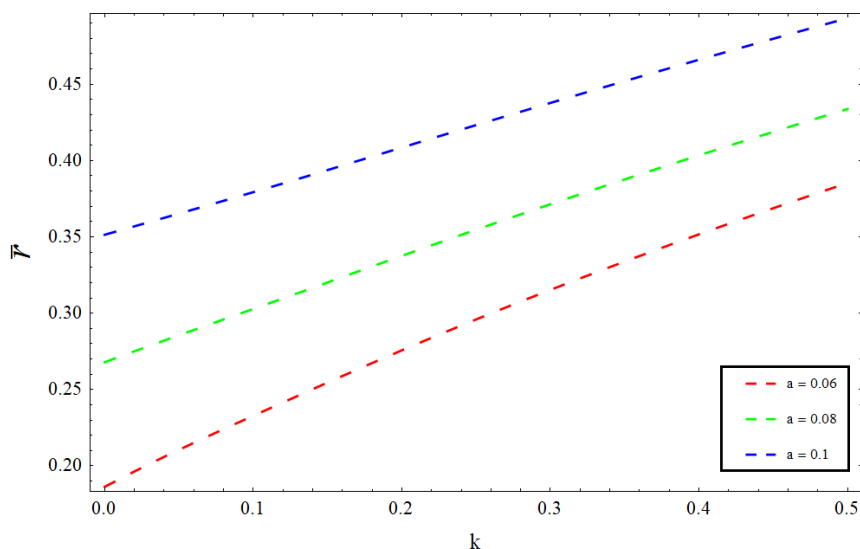


Figura 4.11 Gráfica  $\bar{r}$  vs  $k$  para el agujero de gusano tipo Kerr para diferentes valores del parámetro  $a$ .

Las gráficas muestran como cambia el tamaño de las sombras al variar los parámetros  $r_0$  y  $k_1$ . Para  $r_0$  el tamaño disminuye considerablemente mientras  $r_0$  aumenta, por otro lado el radio promedio de la sombra aumenta al aumentar  $k$  y la relación es lineal. Ya que el parámetro  $r_0$  tiene que ver con el tamaño de la garganta del agujero de gusano éste es el que domina el tamaño de la sombra pues dependiendo de que tan grande o pequeña sea la garganta, mas fotones o menos son capaces de atravesar el agujero de gusano los cuales definen la parte oscura de la sombra.

## 4.4. Agujero de gusano magnético sin violación de las condiciones de energía.

En esta sección se analizará un agujero de gusano con simetría axial y que satisface las condiciones de energía. Este espacio-tiempo representa una solución exacta de las ecuaciones de Einstein-Maxwell acopladas a un campo escalar. En el caso del agujero de gusano de Morris-Thorne, se analizó una métrica que representaba una solución tipo agujero de gusano y luego se construyó el tensor de energía momento para demostrarse que se violaban las condiciones de energía, en este caso la manera de proceder es proponer una fuente compuesta por materia no exótica, y obtener a partir de ella un espacio-tiempo que corresponda a una solución exacta para la fuente.

Como fuente se buscan campos escalares formados por partículas acopladas con el campo electromagnético. Para encontrar soluciones exactas mediante técnicas estándares se tomara al campo sin masa. Esto es, se toma un lagrangiano de la forma:

$$L = -R + 2\varepsilon (\nabla\Phi)^2 + e^{-2\alpha\Phi} F^2 + V(\Phi) \quad (4.86)$$

Donde  $R$  es el escalar de Ricci,  $F_{\mu\nu}$  el tensor de Faraday,  $\Phi$  el campo de una partícula con espín cero y  $V(\Phi)$  el potencial del campo. La constante  $\varepsilon$  hace diferencia entre un campo dilatónico ( $\varepsilon = +1$ ) y un campo tipo ghost ( $\varepsilon = -1$ ). Como se dijo, se toma el campo sin masa para encontrar el espacio-tiempo para esta fuente por lo que  $V(\Phi) = 0$ . Con este lagrangiano de las ecuaciones de Einstein-Maxwell se obtiene:

$$R_{\mu\nu} = 2\varepsilon\Phi_{,\mu}\Phi_{,\nu} + 2e^{-2\alpha\Phi} \left( F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\delta\gamma}F^{\delta\gamma} \right) \quad (4.87)$$

