

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del Instituto Politécnico Nacional**

---

Departamento de Física

---

Discos de Acreción, solución numérica

Tesis presentada

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Maestro en Ciencias en la especialidad de Física**

por

Luis Alberto Martínez Medina

asesorado por

Dr. Tonatiuh Matos Chassin

México, Distrito Federal  
Noviembre de 2010



# Índice general

Resumen	v
Abstract	vii
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Discos de Acreción</b>	<b>5</b>
2.1. Introducción . . . . .	5
2.2. Las ecuaciones de la Hidrodinámica . . . . .	5
2.2.1. La aplicabilidad de la aproximación del fluido . . . . .	5
2.2.2. Camino libre medio para átomos neutros y moléculas . . . . .	6
2.2.3. Conservación de la masa . . . . .	6
2.2.4. Conservación del momento . . . . .	6
2.2.5. Conservación de la energía . . . . .	7
2.2.6. Fluido viscoso . . . . .	8
2.3. Discos de Acreción en Astrofísica . . . . .	9
2.3.1. Acreción: Generales . . . . .	9
2.3.2. Acreción adiabática . . . . .	10
2.3.3. Acreción Isotérmica . . . . .	10
2.4. Acreción sobre agujeros negros . . . . .	11
2.4.1. ¿Agujeros negros en Halos Galácticos? . . . . .	11
2.4.2. Diferencias entre movimientos alrededor de una estrella newtoniana y un agujero negro . . . . .	12
2.4.3. Geometrías pseudo newtonianas . . . . .	14
<b>3. Métodos Espectrales</b>	<b>15</b>
3.1. Introducción . . . . .	15
3.2. Métodos Espectrales . . . . .	16
3.3. Base de Chebyshev . . . . .	17
3.4. Método de Galerkin . . . . .	19
3.5. Método de Tau . . . . .	20
3.6. Transformadas Discretas de Fourier . . . . .	22
3.7. Error de Aliasing . . . . .	23
3.8. Inestabilidad de Aliasing: Historia y remedios . . . . .	25

3.8.1. Dealiasing y la regla de los dos tercios de Orszag . . . . .	26
3.9. Manejo de términos no lineales . . . . .	26
3.10. Cálculo del dato inicial . . . . .	27
3.11. Transformada discreta de Chebyshev . . . . .	28
<b>4. El código</b>	<b>29</b>
4.1. Ecuaciones básicas para un fluido unidimensional . . . . .	29
4.2. El código . . . . .	30
4.2.1. Caída libre de un anillo de polvo . . . . .	31
4.2.2. Momento angular y viscosidad. . . . .	35
4.3. Acreción en Agujeros Negros . . . . .	39
4.3.1. Unidades físicas y unidades del código . . . . .	43
<b>5. Acreción en oscilaciones</b>	<b>45</b>
5.1. Acreción en Oscilaciones . . . . .	47
<b>6. Conclusiones</b>	<b>51</b>
<b>A. Método de Runge-Kutta para sistemas de ecuaciones diferenciales</b>	<b>53</b>
<b>B. El potencial Paczyński-Wiita</b>	<b>55</b>

# Resumen

Nos damos a la tarea de resolver numéricamente las ecuaciones hidrodinámicas que describen a un fluido en acreción alrededor de un objeto central caracterizado por un potencial gravitacional. Decidimos utilizar, como método numérico, los métodos espectrales ya que nos permiten manejar de manera clara las no linealidades de las ecuaciones. Esto nos ha llevado a construir nuestro propio código con el que podemos analizar las simulaciones hidrodinámicas de un fluido en acreción alrededor de objetos como estrellas y agujeros negros. El código representa una dinámica de fluidos newtoniana, y no modela ninguno de los efectos de la relatividad especial o general, así que una idea interesante, en el estudio de discos de acreción, es usar un potencial pseudo-newtoniano para modelar lo que se espera que sea el efecto relativista dominante alrededor de un agujero negro no rotante, la existencia de una órbita marginalmente estable.



# Abstract

The main task here is to solve, numerically, the hydrodynamical equations describing accretion flows around a central object characterized by a gravitational potential. We decided to use, as numerical method, spectral methods, allowing us to handle clearly the nonlinearities in the equations. This has led us to build our own code with which we can analyze hydrodynamic simulations of accretion flows around objects like stars and black holes. This is a Newtonian fluid dynamics code which does not model any of the effects of special or general relativity, so that an interesting idea in the study of accretion flows is the use of a pseudo-Newtonian gravitational potential to model what is expected to be the dominant relativistic effect around a non-rotating black hole, the existence of an innermost stable orbit.









# Capítulo 1

## Introducción

El tema *hidrodinámica* o *dinámica de fluidos* describe el flujo (dependiente del tiempo o estacionario) de fluidos o gases. El nombre se origina de flujo de fluidos (por tanto las palabras “hidro” y “fluido”), pero en física este nombre es también usado para describir el flujo de un gas, y en astrofísica es usado casi exclusivamente de esta manera. La Hidrodinámica es un tema de fundamental importancia para muchas aplicaciones en la industria. Por ejemplo, este es usado para modelar el flujo alrededor de superficies de sustentación y aeroplanos, la aerodinámica de autos deportivos, el fluir del agua a través de tuberías y ductos, la estabilidad aerodinámica de construcciones, procesos complejos de combustión en reactores nucleares, etc. También juega un rol importante en muchos estudios científicos, por ejemplo en investigación meteorológica y climática (modelando corrientes oceánicas y frentes climáticos) y en astrofísica donde es usado para casi cualquier tema: formación estelar y planetaria, formación de galaxias, formación de estructura en el universo temprano, la acreción de gases sobre agujeros negros y estrellas de neutrones, los vientos en colisión de estrellas evolucionadas, etc.

Prácticamente en todas las aplicaciones los problemas son tan complejos que los métodos analíticos son inadecuados. La solución se busca casi siempre usando *métodos numéricos*, que, implementados en programas de computadora, pueden dar soluciones para datos iniciales dados y/o condiciones de frontera.

Este trabajo tiene como objetivo aplicar uno de estos métodos numéricos a un problema particular de la astrofísica, el estudio de discos de acreción. Con ello se pretende

En primer lugar, familiarizarse con las herramientas de la física computacional, esto mediante la construcción de nuestro primer código para resolver las ecuaciones hidrodinámicas.

Profundizar en el método, como funciona y cuales son sus limitaciones.

La hidrodinámica astrofísica usualmente involucra la interacción entre gas y campos de radiación. Esto requiere resolver las ecuaciones combinadas de la hidrodinámica y la transferencia radiativa. Esto es llamado radiación-hidrodinámica, y es tan

## CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

---

compleja que en muchas aplicaciones aun está en sus primeros pasos. También en astrofísica los campos magnéticos juegan un rol crucial: el movimiento del gas puede generar (o al menos amplificar) los campos magnéticos a través del efecto dínamo, y estos campos pueden afectar enormemente el movimiento del gas. Un ejemplo de esto es la magnetósfera del Sol, donde las erupciones solares son claramente una interacción entre gas y campos magnéticos. Esto es llamado magneto-hidrodinámica y es un campo aún en desarrollo.

En este trabajo nos enfocaremos únicamente en la hidrodinámica normal con términos fuente simples como la gravedad. Y es con el término de gravedad con el que experimentaremos en nuestro código y nuestras ecuaciones, lo cual nos permitirá estudiar los discos de acreción sobre diferentes objetos.

En el capítulo dos presentaremos las ecuaciones de la hidrodinámica y hablaremos sobre la teoría de Discos de acreción. En el capítulo tres veremos una breve introducción a los métodos numéricos que se aplicarán para resolver las ecuaciones hidrodinámicas. En el capítulo cuatro describiremos brevemente el funcionamiento del código y su aplicación en algunos tipos de potencial. En el capítulo cinco introduciremos en nuestras ecuaciones y en nuestro código un potencial de oscilación, aún no estudiado en la teoría de discos de acreción.

# Capítulo 2

## Discos de Acreción

### 2.1. Introducción

Los astrónomos creen que una lenta acumulación de materia por un objeto central via el flujo de gas através de un disco delgado soportado centrifugamente ocurre en muchos objetos astrofísicos: núcleos activos de galaxias (AGN's), x-ray binarias, material nebuloso alrededor de estrellas jóvenes, etc. En este trabajo modelaremos estos sistemas utilizando las ecuaciones de la hidrodinámica que posteriormente se resolverán numéricamente.