Donde el campo escalar está dado por:

$$\Phi = \frac{ay}{\alpha L^2 (x^2 + y^2)} \quad (4.88)$$

Y el vector potencial

$$A_{\mu} = -\frac{e^{\alpha\Phi}}{2} \left[ 1 - e^{-\alpha\Phi}, 0, 0, \frac{ax(1-y^2)}{L(x^2+y^2)} \right] \quad (4.89)$$

El espacio-tiempo en coordenadas esféricas oblatas con  $x \in \mathbb{R}$  y  $|y| \leq 1$  se escribe como:

$$ds^2 = L^2 \left[ (x^2 + y^2) e^K \left( \frac{dx^2}{x^2 + 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + (x^2 + 1) (1 - y^2) d\varphi^2 \right] - \left( dt + \frac{a x (1 - y^2)}{L (x^2 + y^2)} d\varphi \right)^2 \quad (4.90)$$

Donde  $L > 0$  es un parámetro con unidades de distancia,  $a$  un parámetro con unidades de momento angular y  $\alpha$  es la constante de acoplamiento entre el campo escalar y el electromagnético. También  $K$  dado por las ecuaciones de Einstein,

$$K = \frac{k (1 - y^2) \left[ 8x^2 y^2 (x^2 + 1) - (1 - y^2) (x^2 + y^2)^2 \right]}{L^4 (x^2 + y^2)^4} \quad (4.91)$$

Las constantes libres  $\alpha$ ,  $a$  y  $k$  están dadas de forma que

$$\alpha^2 (a^2 - 8k) - 4\epsilon a^2 = 0 \quad (4.92)$$

Para un campo dilatónico con acoplamiento  $\alpha^2 = 1$  se obtiene  $k = -\frac{3a^2}{8}$  mientras que para un campo ghost con el mismo acoplamiento se tiene  $k = \frac{5a^2}{8}$ . Para  $\alpha^2 = 3$  y un campo dilatónico se tiene  $k = -\frac{a^2}{24}$  mientras que para ghost  $\frac{7a^2}{24}$ . Si  $k = 0$ ,  $\alpha^2 = 4$  y solo es posible tener un campo dilatónico  $\epsilon = 1$ . Los invariantes de la métrica son de la forma:

$$Invariantes = \frac{F(x, y)}{(x^2 + y^2)^\beta} e^{-K} \quad (4.93)$$

donde  $\beta \in \mathbb{N}$  y  $F(x, y)$  es un polinomio de grado menor a  $(x^2 + y^2)^\beta$ . De los invariantes se observa que la métrica tiene una singularidad de anillo en  $x = 0$  y  $y = 0$  con radio  $L$ . La métrica es asintóticamente plana pues,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^K \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a x (1 - y^2)}{L (x^2 + y^2)} \rightarrow 0$$

La garganta del agujero de gusano se encuentra en  $x = 0$  la cual conecta dos espacios tridimensionales, uno donde  $x < 0$  y  $x > 0$  para el otro. En este caso la garganta no es una superficie compacta 2 dimensional sino mas bien un tipo de membrana, la cual está acotada

por la singularidad en forma de anillo en  $y = 0$ . A esta clase de agujeros de gusano se les conoce como agujeros de gusano de anillo [14], por el tipo de singularidad.

#### 4.4.1. Sombra.

Para encontrar la sombra de forma analítica de este agujero de gusano y tener ecuaciones separables en la ecuación de Hamilton-Jacobi se tomará el límite de rotación lenta, es decir,  $a^2 \ll 1$ . Pasando a coordenadas Boyer-Lindquist se toma una acción de la forma usual:

$$S = -Et + \mathcal{L}\varphi + S_r(r) + S_\theta(\theta) + \frac{1}{2}m^2\lambda \quad (4.95)$$

Donde para encontrar la sombra nos interesan las trayectorias que siguen los fotones y por tanto el caso  $m = 0$ . Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$-E^2 \left( \frac{r^2}{L^2} + \cos^2 \theta \right) + \frac{1 + \frac{r^2}{L^2}}{L^2} \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \frac{\text{sen}^2 \theta}{L^2} \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{\frac{r^2}{L^2} + \cos^2 \theta}{\text{sen}^2 \theta \left( 1 + \frac{r^2}{L^2} \right)} \frac{\mathcal{L}^2}{L^2} + \frac{2arE\mathcal{L}}{L^4 \left( 1 + \frac{r^2}{L^2} \right)} = 0 \quad (4.96)$$

Donde  $E$  y  $\mathcal{L}$  son la energía y el momento angular de la partícula. Notamos que esta ecuación es separable pues el término:

■

$$\frac{\frac{r^2}{L^2} + \cos^2 \theta}{\text{sen}^2 \theta \left( 1 + \frac{r^2}{L^2} \right)} = \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} - \frac{1}{1 + \frac{r^2}{L^2}} \quad (4.97)$$

Separando la parte angular de la radial:

$$\frac{\text{sen}^2 \theta}{L^2} \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 - E^2 \cos^2 \theta + \frac{\mathcal{L}^2}{L^2 \text{sen}^2 \theta} = C \quad (4.98)$$

$$\frac{1 + \frac{r^2}{L^2}}{L^2} \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 - \frac{E^2}{L^2} r^2 - \frac{\mathcal{L}^2}{L^2 \left( 1 + \frac{r^2}{L^2} \right)} + \frac{2arE\mathcal{L}}{L^4 \left( 1 + \frac{r^2}{L^2} \right)} = -C \quad (4.99)$$

Con  $C$  la constante de separación tipo Carter. Mediante  $p_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}$  las ecuaciones geodésicas se pueden escribir como:

$$\Delta \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R} \quad (4.100)$$

$$\Delta \frac{d\Theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta} \quad (4.101)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{aEr}{\Delta(r^2 + L^2)} + \frac{\mathcal{L}}{\sin^2 \theta (r^2 + L^2)} \quad (4.102)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = E - \frac{a\mathcal{L}r}{\Delta(r^2 + L^2)} \quad (4.103)$$

Donde  $\Delta = r^2 + L^2 \cos^2 \theta$ . Las funciones  $R$  y  $\Theta$  están dadas por:

$$R = E^2 r^4 + (E^2 - C) L^2 r^2 - 2aE\mathcal{L}r - CL^4 + L^2 \mathcal{L}^2 \quad (4.104)$$

$$\Theta = L^2 (C + E^2 \cos^2 \theta) - \frac{\mathcal{L}^2}{\sin^2 \theta} \quad (4.105)$$

Estas dos funciones son válidas en el región donde  $R \geq 0$  y  $\Theta \geq 0$ . Introduciendo los parámetros de impacto  $\xi = \mathcal{L}/E$ ,  $\eta = C/E^2$  y el parámetro afín  $\bar{\lambda} = E\lambda$  las ecuaciones anteriores se escriben como:

$$\Delta \frac{dr}{d\bar{\lambda}} = \sqrt{\bar{R}} \quad (4.106)$$

$$\Delta \frac{d\theta}{d\bar{\lambda}} = \sqrt{\bar{\Theta}} \quad (4.107)$$

$$\frac{d\phi}{d\bar{\lambda}} = \frac{ar}{\Delta(r^2 + L^2)} + \frac{\xi}{\sin^2 \theta (r^2 + L^2)} \quad (4.108)$$

$$\frac{dt}{d\bar{\lambda}} = 1 - \frac{ar\xi}{\Delta(r^2 + L^2)} \quad (4.109)$$

Con  $\bar{R}$  y  $\bar{\Theta}$  dados por:

$$\bar{R} = r^4 + (1 - \eta) L^2 r^2 - 2a\xi r + L^2 (\xi^2 - L^2 \eta) \quad (4.110)$$

$$\bar{\Theta} = L^2 (\eta + \cos^2 \theta) - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta} \quad (4.111)$$

Para órbitas de radio constante se requiere que  $\bar{R} = 0$  y  $\frac{d\bar{R}}{dr} = 0$  de estas dos condiciones se obtiene:

$$r^4 + (1 - \eta) L^2 r^2 - 2a\xi r + L^2 (\xi^2 - L^2 \eta) = 0 \quad (4.112)$$

$$4r^3 + (1 - \eta) 2L^2 r - 2a\xi = 0 \quad (4.113)$$

De estas dos expresiones se resuelve para  $\eta$  y  $\xi$  en términos del parámetro  $r$ . Ya que  $\xi$  es de segundo orden, se tendrán dos familias de soluciones para los valores críticos de los parámetros de impacto. Respetando la aproximación de rotación lenta se desprecian los términos de segundo orden y superiores en  $a$ .