### 2.2. Las ecuaciones de la Hidrodinámica

#### 2.2.1. La aplicabilidad de la aproximación del fluido

Para comenzar nuestra discusión nos hacemos una pregunta natural, ¿bajo que circunstancias podemos justificar el tratamiento de una colección de partículas libres (un gas) como un continuo? La respuesta a esta pregunta yace en la comparación del camino libre medio  $l$  con la escala de longitud macroscópica de interés en el problema. Si  $l \ll L$ , tiene sentido físico introducir el concepto de un *elemento de fluido*  $\epsilon$ , con volumen  $V$ , cuyo tamaño lineal es pequeño en comparación con  $L$  pero grande en comparación con  $l$ . El número de partículas del que está formado este elemento de fluido es grande, y podemos definir efectivamente una velocidad media  $\mathbf{u}$  para la colección de partículas, con movimientos individuales  $\mathbf{v}$  que poseen una componente aleatoria  $\mathbf{w}$  alrededor del promedio:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}. \quad (2.1)$$

Sin embargo, debido a que  $l \ll L$ , la velocidad aleatoria no tiene éxito en llevarse a alguna partícula lejos de sus vecinas, ya que las colisiones incesantes redirigen continuamente a  $\mathbf{w}$  y ocasionan que la partícula realice un movimiento aleatorio alrededor del movimiento promedio  $\mathbf{u}$ .

### 2.2.2. Camino libre medio para átomos neutros y moléculas

Para átomos y moléculas neutros, los cuales interactúan con otras partículas solo a través de fuerzas de corto alcance, el camino libre medio se escribe como

$$l = (n\sigma)^{-1}, \quad (2.2)$$

donde  $n$  es la densidad de número de compañeras de colisión y  $\sigma$  es la sección eficaz de dispersión asociada. Típicamente,  $\sigma \sim 10^{-15} \text{cm}^2$ . Entonces  $l \sim 10^{-4} \text{cm}$  en esta habitación, donde  $n \sim 10^{19} \text{cm}^{-3}$ . El espacio interestelar se encuentra mucho más enrarecido, por ejemplo, en una nube de hidrógeno atómico (una región  $H_I$  en la nomenclatura astronómica),  $n$  puede ser solo  $10 \text{cm}^{-3}$ , y  $l$  entonces sería  $\sim 10^{14} \text{cm}$ , que es aproximadamente la distancia del Sol a Júpiter. Esto representa una distancia enorme en estándares humanos, pero de hecho las nubes  $H_I$  se expanden por  $10^{19} \text{cm}$  o más. Entonces  $l \ll L$  y un tratamiento de fluido de dicha nube de gas difuso sería válido.

El movimiento de un gas es gobernado enteramente por leyes de conservación: la conservación de la materia, la conservación del momento y la conservación de la energía. Las leyes de conservación pueden ser escritas en forma de ecuaciones diferenciales parciales (PDE) como también en forma de ecuaciones integrales.

### 2.2.3. Conservación de la masa

Considere un volumen arbitrario  $V$  en el espacio en el cual nuestro flujo de gas tiene lugar. Denotamos a su superficie por  $S$  con vector normal  $\vec{n}$  y elemento de superficie  $dS$ . La conservación de la masa establece que la variación de masa en el volumen es debida enteramente al flujo entrante o saliente de masa a través de  $S$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (2.3)$$

usando el teorema de Gauss podemos escribir esto como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dV \quad (2.4)$$

Ya que esto es cierto para todo volumen, llegamos a la siguiente PDE:

$$\partial_t \vec{u} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.5)$$

donde  $\rho \vec{u}$  es el flujo de masa. Esta también es llamada la ecuación de continuidad.

### 2.2.4. Conservación del momento

Consideremos cierto volumen de fluido, la fuerza que actúa sobre este es igual a la integral

$$- \int P d\vec{s} \quad (2.6)$$

de la presión, extendida a la superficie que limita al volumen. Transformandolo en una integral de volumen tenemos

$$- \int P d\vec{s} = - \int \nabla P dV \quad (2.7)$$

A continuación podemos escribir la ecuación de movimiento de un elemento de volumen del fluido

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P \quad (2.8)$$

con  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ , por lo tanto

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (2.9)$$

esta es la ecuación de Euler. Ahora, el momento por unidad de volumen es  $\rho \vec{v}$ . Determinemos su variación respecto al tiempo.

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i \quad (2.10)$$

la cual, utilizando la ecuación de continuidad y la ecuación de Euler podemos escribir como

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad \Pi_{ik} = P \delta_{ik} + P v_i v_k \quad (2.11)$$

### 2.2.5. Conservación de la energía

La energía existe en muchas formas. Nos concentraremos en las dos más básicas: la energía específica termal (energía interna),  $e$ , y la energía específica cinética  $e_{cin} = u^2/2$ . De tal manera que la energía total es la integral de volumen de  $\rho(e + u^2/2)\vec{u} \cdot \vec{n}$ . Pero en adición a esto también tenemos trabajo que ejerce el exterior sobre el volumen de control de acuerdo a la primera ley de termodinámica ( $dU + TdS - PdV$ ), el cual es la integral de superficie de  $P\vec{u} \cdot \vec{n}$ . Por tanto la ecuación de conservación de la energía es

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \left( e + \frac{1}{2} u^2 \right) dV = - \int_{\partial V} \rho \left( e + \frac{1}{2} u^2 \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS - \int_{\partial V} P \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (2.12)$$

Usando el teorema de Gauss tenemos:

**CAPÍTULO 2. DISCOS DE ACRECIÓN**  
**2.2. LAS ECUACIONES DE LA HIDRODINÁMICA**

---

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \left( e + \frac{1}{2} u^2 \right) dV + \int \nabla \cdot \left[ \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 + P \right) \vec{u} \right] = 0 \quad (2.13)$$

Ya que esto debe ser válido para todo volumen control  $V$ , tenemos la forma diferencial de la ecuación de conservación de la energía:

$$\partial_t(\rho e_{tot}) + \nabla \cdot [(\rho e_{tot} + P)\vec{u}] = 0 \quad (2.14)$$

o en notación tensorial:

$$\partial_t(\rho e_{tot}) + \partial_k[(\rho e_{tot} + P)u_k] = 0 \quad (2.15)$$

Esta es la ecuación de conservación de la energía.

### 2.2.6. Fluido viscoso

El efecto que tiene la disipación de la energía, que ocurre durante el movimiento de un fluido, es el resultado de la irreversibilidad termodinámica del movimiento. Esta irreversibilidad siempre ocurre hasta cierto punto, y es debida a la fricción interna (viscosidad) y conducción térmica.

Con el fin de obtener las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido viscoso, se deben incluir algunos términos adicionales en la ecuación de movimiento de un fluido ideal. La ecuación de continuidad, como vimos en su derivación, es igualmente válida para cualquier fluido, ya sea viscoso o no, la ecuación de Euler por otro lado, requiere modificaciones. Hemos visto que la ecuación de Euler puede ser escrita en la forma

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \quad (2.16)$$

donde  $\Pi_{ik}$  es el tensor de flujo de momento. El flujo de momento dado por la fórmula (2.11) representa una transferencia de momento completamente reversible, debida simplemente al transporte mecánico de las diferentes partículas del fluido de un lugar a otro y a las presiones actuando en el fluido. La viscosidad (fricción interna) causa otra transferencia, irreversible, de momento desde puntos donde la velocidad es grande a puntos donde es pequeña.

La descripción del fluido viscoso se obtiene añadiendo al flujo de momento “ideal” un término  $-\sigma_{ik}$  que nos da la transferencia irreversible de momento. La forma general del tensor  $\sigma_{ik}$  se puede establecer como sigue. Procesos de fricción interna ocurren en el fluido solo cuando diferentes partículas se mueven con velocidades diferentes, de tal manera que existe un movimiento relativo entre varias partes del fluido. Por tanto  $\sigma_{ik}$  debe depender de las derivadas espaciales de la velocidad. Si los gradientes de velocidad son pequeños, podemos suponer que la transferencia de momento debida a la viscosidad depende solo de las primeras derivadas de la velocidad. En la misma aproximación,  $\sigma_{ik}$  se puede suponer como una función lineal



de las derivadas  $\partial v_i / \partial x_k$ . Además no puede haber términos en  $\sigma_{ik}$  independientes de  $\partial v_i / \partial x_k$  ya que  $\sigma_{ik}$  se debe anular para  $\vec{v} = \text{constante}$ .