▪ (i):

$$\xi = \frac{a(r^2 - L^2)}{2L^2r} + \frac{(L^2 + r^2)}{L} \quad (4.114)$$

$$\eta = \frac{L^6r + 2L^4r^3 - aL^3(L^2 + r^2)}{L^6r} \quad (4.115)$$

▪ (ii):

$$\xi = \frac{a(r^2 - L^2)}{2L^2r} - \frac{(L^2 + r^2)}{L} \quad (4.116)$$

$$\eta = \frac{L^6r + 2L^4r^3 + aL^3(L^2 + r^2)}{L^6r} \quad (4.117)$$

Para discriminar cual es la solución físicamente aceptable se debe tomar en cuenta la condición  $\bar{\Theta} \geq 0$ . Sustituyendo las expresiones para  $\eta$  y  $\xi$  dadas en los diferentes casos en  $\bar{\Theta}$  se obtiene una ecuación paramétrica en términos de  $r$ . Se verifica la condición  $\bar{\Theta} \geq 0$  al graficar  $\bar{\Theta}$  vs  $r$  para diferentes ángulos y tomando en cuenta que  $r \geq 0$ .

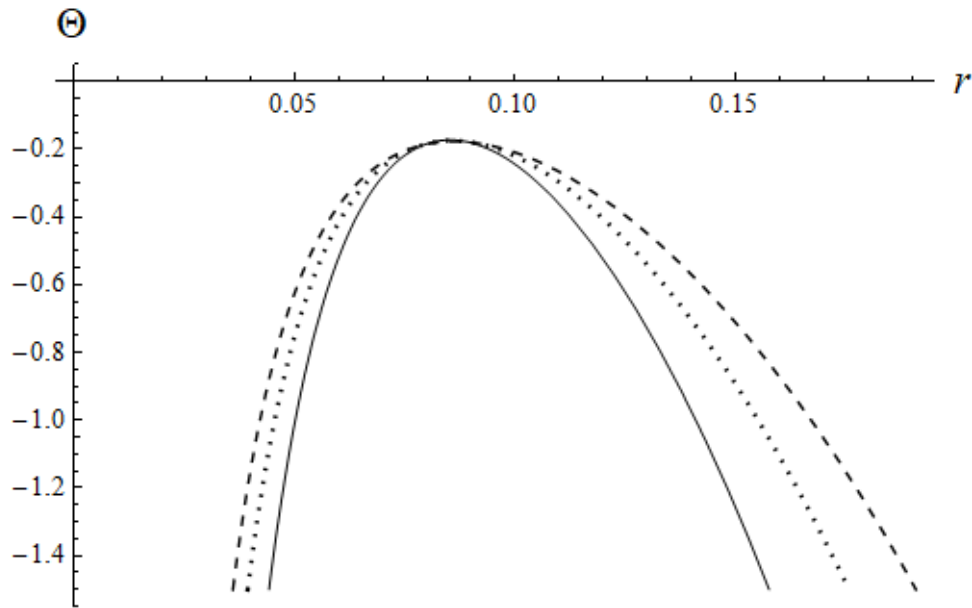


Figura 4.12 Función  $\bar{\Theta}$  vs  $r$  para el caso (i). Línea sólida  $\theta = \pi/4$ , línea rayada  $\theta = \pi/2$ , línea punteada  $\theta = 2\pi/3$ .

Para el caso (i) se tiene que, sin importar el ángulo la función es siempre negativa, es decir,  $\bar{\Theta} < 0$ . Se descarta este caso como físicamente posible.

Para el caso (ii) existe una región donde  $\bar{\Theta} \geq 0$  por lo que se toma esta solución como la aceptable físicamente.