En breve, la modificación a la ecuación de Euler para incluir los efectos de la viscosidad da como resultado la ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho} \nabla \tau - \vec{g} \quad (2.17)$$

donde  $\tau$  es el tensor de viscosidad.

## 2.3. Discos de Acreción en Astrofísica

Se infiere que los discos de acreción existen en objetos de escalas muy diferentes: kilómetros a millones de kilómetros en binarias de rayos X de masa pequeña, radios solares a unidades astronómicas en discos protoestelares y unidades astronómicas a parsecs en discos en núcleos activos de galaxias (AGN's).

Debido a la ausencia de observaciones directas de discos de acreción la teoría a tratado de proveer modelos, cuyos grados de éxito han variado. Aun existe incertidumbre con respecto a algunas ecuaciones básicas. En esta situación es muy probable que el progreso hecho por las observaciones o el modelado de alguna clase particular de objetos tenga un impacto directo en el entendimiento de otros objetos.

### 2.3.1. Acreción: Generales

Gas cayendo en el potencial de una masa puntual

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \quad (2.18)$$

desde una distancia  $r_0$  hasta una distancia  $r$  convierte energía gravitacional en energía cinética, por una cantidad de  $\Delta\Phi = GM(1/r - 1/r_0)$ . Por simplicidad asumamos que la distancia de partida es grande,  $\Delta\Phi = GM/r$ . Si el gas es entonces traído hasta el reposo, por ejemplo a la superficie de una estrella, la cantidad de energía  $e$  disipada por unidad de masa es

$$e = \frac{GM}{r}(\text{reposo}) \quad (2.19)$$

o, si este mantiene una órbita circular kepleriana a una distancia  $r$ :

$$e = \frac{1}{2} \frac{GM}{r}(\text{órbita}) \quad (2.20)$$

La energía disipada se convierte en energía interna del gas y en radiación, la cual escapa al infinito (usualmente en la forma de fotones, pero pérdida por neutrinos también puede jugar un rol importante en algunos casos).

### 2.3.2. Acreción adiabática

Considere primero el caso en el que las pérdidas por radiación son despreciadas. Esta es la acreción adiabática. Para un gas ideal con cociente entre calores específicos  $\gamma$  constante, la energía interna por unidad de masa es

$$e = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho}. \quad (2.21)$$

Con la ecuación de estado

$$P = R\rho T/\mu \quad (2.22)$$

donde  $R$  es la constante de los gases,  $\mu$  el peso atómico medio por partícula, encontramos la temperatura del gas después de que la disipación ha ocurrido (asumiendo que el gas termina en órbita circular):

$$T = \frac{1}{2}(\gamma - 1)T_{vir}, \quad (2.23)$$

donde  $T_{vir}$ , la temperatura del virial está dada por

$$T_{vir} = \frac{GM\mu}{Rr}. \quad (2.24)$$

En una atmósfera con temperatura cercana a  $T_{vir}$  la velocidad del sonido  $c_s = (\gamma RT/\mu)^{1/2}$  es cercana a la velocidad de escape del sistema y la escala de altura es del orden de  $r$ . Dicha atmósfera se evaporará en una escala de tiempo relativamente corta en la forma de viento estelar.

Un ejemplo simple es la acreción adiabática esférica (Bondi, 1952). Un resultado importante es que dicha acreción es posible solo si  $\gamma \leq 5/3$ . Entre mas grande  $\gamma$ , mayor la temperatura en el gas acretado ec. (2.23), y mas allá de un valor crítico la temperatura es demasiado alta para que el gas permanezca ligado en el potencial. Una situación clásica donde la acreción adiabática y aproximadamente esférica ocurre es en una implosión de supernova: cuando la temperatura central es lo suficientemente alta como para que el campo de radiación comience a desintegrar el núcleo,  $\gamma$  decae y la envoltura colapsa sobre la estrella de neutrones en formación.

Cuando las pérdidas radiativas se vuelven importantes, el gas en acreción se puede mantener frío irrespectivamente del valor de  $\gamma$ , y el valor crítico de Bondi  $\gamma = 5/3$  no juega un papel importante.

### 2.3.3. Acreción Isotérmica

Otro tipo importante de fluido resulta de la asunción de que la temperatura  $T$  del gas es constante a través de la región de interés. Este es llamado fluido isotérmico y obviamente es equivalente a postular algún proceso físico para mantener  $T$  constante. Esto, a su vez, significa que la ecuación de la energía es reemplazada en nuestro

sistema que describe al gas por la relación  $T = \text{constante}$ . Formalmente, este último requerimiento puede ser escrito, usando la ecuación del gas ideal, como

$$P\rho^{-1} = \text{constante}. \quad (2.25)$$

## 2.4. Acreción sobre agujeros negros

De entre todos los objetos celestiales los agujeros negros son los mas simples de describir matemáticamente. El más simple de los agujeros negros, conocido como agujero negro de Schwarzschild, está caracterizado solo por su masa  $M$ , y ha ocupado un lugar muy popular en modelos de galaxias activas, cuasares y algunas binarias compactas de rayos X. Junto con la constante de gravitación  $G$ , y la velocidad de la luz  $c$ , uno puede obtener una escala de longitud  $l_{bh} = GM/c^2 = 1,5 \times 10^{14} M_g cm$ , y una escala de tiempo  $t_{bh} = GM/c^3 = 5000 M_g s$  ( $M_g$  es la masa del agujero negro central en unidades de  $10^9 M_\odot$ ). Se espera que cerca de un agujero negro las cantidades físicas varíen en estas escalas. El radio de Schwarzschild  $r_{bh} = r_g = 2l_{bh}$  de un agujero negro es identificado como el radio de un agujero negro que no rota mientras que  $r_{bh} = l_{bh}$  es el radio de un agujero negro rotante con el máximo permitido de momento angular específico  $J = GM/c = 4,5 \times 10^{24} M_g cm^2 s^{-1}$  (también conocido como el agujero negro de Kerr extremo). Información en  $r < r_{bh}$  permanece inaccesible a observadores localizados a  $r > r_{bh}$ . La acreción sobre agujeros negros a sido considerada como una forma eficiente de transformar energía gravitacional en radiación, y a menudo se piensa que ocurre en forma de un disco, debido al momento angular de la materia acretando. Esto, casi seguro, es el caso, como ya hemos mencionado, en una variedad de sistemas astrofísicos que van desde AGN's con agujeros negros muy masivos a binarias estelares. Los flujos en estos discos pueden exhibir morfologías muy diferentes dependiendo de las condiciones físicas presentes en el sistema. Como ya hemos visto, se piensa que la acreción procede generalmente debido al transporte de momento angular de las regiones interiores a las regiones exteriores del disco, aunque el mecanismo mediante el cual esto es llevado a cabo no es del todo claro. La parametrización introducida por Shakura y Sunyaev (1973) ha permitido bastante progreso sin especificar la física detrás de la viscosidad responsable del transporte de momento angular.

### 2.4.1. ¿Agujeros negros en Halos Galácticos?

Mientras estamos discutiendo la existencia en general de agujeros negros, surge naturalmente una pregunta: ¿Hay agujeros negros en los halos galácticos? y/o ¿hay agujeros negros esparcidos a través del disco galáctico?. La composición de los halos oscuros y el calentamiento de los discos estelares son todavía temas de debate. Hay muchas controversias sin conclusiones firmes. Si por ejemplo, nuestro halo galactico esta compuesto de agujeros negros masivos con masas del orden de  $10^6 M_\odot$ , estos

deberían calentar la población de estrellas y la velocidad de dispersión debería aumentar continuamente. Estimados ignorando la fricción dinámica sugieren que la velocidad de dispersión predicha está en concordancia con las observaciones. Sin embargo la fricción dinámica causaría que 100 de tales objetos cayeran hacia el centro galáctico. El resultado más probable sería la acumulación de una masa central  $M \gg 10^6 M_\odot$ , la cual es mucho mayor que la que es predicha por las presentes constricciones observacionales. Esta consideración está en contra de la hipótesis de que el halo está hecho de agujeros negros de masa  $10^6 M_\odot$ .

La fricción dinámica puede ayudar a explicar la evolución del agujero negro central o incluso la formación de un cúmulo denso hecho de pequeños agujeros negros cercanos al centro. Cuando los remanentes compactos de estrellas masivas son por sí mismos significativamente más masivos que el campo normal de estrellas en el centro galáctico, estos pueden migrar hacia dentro como consecuencia de la fricción dinámica. La resultante segregación de masa puede llevar a una concentración de objetos compactos en el núcleo estelar central en un tiempo igual al tiempo de Hubble. La masa total de remanentes concentrada en una decena de parsecs,  $0,4 - 5 \times 10^6 M_\odot$ , es comparable a la masa dinámicamente inferida en esta región de nuestra galaxia.

### 2.4.2. Diferencias entre movimientos alrededor de una estrella newtoniana y un agujero negro

Alrededor de una estrella newtoniana el espacio tiempo puede ser tratado como plano y la cuadrivariante entre dos puntos puede escribirse como:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.26)$$

Aquí hemos usado coordenadas esféricas. También adoptamos unidades donde la constante gravitacional  $G$ , la masa central  $M$  y la velocidad de la luz  $c$  son igual a uno ( $G = M = c = 1$ ). En el estudio alrededor de un agujero negro, escogido aquí como rotante (solución de Kerr) por generalidad, la distancia entre cualesquiera dos puntos coordenados puede ser obtenida de:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2r}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4ar \sin^2\theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2ra^2 \sin^2\theta}{\Sigma}\right) d\phi^2, \quad (2.27)$$

donde  $a$  es el parámetro de Kerr de un agujero negro,

$$a = \frac{J}{M} = r^2 + 2r + a^2, \quad \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta. \quad (2.28)$$

La desviación de la distancia newtoniana se vuelve significativa cuando uno se aproxima al agujero negro  $r \rightarrow 1$ .

**CAPÍTULO 2. DISCOS DE ACRECIÓN**  
**2.4. ACRECIÓN SOBRE AGUJEROS NEGROS**

---

Una segunda diferencia importante surge de la naturaleza del potencial efectivo que experimenta el flujo. El potencial gravitacional que siente una partícula de prueba alrededor de una estrella newtoniana está dado por

$$\Phi_N = -\frac{1}{r}. \quad (2.29)$$

El potencial efectivo de un gas rotante con momento angular específico  $\lambda$  se obtiene de la suma del potencia gravitacional y el potencial centrífugo

$$V_N(r) = -\frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{r^2}. \quad (2.30)$$

Para  $r$  pequeño, el término rotacional causa que el potencial diverja al infinito positivo. Acreción sobre una estrella de tamaño finito  $r_*$  requiere que la barrera debida a la fuerza centrífuga sea débil comparada con el término gravitacional, es decir,

$$F = \frac{dV_N(r)}{dr} = \frac{\lambda^2}{r^3} - \frac{1}{r^2} < 0. \quad (2.31)$$

En otras palabras, alrededor de una estrella newtoniana, solo aquella materia con momento angular menor que el valor kepleriano sobre la superficie de la estrella

$$l_{kep,N} = r_*^{1/2} \quad (2.32)$$

puede acretar.

En el caso de la acreción de un agujero negro, la situación es diferente. Aquí el potencial efectivo no puede ser obtenido de la suma de las componentes. Por simplicidad primero consideremos la solución de Schwarzschild ( $a = 0$ ) de la métrica alrededor de un agujero negro que no rota. En este caso el potencial efectivo está dado por

$$V_S(r) = \left[ \left(1 - \frac{2}{r}\right) \left(1 + \frac{\bar{l}^2}{r^2}\right) \right]^{1/2}. \quad (2.33)$$

$V_S$  se vuelve cero en el horizonte, independientemente del momento angular del flujo. El momento angular específico conservado para la dinámica de la partícula es  $\bar{l} = u_\phi$ . El momento angular  $l = -\frac{u_\phi}{u_t}$  es conservado para la dinámica del fluido como para la dinámica de la partícula. Aquí  $(u_t, u_r, u_\theta, u_{phi})$  son las componentes de la cuadrivelocidad,  $u_t$  es la energía específica conservada. El potencial experimentado por el fluido es:

$$V_S(r) = \left[ \frac{1 - 2/r}{1 + \frac{(1-2/r)l^2}{r^2}} \right]^{1/2}. \quad (2.34)$$

## CAPÍTULO 2. DISCOS DE ACRECIÓN

### 2.4. ACRECIÓN SOBRE AGUJEROS NEGROS

---

Como se mencionó anteriormente, a diferencia de la geometría newtoniana, el potencial efectivo en relatividad general no se obtiene de la suma de sus “constituyentes” (las comillas son para indicar que en relatividad general tal vez no tenga sentido separar en constituyentes tanto la energía potencial, rotacional... etc.). Esto es porque las diversas energías en relatividad general se acoplan para formar nuevos términos. Por ejemplo el potencial anterior puede ser escrito como

$$V_S(r) = \left[ 1 - \frac{2}{r} + \frac{\bar{l}^2}{r^2} - \frac{2\bar{l}^2}{r^3} \right]^{1/2} \quad (2.35)$$

La presencia del término  $1/r^3$  se puede deber al acople entre la energía gravitacional y la energía rotacional o simplemente debido a la atracción de la “masa” en rotación por la gravedad del objeto central.

#### 2.4.3. Geometrías seudo newtonianas

En el caso de la mayoría de los sistemas astrofísicos que involucran una estrella compacta o agujero negro rotante, no es esencial que uno resuelva el problema utilizando completamente relatividad general. Afortunadamente se encuentran disponibles algunas herramientas que permiten el uso de conceptos newtonianos (tales como ecuaciones en geometría plana, adición de los componentes de la energía... etc.) y que al mismo tiempo conservan las características más sobresalientes de la geometría de un agujero negro. Siempre y cuando uno no esté interesado en procesos astrofísicos “extremadamente” cerca del horizonte del agujero negro, uno puede usar con seguridad estas herramientas y obtener resultados satisfactorios. La idea aquí es modificar el potencial gravitacional de manera que la fuerza que deriva de este coincida aproximadamente con la fuerza verdadera en el espacio-tiempo curvo. Este método es significativamente mejor que el uso de suposiciones simplificadas y es fácilmente accesible para los astrofísicos (quienes no tienen una formación formal en relatividad general) sin sacrificar mucho de la física.

Paczynski y Wiita sugirieron primero que para muchos propósitos prácticos uno no necesita utilizar la solución de Schwarzschild, se puede utilizar un potencial seudo-newtoniano,

$$\Phi_{PN} = 1 - \frac{1}{r-2} \quad (2.36)$$

en lugar del potencial usual  $-1/r$  para capturar la mayoría de las propiedades físicas del agujero negro. A excepción de lo puristas, la comunidad astrofísica en general parece apreciar este potencial y un gran número de literatura astrofísica reciente, particularmente de discos de acreción, usa este potencial.

# Capítulo 3

## Métodos Espectrales

### 3.1. Introducción

Los métodos espectrales son una clase de discretización espacial para ecuaciones diferenciales. Los componentes clave para su formulación son las funciones de ensayo (también llamadas la expansión o funciones de aproximación) y las funciones de prueba (también conocidas como funciones de peso). Las funciones de ensayo, que son combinaciones lineales de funciones base adecuadas, son usadas para proporcionar la representación aproximada de la solución. Las funciones de prueba son usadas para asegurar que la ecuación diferencial y quizá algunas condiciones de frontera se satisfagan lo más exacto posible por las series truncadas. Esto es logrado minimizando, con respecto a una norma adecuada, el residuo producido usando la expansión truncada en lugar de la solución exacta. El residuo da cuenta de la ecuación diferencial y algunas veces de las condiciones de frontera, ya sea implícita o explícitamente.

La elección de las funciones de prueba distingue entre los tres tipos de esquemas espectrales, a saber, los métodos de Galerkin, colocación y Tau. En la aproximación de Galerkin (1915), las funciones de prueba son las mismas que las funciones de ensayo. Estas son, por tanto, funciones infinitamente suaves que satisfacen individualmente algunas de las condiciones iniciales o incluso todas. La ecuación diferencial es forzada requiriendo que la integral del residuo por cada una de las funciones de prueba sea cero. En el método de colocación las funciones de prueba son deltas de Dirac trasladadas, centradas en puntos especiales llamados puntos de colocación. Este enfoque requiere que la ecuación diferencial se satisfaga exactamente en los puntos de colocación. Los métodos espectrales de tau son similares a los métodos de Galerkin en el sentido de que la ecuación diferencial es forzada. Sin embargo, no es necesario que las funciones de prueba satisfagan las condiciones de frontera. Por consiguiente un conjunto suplementario de ecuaciones es usado para aplicar las condiciones de frontera.