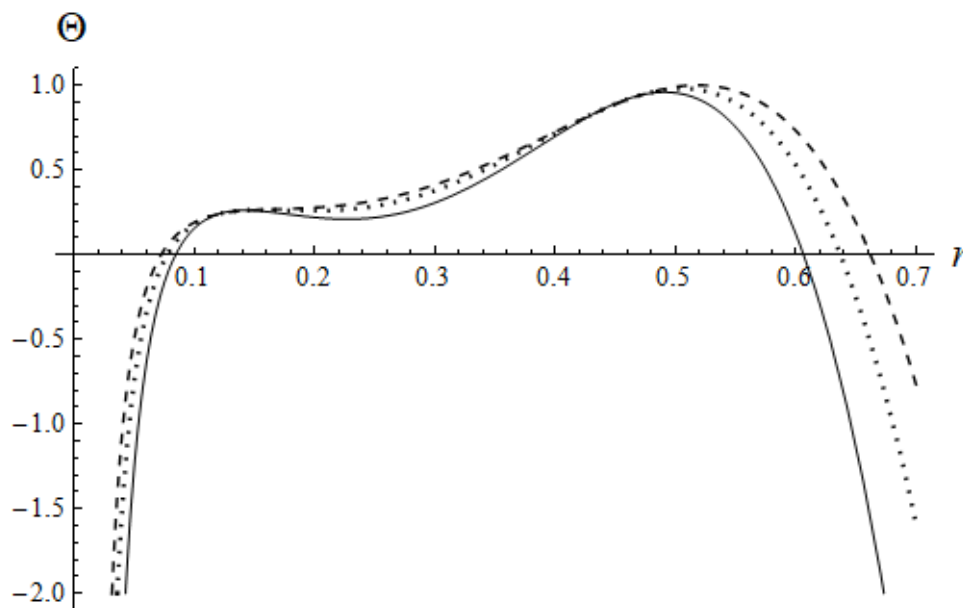


Figura 4.13 Función  $\bar{\Theta}$  vs  $r$  para el caso (ii). Línea sólida  $\theta = \pi/4$ , línea rayada  $\theta = \pi/2$ , línea punteada  $\theta = 2\pi/3$ .

Las coordenadas celestes están dadas por:

$$\alpha = -\frac{\xi}{\sin \theta} \quad (4.118)$$

$$\beta = \pm \sqrt{L^2 \eta + L^2 \cos^2 \theta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta}} \quad (4.119)$$

Y la sombra está dada entonces por las expresiones anteriores y los valores críticos de los parámetros de impacto dados por (ii). En esta ocasión no se tiene un máximo en el potencial cuando las funciones se evalúan en la garganta como en el caso del agujero de gusano visto en la sección (4.2). Para ver esto se pone la ecuación radial de la forma:

$$\left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V_{eff} = 1 \quad (4.120)$$

Donde el potencial efectivo en este caso está dado por:

$$V_{eff} = 1 - \frac{\bar{R}(r)}{\Delta^2} \quad (4.121)$$



Y recordando las condiciones para que existan órbitas de radio constante:

$$V_{eff} = 1, \quad \frac{dV_{eff}}{dr} = 0, \quad \frac{d^2V_{eff}}{dr^2} \leq 0 \quad (4.122)$$

Al evaluar el potencial efectivo en la garganta se tiene que  $V_{eff} \neq 1$  ya que:

$$\frac{1}{\Delta^2} \Big|_{r=0} = \frac{1}{(L^2 \cos^2 \theta)^2} \quad (4.123)$$

$$\bar{R}(r=0) = L^2 (\xi^2 - L^2 \eta) \quad (4.124)$$

Se puede exigir como en el caso de la sección (4.2) que la función  $\bar{R}$  sea cero al evaluarla en la garganta, esto cumpliría la primera condición donde  $V_{eff} = 1$ , sin embargo no la segunda ya que la derivada  $\frac{dV_{eff}}{dr} \neq 0$ . Por lo anterior se concluye que no existen órbitas de radio constante en la garganta. Otra forma de ver que la garganta no aporta a la sombra es por la gráfica de la función  $\Theta$  vs  $r$  donde para  $r = 0$ ,  $\Theta < 0$ . A continuación se muestran las sombras del agujero de gusano magnético variando el ángulo de observación y el parámetro  $L$ .