La primeras aplicaciones del método espectral de colocación a ecuaciones di-

ferencia-les parciales fueron hechas para problemas espacialmente periódicos por Kreiss y Olinger (1972) (quienes lo llamaron el método de Fourier) y Orszag (1972) (quien lo denominó seudoespectral). El método de Galerkin goza de una característica estética agradable, las funciones ensayo y las funciones de prueba son las mismas, y la discretización se deriva de la forma débil del problema matemático. Más aún, la primera aplicación seria de los métodos espectrales a PDE's, aquella de Silberman (1954) para modelado meteorológico, fue un método de Galerkin. La aproximación de Tau es una modificación del método de Galerkin aplicable a problemas con condiciones de frontera no periódicas.

## 3.2. Métodos Espectrales

Los ME se emplean para encontrar soluciones numéricas a ecuaciones de la forma

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = O(x, t)u(x, t) \quad x \in D, \quad (3.1)$$

$$B(x)u(x, t) = 0 \quad x \in \partial D, \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = g(x) \quad x \in D, \quad (3.3)$$

donde  $D$  es el dominio espacial y  $\partial D$  su frontera,  $O(x, t)$  es un operador diferencial,  $B$  representa las condiciones de frontera y  $g(r)$  la condición inicial. La idea básica en los ME es buscar soluciones aproximadas al problema (3.1)-(3.3) como una serie truncada de una base de funciones  $\Phi_n(x)$  ortogonales suaves, esto es, la solución aproximada se propone de la forma

$$u_N(x, t) = \sum_{n=0}^N a_n(t)\Phi_n(x). \quad (3.4)$$

$\Phi_n(x)$  es un conjunto apropiado de funciones ortogonales definidas en el dominio  $D = [a, b]$ . De este modo, para tener la solución sería necesario encontrar los coeficientes  $a_n$ , una vez encontrados, la solución estaría definida no sólo en puntos de una red dada, sino en todo el dominio espacial.

¿Como se elige la base  $\Phi_n$ ? Para la elección de las funciones ortogonales debe tomarse en cuenta las condiciones de frontera. Para condiciones de frontera periódicas, las funciones de Fourier  $\Phi_k(x) = \exp(ikx)$  son la elección natural. Para condiciones de frontera no periódicas, hay varias opciones, pero en la práctica, los polinomios de Chebyshev son los mayormente usados.

Uno se enfoca entonces a encontrar los coeficientes en la expansión (3.4) para obtener la solución del sistema. La manera de encontrar los  $a_n$  es lo que distingue a los diferentes métodos espectrales. En este trabajo nos centraremos solo en el método de Galerkin y el de Tau. De igual forma solo utilizaremos la base de Chebyshev, de la cual a continuación haremos un resumen.



### 3.3. Base de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev del primer tipo  $T_n(x)$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$  son las funciones propias del problema de Sturm-Liouville particular

$$\left(\sqrt{1-x^2}T_n'(x)\right)' + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x) = 0. \quad (3.5)$$

Usualmente se normaliza  $T_n$  de tal forma que  $T_n(1) = 1$  y entonces

$$T_k(x) = \cos(k\cos^{-1}x) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Su dominio es evidentemente  $[-1, 1]$ . Si hacemos  $x = \cos\theta$ , se tiene que  $T_k(x) = \cos k\theta$ , de modo que los polinomios de Chebyshev son funciones coseno “disfrazados”, así que varias relaciones matemáticas y teoremas bien conocidos del sistema de Fourier pueden adaptarse fácilmente al sistema de Chebyshev. De la relación  $T_k(x) = \cos k\theta$ , cuando  $k = 0$  se tiene inmediatamente que  $T_0(x) = 1$ , cuando  $k = 1$ ,  $T_1(x) = \cos\theta = \cos(\cos^{-1}x) = x$ . Partiendo de  $T_0$  y  $T_1$ , y de la relación de recurrencia

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (3.7)$$

se pueden generar polinomios de Chebyshev de grados superiores. (3.7) se obtiene directamente de la relación trigonométrica  $\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2\cos\theta\cos k\theta$ . Los polinomios de Chebyshev son mutuamente ortogonales en su dominio de definición con respecto al peso  $w = (1-x^2)^{1/2}$ . Esta condición se lee

$$(T_k, T_j)_w \equiv \int T_k(x)T_j(x)w dx = \frac{\pi}{2}c_k\delta_{k,j} \quad (3.8)$$

donde  $\delta_{k,j}$  es la delta de Kronecker. En el momento de considerar condiciones de frontera, las siguientes propiedades de  $T_n(x)$  son muy útiles

$$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \quad T_n'(\pm 1) = (\pm 1)^{n+1}n^2 \quad (3.9)$$

La expansión de una función  $u$  en la base de Chebyshev se escribe

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), \quad (3.10)$$

y debido a la ortogonalidad de  $T_k$  los coeficientes se obtienen multiplicando eq:3h por  $T_k$  e integrando

$$a_k = \frac{2}{\pi c_k} \int_{-1}^1 u(x) \frac{T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (3.11)$$

Si definimos la función periódica y par  $\tilde{u}(\theta) = u(\cos\theta)$  entonces  $\tilde{u}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta$  y la serie en términos de Chebyshev de  $u$  corresponde a la serie coseno de  $\tilde{u}$ . Más aún, si  $u$  es  $C^\infty$  puede mostrarse que  $\tilde{u}$  es infinitamente diferenciable y

## CAPÍTULO 3. MÉTODOS ESPECTRALES

### 3.3. BASE DE CHEBYSHEV

periódica con todas sus derivadas en  $[0, 2\pi]$ , y como para el sistema de Fourier, para el de Chebyshev también se tiene que los coeficientes de Chebyshev para funciones suficientemente suaves decaen más rápido que el decaimiento algebraico.

Al resolver ecuaciones diferenciales parciales, aparecerá la derivada de la función  $\partial_x u = u'$ , esta también puede expandirse

$$u'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} T_n(x), \quad (3.12)$$

y es altamente deseable obtener los coeficientes de la derivada  $u'$ , es decir  $a_n^{(1)}$ , a partir de los coeficientes de  $u$ , los  $a_n$ . La relación trigonométrica  $2\text{sen}\theta\text{cos}k\theta = \text{sen}(k+1)\theta - \text{sen}(k-1)\theta$  nos permitirá esto, esta relación tiene su contraparte el sistema de Chebyshev

$$2T_k(x) = \frac{1}{k+1} T'_{k+1}(x) - \frac{1}{k-1} T'_{k-1}(x), \quad (3.13)$$

y de aquí se obtiene la muy importante relación de recurrencia

$$c_k a_k^{(1)} = a_{k+2}^{(1)} + 2(k+1)a_{k+1} \quad (3.14)$$

donde

$$c_k = \begin{cases} 2 & \text{si } k = 0, \\ 1 & \text{si } k \geq 1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Si se considera la serie truncada  $u_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(x)$  que es un polinomio de grado  $N$ , entonces la derivada  $u'$  es de grado  $N-1$ , de modo que  $u'(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k^{(1)} T_k(x)$  y por tanto  $a_n^{(1)} = 0$  para  $n \geq N$ , este hecho debe tomarse en cuenta al usar (??), donde uno empieza con  $k = N-1$  y va disminuyendo el valor del índice hasta llegar a  $k = 0$ . En general, los coeficientes de la expansión de la  $q$ -ésima derivada pueden obtenerse a partir de los coeficientes de la  $(q-1)$ -ésima derivada con

$$c_k a_k^{(q)} = a_{k+2}^{(q)} + 2(k+1)a_{k+1}^{(q-1)} \quad (3.16)$$

Aunque hay expresiones explícitas para calcular los coeficientes, al menos de las primeras derivadas de  $u$ , a saber

$$a_k^{(2)} = \frac{1}{c_k} \sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^N a(a^2 - k^2)a_p, \quad a_k^{(1)} = \frac{2}{c_k} \sum_{\substack{p=k+1 \\ (p+k) \text{ impar}}}^N p a_p, \quad (3.17)$$

la forma más eficiente de hacerlo es usando (3.16). Suponiendo que ya se conocen los coeficientes de  $a_n$  de la expansión  $u_N = \sum_{k=0}^N a_n T_n(x)$ , o en general los coeficientes de la expansión de la  $(q-1)$ -ésima derivada  $u^{(q-1)}$ .

### 3.4. Método de Galerkin

Para una función bien comportada, en general los coeficientes de su desarrollo en términos de una serie truncada de un conjunto ortogonal  $\Phi_n$ , decrecen muy rápidamente. Al sustituir la expansión  $u_N(x, t) = \sum_{n=0}^N a_n(t)\Phi_n(x)$  en la ecuación  $\partial_t u_N(x, t) = O(x, t)u_N(x, t)$ , se tiene que el Residuo  $R(x, t, a_n)$  no se anula

$$R = \frac{\partial u_N(x, t)}{\partial t} - O(x, t)u_N(x, t) \neq 0 \quad (3.18)$$

Esta función residual puede expandirse, como cualquier función, en términos de un conjunto ortogonal,

$$R(x, t, a_0, \dots, a_N) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(a_0, \dots, a_N)\Phi_k(x) \quad (3.19)$$

donde, debido a la ortogonalidad de la base de funciones  $\Phi_k(x)$ , los coeficientes  $r_k$  se determinan por el producto interno

$$r_n = (R, \Phi_n) = \int R\Phi_n(x)w(x)dx, \quad (3.20)$$

donde  $w(x)$  es un peso. En general, cualquier función, en particular el residuo, queda representada por los primeros términos de la serie. Al resolver una ecuación diferencial, uno esperaría que la función residual fuese pequeña en el sentido de que los primeros  $(N+1)$  términos de la serie espectral (3.19) se anulen. Presumiblemente todos los  $r_k$  para  $k > N$  serán muy pequeños para  $N$  suficientemente grandes. Así que, forzar que los primeros  $r_k$  sean cero, minimiza a  $R(x)$ . En el límite en el que  $N \rightarrow \infty$ ,  $R(x) \rightarrow 0$ , y por lo tanto, la aproximación, debe converger muy rápido a la solución exacta. Todo esto entonces se traduce a: “*Para minimizar el residuo se pide que  $(R, \Phi_n) = 0$  para  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ”.*

En el método Galerkin, se pide que la base (o un arreglo de esta) cumplan de entrada las condiciones de frontera. Por ejemplo, con condiciones de frontera periódicas, lo natural es elegir una base de Fourier. Un ejemplo muy simple que usaremos para ilustrar el método será la ecuación hiperbólica y lineal de advección

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.21)$$

en el intervalo  $x \in [0, 2\pi]$ , con condiciones de frontera periódicas, condición inicial  $u(x, 0) = g(x)$ . Se busca una solución de la forma  $u_N(x, t) = \sum_n a_n(t)\Phi_n(x)$  con  $\Phi_n(x) = e^{inx}$ . La condición de minimización del residuo

$$R(x, t, a_n) = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \sum_{k=0}^N a_k(t)e^{ikx} \quad (3.22)$$

nos conduce en este caso a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \sum_{k=0}^N a_k(t) e^{ikx} \right] e^{-inx} dx = 0 \quad (3.23)$$

y al realizar las derivadas temporal y espacial nos queda

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^N \left( \frac{da_k}{dt} - ika_k \right) e^{ikx} \right] e^{-inx} dx = 0 \quad (3.24)$$

Como la base es ortogonal, la integral en  $x$  es proporcional a una delta de Kronecker, dando por resultado un conjunto de ecuaciones diferenciales para los coeficientes  $a_k$ , a saber

$$\frac{da_k}{dt} - ika_k = 0 \quad (3.25)$$

La condición inicial  $u(x, 0) = g(x) = \sum_{n=0}^N a_n(0) \Phi_n(x)$  nos da las condiciones iniciales  $a_k(0)$  para este conjunto de ecuaciones (3.25) en la forma usual

$$a_k(0) = \int_0^{2\pi} g(x) \Phi_k(x) dx \quad (3.26)$$

El problema consiste en evaluar  $a_k(0)$  y resolver las ecuaciones diferenciales (3.25) para encontrar las  $a_k(t)$  a todo tiempo. Usando como condición inicial  $g(x) = u(x, 0) = \sin(\pi \cos x)$ , es posible probar que los coeficientes tienen la forma

$$a_k(t) = \text{sen} \left( \frac{k\pi}{2} \right) J_k(\pi) e^{ikt} \quad (3.27)$$

donde  $J_k(t)$  son las funciones de Bessel de orden  $k$ , cuyas propiedades asintóticas implican  $k^m a_k(t) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$  para todo número natural  $m$ . Esto nos dice que la serie truncada de Fourier converge más rápido que cualquier potencia finita de  $1/N$ , que es la propiedad conocida como convergencia espectral. La huella de la convergencia de los métodos espectrales es la rapidez de decaimiento de los coeficientes al aumentar  $n$ . La solución de (3.25) es  $a_k(t) = a_k(0) e^{ikt}$ , pero si se quiere integrar numericamente, podría utilizarse el método de Runge-Kutta de orden 4 con un paso lo suficientemente pequeño como para que el error en la discretización temporal sea prácticamente despreciable.

### 3.5. Método de Tau

El método de Tau es una versión modificada del método de Galerkin, que resuelve un sistema un poco diferente (al de Galerkin) para poder incorporar eficientemente las condiciones de frontera en la solución. Nuevamente, se toma una base ortogonal de funciones  $\Phi_n(x)$ , en este método se utiliza una solución aproximada de la forma

$$u_{N+K}(x, t) = \sum_{n=0}^{N+K} a_n(t) \Phi_n(x) \quad (3.28)$$

donde  $K$  es el número de condiciones de frontera del problema. Resolveremos la ecuación de calor para ilustrar la implementación del método

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad |x| \leq 1 \quad (3.29)$$

con las condiciones de frontera  $u(\pm 1, t) = 0$  y condición inicial  $u(x, 0) = \frac{1}{2}(1 - x^2) \sin 2\pi x$ . Desarrollamos  $u(x, t)$  de la manera usual  $u_N(x, t) = \sum_{n=0}^N a_n(t) T_n(x)$ . Para minimizar el residuo:  $R(x, t) = \frac{\partial u_N}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}$  uno demanda que  $R(x, t)$  sea ortogonal al espacio expandido por  $\{T_k(x)\}_{k=0}^{N-2}$ , es decir

$$\int_{-1}^1 R(x, t) T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad 0 \leq k \leq N-2 \quad (3.30)$$

debido a la ortogonalidad de los polinomios  $T_k(x)$ , la integral anterior se convierte en

$$\dot{a}_k = a_k^{(2)} \quad 0 \leq k \leq N-2 \quad (3.31)$$

donde  $a_k^{(2)}$  son los coeficientes de la expansión de la segunda derivada de  $u(x, t)$  con respecto a la variable espacial  $x$ , y son funciones de los coeficientes  $a_k$ , es decir  $a_k^{(2)} = f_k(a_n)$ . Como ya se ha mencionado, la manera más eficiente de calcular  $a_k^{(2)}$  es usando la relación de recurrencia  $c_k a_k^{(2)} = a_{k+2}^{(2)} + 2(k+1)a_{k+1}^{(1)}$ . Las condiciones de frontera  $u(x = -1, t) = u(x = 1, t) = 0$  en términos de los coeficientes son

$$u(1, t) = \sum_{n=0}^N a_n = 0, \quad u(-1, t) = \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n = 0 \quad (3.32)$$

donde se usó la propiedad  $T_k(\pm 1) = (\pm 1)^{-k}$ . (3.32) es equivalente al par de ecuaciones

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ par}}} a_k = 0, \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}} a_k = 0 \quad (3.33)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (3.31) evoluciona los coeficientes  $a_n$  con  $0 \leq n \leq N-2$ , y con las condiciones de frontera expresadas en (3.33) a cada paso de tiempo se encuentran  $a_N$  y  $a_{N-1}$ , sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $N$  es par y así

$$a_N = - \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ par}}}^{N-2} a_k, \quad a_{N-1} = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{N-3} a_k \quad (3.34)$$

La ecuación de calor inicia con el perfil  $u(x, 0)$  y simplemente evoluciona decreciendo sus valores hasta extinguirse.