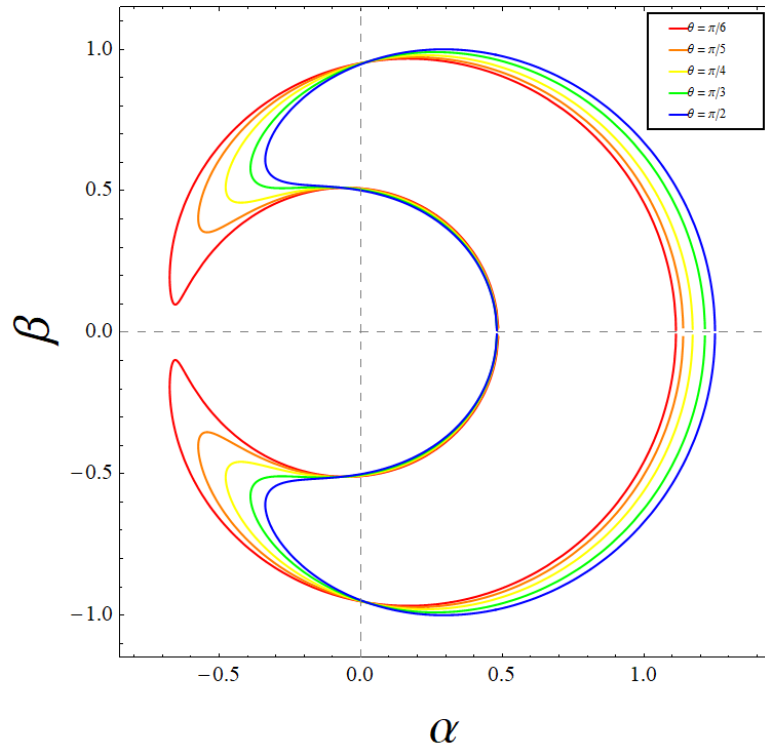


Figura 4.14 Sombra del agujero de gusano magnético variando el ángulo de observación  $\theta$ . Se tomó  $\alpha = 0,1$  y  $L = 0,1$

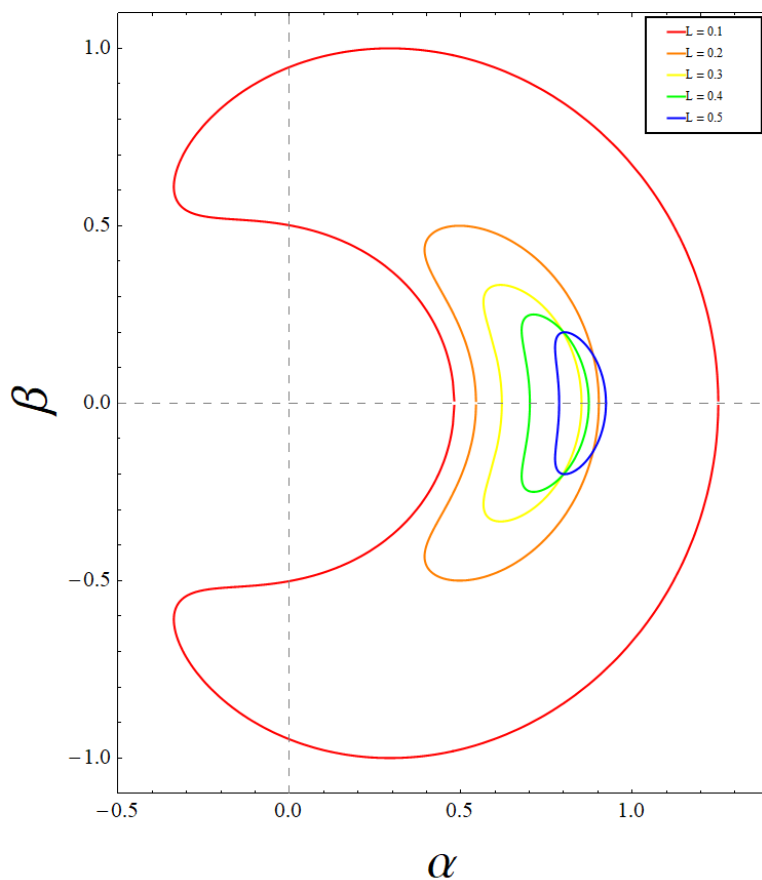


Figura 4.15 Sombra del agujero de gusano magnético variando el parámetro  $L$ . Para todas las gráficas  $a = 0,1$  y  $\theta = \pi/2$