### 3.6. Transformadas Discretas de Fourier

Las Transformadas Discretas de Fourier (TDF), se definen con base en una discretización del dominio espacial:  $x_j = 2\pi j/N$  con  $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , su definición es

$$\tilde{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) e^{-ikx_j} \quad k = -N/2, \dots, N/2 - 1 \quad (3.35)$$

que vendría a ser el análogo de los coeficientes de la serie de Fourier para una función  $u(x)$

$$\hat{u}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-inx} dx \quad (3.36)$$

Se puede mostrar que la fórmula de inversión de (3.35) es

$$u(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{u}_k e^{ikx_j} \quad 0 \leq j \leq N-1 \quad (3.37)$$

donde se está asumiendo que  $N$  es par. (3.37) vendría a ser el equivalente de

$$u(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_k e^{ikx} \quad (3.38)$$

La transformación (3.37) se conoce como la transformada inversa discreta de Fourier, y (3.35) la transformada directa discreta de Fourier. Como consecuencia de (3.37) se define el polinomio interpolante trigonométrico de orden  $N/2$  de  $u$  en los nodos  $x_j$  como

$$I_N u(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_k e^{ikx} \quad (3.39)$$

es decir  $I_N(x_j) = u(x_j)$  con  $j = 0, \dots, N-1$ . (3.39) también se conoce como *serie de Fourier discreta* de  $u$ .

Las TDF (3.35) y (3.37), son un mapeo entre el conjunto de  $N$  cantidades complejas  $u(x_j)_{j=0, \dots, N-1}$  y el conjunto de  $N$  números complejos  $\tilde{u}_k_{k=-N/2, \dots, N/2-1}$ . Es decir, a cualquier función  $u(x)$  evaluada en la red  $x_j$  puede obtenerse sus coeficientes discretos  $\tilde{u}_k$  via (3.35) y también, dados los coeficientes discretos  $\tilde{u}_k$ , pueden encontrarse los valores de  $u$  en  $x_j$  via (3.37). Esto llega a ser en extremo útil por dos

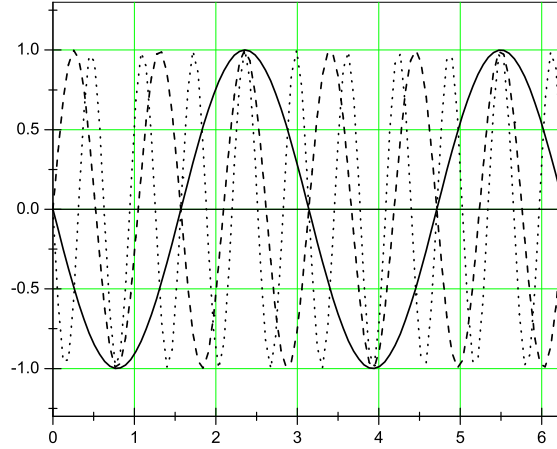


Figura 3.1: Fenómeno de aliasing. Tres ondas sinusoidales que tienen la misma interpretación de  $k = -2$  sobre una red con  $N = 8$ . Los puntos nodales están representados por círculos negros. Las ondas con  $k = 6$  (línea punteada) y  $k = -10$  (línea entre-cortada) se confunden con la de  $k = -2$  (línea continua) sobre la red.

razones, la primera es que los coeficientes continuos  $\hat{u}_k$  no siempre pueden obtenerse en forma analítica cerrada y deben aproximarse, pero aún puede haber dificultades para su obtención numérica para algunas funciones (la segunda razón tiene que ver con el manejo de no linealidades que discutiremos en las siguientes secciones).

### 3.7. Error de Aliasing

¿Cómo se conectan exactamente las transformadas de Fourier continuas y discretas basadas en  $N$  par? Nótese que los modos discretos de Fourier se basan en  $x_j = 2\pi j/N$  para los cuales el  $(n + Nm)$ -ésimo modo es indistinguible del  $n$ -ésimo modo

$$e^{i(n+Nm)x_j} = e^{inx_j} e^{i2\pi m j} = e^{inx_j}. \quad (3.40)$$

Este fenómeno se conoce como aliasing y se ilustra en la figura 3.1 donde tres ondas sinusoidales se confunden en algunos puntos de la red.

Si la serie de Fourier de  $\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_n e^{inx}$  converge a  $u(x)$  en cada nodo  $x_j$ , entonces (3.40) implica

$$\tilde{u}_k = \hat{u}_k + \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} \hat{u}_{k+Nm} \quad k = -N/2, \dots, N/2 - 1 \quad (3.41)$$

**CAPÍTULO 3. MÉTODOS ESPECTRALES**  
**3.7. ERROR DE ALIASING**

---

Una formulación equivalente de (3.41) es  $I_N u = P_N u + R_N u$  con

$$R_N u = \sum_{-N/2}^{N/2-1} \left( \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} \hat{u}_{k+Nm} \right) \quad k = -N/2, \dots, N/2 - 1, \quad (3.42)$$

llamado el *error de aliasing*. Puede probarse que es ortogonal al error de truncación así que

$$|u - I_N u|^2 = |u - P_N u|^2 + |R_N u|^2. \quad (3.43)$$

Aunque el error debido a interpolación  $|u - I_N u|$  es siempre mayor que el error debido a la truncación de la serie de Fourier  $|u - P_N u|$ , se ha demostrado que el error de truncación y de interpolación decaen al menos con la misma razón. La diferencia entre  $\hat{u}_k$  y  $\tilde{u}_k$  es el error de aliasing, que se disminuye drásticamente cuando  $N$  es suficientemente grande. Pero, ¿qué ocurre con este fenómeno de aliasing cuando se tienen no linealidades? Considere dos funciones con sus expansiones de Fourier  $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}$  y  $g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}_k e^{ikx}$ , el producto  $p(x) = f(x)g(x)$  tendrá también su expansión  $p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{p}_k e^{ikx}$  pero ¿quienes serán sus coeficientes en términos de los coeficientes de las expansiones de  $f$  y  $g$ ? No es difícil verificar que  $\hat{p}_k$  viene dado a través de una suma de convolución

$$\hat{p}_k = \sum_{m+n=k}^m \hat{f}_m \hat{g}_n \quad (3.44)$$

Si consideramos las series truncadas  $f(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_k e^{ikx}$  y  $g(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{g}_k e^{ikx}$ , el producto  $(fg)(x)$  en principio pertenecería a  $B_{2N}$  pero truncaremos el producto tomando  $P_N(fg)$  solamente, de modo que

$$\hat{p}_k = \sum_{\substack{m+n=k \\ |m|, |n| \leq N/2}} \hat{f}_m \hat{g}_n, \quad |k| \leq N/2 \quad (3.45)$$

Al considerar la transformada discreta del producto  $p(x)$ , se tiene que la relación entre los coeficientes  $\hat{f}_n$ ,  $\hat{g}_n$  y  $\tilde{p}_n$  es

$$\tilde{p}_k = \hat{p}_k + \sum_{m+n=k \pm N} \hat{f}_m \hat{g}_n, \quad (3.46)$$

donde  $\hat{p}_k$  está dado por (3.45). El segundo término en (3.46) es el error de aliasing, y en el caso de no linealidades, este no se reduce al aumentar el valor de  $N$ , por el contrario, tiende a aumentar. Este error de aliasing se elimina si al considerar la TDF se usan  $M$  puntos en lugar de  $N$  puntos, con  $M \geq 3N/2$  puntos  $y_j = 2\pi j/M$  ( $j = 0, 1, \dots, M-1$ ), esto es  $f_j = f(y_j) = \sum_{k=-M/2}^{M/2-1} \check{f}_k e^{iky_j}$  y  $g_j = g(y_j) = \sum_{k=-M/2}^{M/2-1} \check{g}_k e^{iky_j}$ , donde  $\check{f}_k = \hat{f}_k$  para  $|k| \leq N/2$  y  $\check{f}_k = 0$  para  $|k| > N/2$ . Aquí las  $\check{f}_k$  son las que aparecen en  $f_j = f(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_k e^{ikx_j}$ . Con este artificio puede



probarse que se elimina el error de aliasing para no linealidades cuadráticas. Esta regla se conoce como *regla de 2/3* en la literatura de ME.