Ya que la métrica es axisimétrica se esperaba que la sombra cambie dependiendo el ángulo de observación  $\theta$  como se muestra en la figura. Esto no modifica demasiado el tamaño de la sombra como tal pero si la forma de su silueta. Puede observarse también que en general el tamaño de la misma depende principalmente del valor del parámetro  $L$  pues el tamaño disminuye a medida que  $L$  aumenta. También si  $L$  aumenta, la forma de la sombra cambia pues el lado izquierdo de la silueta va achatándose y haciéndose cada vez más recta. Para ver la relación del tamaño con el parámetro  $L$  se recurre a la caracterización descrita en la sección 2 y se hace la gráfica del radio medio  $\bar{r}$  vs  $L$ .

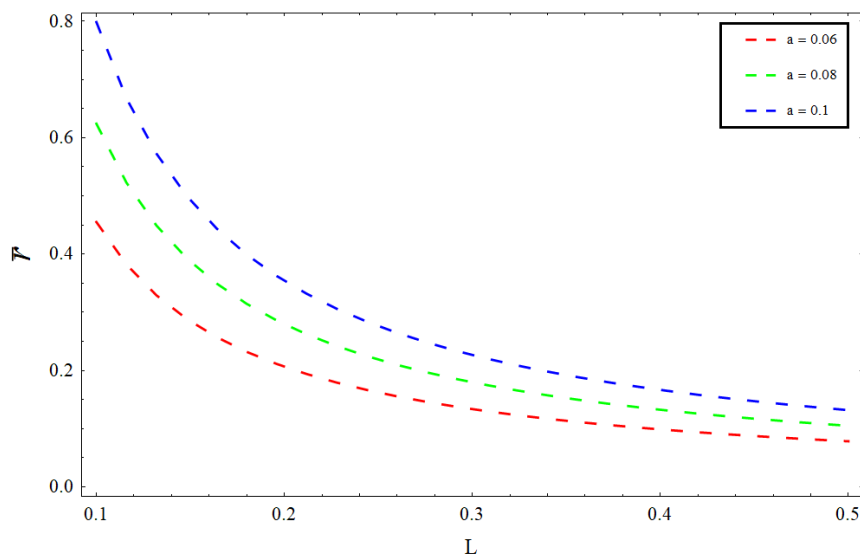


Figura 4.16 Gráfica  $\bar{r}$  vs  $L$  del agujero de gusano magnético para diferentes valores de  $a$ .

La gráfica muestra lo que se observa en las sombras, a medida que aumenta  $L$  la sombra se hace más pequeña, además entre más pequeño sea el parámetro  $a$  más pequeño es el tamaño promedio de la sombra. El parámetro  $L$  mide el radio de la singularidad en forma de anillo del agujero de gusano, como ya se ha demostrado en trabajos anteriores [15] las singularidades tipo anillo en otros agujeros de gusano pueden ser intocables para partículas siguiendo trayectorias geodésicas, si este es el caso explicaría el comportamiento de la sombra ya que aumentar el radio  $L$  los fotones que viajen en dirección del anillo para atravesar la garganta serán dispersados los cuales son identificados por el observador lejano como zonas brillantes en su plano imagen y por lo tanto disminuyendo el tamaño de la sombra.



# Capítulo 5

## Conclusiones.

En este trabajo se estudió la sombra de dos espacio-tiempo los cuales representan agujeros de gusano con rotación. Se encontró que en el régimen de rotación lenta las ecuaciones de Hamilton-Jacobi son separables en los dos casos y por lo tanto es posible encontrar la silueta de la sombra de forma analítica, dicha separación de variables también involucra una nueva cantidad conservada para una partícula de prueba siguiendo trayectorias geodésicas en éstas métricas. Ambas sombras dependen de la posición del observador debido a que las métricas tienen simetría axial y no esférica. El radio medio de la sombra para el agujero de gusano tipo Kerr depende en gran medida del parámetro que mide el tamaño de la garganta mientras que para el agujero de gusano magnético el parámetro que domina el tamaño es el radio de la singularidad desnuda que limita a la garganta. La sombra en ambos agujeros de gusano es muy peculiar y no es parecida a las estudiadas en otros trabajos anteriores. Se encontró también que no hay órbitas de radio constante en la garganta de ambos agujeros de gusano por lo que no fue necesario agregar la parte de la sombra que corresponde a esta región como en el caso del agujero de gusano con rotación visto en la sección (4.2). Bajo la aproximación de rotación lenta se puede encontrar las sombras de los agujeros de gusano de forma analítica, sin embargo, esto no representa un caso particularmente especial en la métrica, es decir, incluso cuando no hay rotación la métrica no es esféricamente simétrica ni se reduce a otro espacio-tiempo conocido por lo que no es posible compararla con otras sombras como en el ejemplo del agujero negro de Kerr que se reduce a Schwarzschild cuando no hay rotación lo cual también se refleja en su sombra. A pesar de no poder variar con libertad el parámetro de rotación debido a la aproximación de rotación lenta se encontró que para los dos agujeros de gusano la sombra disminuye su tamaño promedio al disminuir la rotación, por supuesto aquí solo se estudió en un rango muy corto y no es posible generalizar el comportamiento para rotación no lenta. Encontrar la sombra de ambos agujeros de gusano para cualquier rotación por métodos numéricos queda como trabajo a futuro.



# Bibliografía

- [1] A. Einstein and N. Rosen, "The Particle Problem in the General Theory of Relativity", *Phys. Rev.*, 48, (1935),73.
- [2] Misner C. and W. Wheeler, "Classical physics as geometry", *Ann. Phys.*2, 6, (1957), 525.
- [3] Ellis H., "Ether flow through a drainhole – a particle model in general relativity", *J Math Phys.*, 14,(1973), 104.
- [4] Bronnikov K.A."Scalar-tensor theory and scalar charge", *Acta Phys Pol B.*, 4,(1973),25.
- [5] Morris M.S., Thorne K.S, "Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: a tool for teaching general relativity", *Am. J. Phys.*, 56,(1988),395.
- [6] Thompson AR, Moran JM, Swenson GW Jr; 'Interferometry and synthesis in radio astronomy', Wiley, (2004).
- [7] T. Matos, G. Miranda, "Kerr-Like Phantom Wormhole", *Gen.Rel.Grav.*, 46,(2014),1613.
- [8] T. Matos, G. Miranda, "Exact Rotating Magnetic Traversable Wormholes satisfying the Energy Conditions", *arXiv:1507.02348 [gr-qc]* (2015).
- [9] Brandon Carter, "Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields", *Phys. Rev.*, 174, (1968),5.
- [10] S.E. Vazquez, E.P. Esteban, "Strong Field Gravitational Lensing by a Kerr Black Hole", *Nuovo Cim.*B119, (2003),489-519.
- [11] Pedro V. P. Cunha, Carlos A. R. Herdeiro, "Shadows of Einstein–dilatón–Gauss–Bonnet black holes", *Phys.Lett. B*768, (2017),373-379.
- [12] E. Teo, "Rotating traversable wormholes", *Phys.Rev D*58, (1998),024014.

- 
- [13] Galin Gyulchev, Petya Nedkova, Vassil Tinchev, Stoytcho Yazadjiev, "On the shadow of rotating traversable wormholes", *Eur.Phys.J. C*78, (2018),544.
- [14] Kirill A. Bronnikov and Julio C. Fabris. Ring wormholes in d-dimensional Einstein and dilaton gravity". (1996).
- [15] T. Matos, L. A. Urena-Lopez and G. Miranda, "WH Cosmic Censorship," arXiv:1203.4801 [gr-qc].
- [16] Sean Carroll, "Spacetime and geometry and introduction to general relativity", (2004), Eddison Wesley.