### 3.8. Inestabilidad de Aliasing: Historia y remedios

Códigos tridimensionales hidrodinámicos conocidos como “modelos de circulación general” (GCMs) se han convertido en una importante herramienta en el entendimiento del futuro climático, tal como los efectos de un incremento de los gases de invernadero en la atmósfera. El ur-GCM, el ancestro de donde todos los demás modelos surgieron es debido a Phillips (1956). Partiendo del reposo y sin imponer una fuerza excepto un gradiente de temperatura promedio de norte a sur (caliente en el ecuador y fría en los polos), el modelo espontáneamente desarrolló chorros y vórtices que se asemejaban bastante a aquellos de la atmósfera real. Hurrah! Desafortunadamente, después de unos cuantos días más (en tiempo del modelo), los vientos se volvieron supersónicos. El GCM había “explotado”! Phillips trató de estabilizar su modelo reduciendo de manera importante ambos, el paso de tiempo y el tamaño de la cuadrícula espacial, pero aproximadamente al mismo tiempo (20 días) el modelo explotó de todas formas. Aunque su modelo empleó diferencias finitas, el razonó espectralmente. Notó que la primera advertencia del inminente desastre fue la aparición de ondas 2h. En el espacio de Fourier esto significa que la energía se está acumulando cerca del límite de aliasing

$$K \equiv \pi h \quad \leftrightarrow \quad \text{longitud de onda} = 2h \quad (3.47)$$

Ahora las ecuaciones hidrodinámicas son cuadráticamente no lineales. La interacción de una onda con  $|k| > K/2$  con otra onda de magnitud similar debe generar ondas con  $k > K$ . Sin embargo estas no pueden ser resueltas sobre una malla con espaciamiento  $h$ , en lugar de eso toman el “alias” de ondas con número de onda menor. Phillips conjeturó que esta transferencia de energía de un número de onda mayor a uno menor era la fuente de su inestabilidad. Puso a prueba su hipótesis (Phillips, 1959) repitiendo su experimento anterior pero con un giro. Cada ciertos pasos, él calculó la transformada de Fourier de los valores en los puntos de la malla para cada campo y luego hizo la mitad superior del espectro calculado igual a cero. Esto es, aplicó el filtro “todo o nada”

$$a_k \rightarrow [\text{filtro}] \begin{cases} a_k & |k| < K/2 \\ 0 & |k| > K/2 \end{cases} \quad (3.48)$$

Funcionó! Con este filtro fue posible integrar su modelo para periodos de tiempo arbitrariamente largos. En una nota menor a una página Long, Orszag (1971a) señaló que el filtro de Phillips fue un desperdicio: si solo el tercio superior del espectro hubiese sido filtrado, el aliasing habría sido igualmente eliminado.

### 3.8.1. Dealiasing y la regla de los dos tercios de Orszag

Phillips sugirió un proceso de dealiasing: aplicar un filtro espacial para suprimir todas las ondas con longitud de onda entre  $2h$  y  $4h$ . Para los métodos espectrales el filtro se hace simplemente eliminando todos los números de onda corrompidos justo antes de que cada uno sea transformado a valores en puntos sobre la malla. Orszag (1971a) demostró que purgar la mitad del espectro es un desperdicio. Si filtramos las ondas tales que  $|k| > (2/3)K$ , entonces la interacción cuadrática de dos números de onda  $p, q$  que sobrevive al filtro hará alias solo con números de onda que ya han sido purgados. La razón es que el corrimiento de aliasing en  $k$  siempre debe ser por un múltiplo de  $2K$ . La conclusión es que solo es necesario filtrar ondas con longitudes de onda entre  $2h$  y  $3h$  para suprimir el aliasing.

**Regla de los dos tercios** Para obtener cálculos libres de alias en una malla de  $N$  puntos para una ecuación cuadráticamente no lineal, filtre los números de onda mayores para retener solo  $(2/3)N$  de números de onda sin filtrar.

## 3.9. Manejo de términos no lineales

En la siguiente sección se delinearé el uso del método de Tau para ecuaciones no lineales a través de la ecuación de Burgers. Ahí aparece el término no lineal  $uu'$ . Tanto  $u(x, t)$  como  $\partial_x u(x, t)$  tienen su expansión en términos de los polinomios  $T_n$  y tienen sus coeficientes respectivos  $a_n$  y  $a_n^{(1)}$ . La pregunta es, ¿cuáles son los coeficientes  $P_k = \langle u\partial u \rangle_k$  de la expansión del producto  $u\partial_x u$ ?

$$u_N \frac{\partial u_N}{\partial x} = \sum_{k=0}^N P_k T_k(x), \quad (3.49)$$

Es decir, ¿cómo calcular  $P_k$  en términos de  $a_k$  y  $a_k^{(1)}$ ? En principio podría usarse la relación de convolución que para los polinomios de Chebyshev tiene la forma

$$P_k = \langle u\partial u \rangle_k = \frac{1}{2} \left[ \sum_{p+q=k} a_p a_q^{(1)} + \sum_{|p-q|=k} a_p a_q^{(1)} \right] \quad (3.50)$$

que puede demostrarse fácilmente a partir de la relación trigonométrica  $\cos A \cos B = (\cos(A+B) + \cos(A-B))/2$ , y todo el cálculo de los coeficientes se haría en el espacio espectral. Sin embargo, es mucho más eficiente utilizar un cálculo pseudoespectral con la ayuda de las Transformadas de Fourier Rápidas (TFR). Los detalles de como funcionan las TFR (y hay varias versiones) pueden verse por ejemplo en [15], aquí solo repetimos lo dicho anteriormente: las TFR son una forma muy eficiente de llevar a cabo las TDF directas e inversas. La TFR que aparece en [15] requiere que  $N$  sea potencia de 2, es decir  $N = 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ , y si se tienen no linealidades cuadráticas, la expansión de  $u$  debe hacerse de la forma

$$u(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x) \quad (3.51)$$

pero con  $a_n = 0$  para  $n > 2N/3$  (regla de los 2/3) para eliminar los errores de aliasing. Recuerde que la TDF nos mapea los valores de  $f(x_j)$  a  $\bar{f}_k$  que es una aproximación de  $\hat{f}_k$ . El proceso del cálculo de los coeficientes de la expansión del término no lineal  $uu' : P_k$  se delinea a continuación

Cálculo de  $\langle u \partial_x u \rangle_k = P_k$  a partir de los coeficientes dados  $a_k$

1. Use la relación de recurrencia

$$c_k a_k^{(1)} = a_{k+2}^{(1)} + 2(k+1)a_{k+1} \quad (3.52)$$

para calcular los coeficientes de la expansión de la primera derivada con respecto a  $x$  de  $u(x, t)$ , esto es los  $a_k^{(1)}$ .

2. Las TFR necesitan de “entrada” los coeficientes de la expansión de una función  $u(x, t)$ , y dan de salida la función valuada en varios puntos (de “colocación”)  $u_N(x_i)$ . Así que, teniendo  $a_k$  y  $a_k^{(1)}$ , utilice las TFR y obtenga  $u_N(x_i)$  y  $(\partial u_N / \partial x)(x_i)$  (esto es,  $u$  y su derivada con respecto a  $x$  en el espacio físico).

$$a_k \rightarrow u_N(x_i), a_k^{(1)} \rightarrow \frac{\partial u_N(x_i)}{\partial x} \quad (3.53)$$

3. Realice los productos en el espacio físico:

$$u_N(x_i) \frac{\partial u_N(x_i)}{\partial x} \quad (3.54)$$

así tendremos el producto de las funciones  $u$  con  $u'$  evaluadas en  $x_i$ , es decir:  $uu'(x_i)$ .

4. A través de la TFR inversas, regrese al espacio espectral. La TFR inversa tienen por entrada los valores dados por (3.54), y por salida los coeficientes  $\langle u \partial_x u \rangle_k = P_k$

$$u_N(x_i) \frac{\partial u_N(x_i)}{\partial x} \rightarrow \langle u \partial_x u \rangle_k = P_k \quad (3.55)$$

Este procedimiento es más eficiente que el uso de una relación de convolución como (3.50). Pero si aún insistieramos en usar la relación de convolución, ésta se aplica sólo para no-linealidades del tipo producto como  $u \partial_x u$ . Para no-linealidades como  $ue^{u^2}$  o bien con no-linealidades del tipo cocientes, el uso de relaciones de convolución resulta imposible.

### 3.10. Cálculo del dato inicial

Para ecuaciones de evolución como la de calor, se requiere el cálculo de los coeficientes de la expansión al tiempo  $t = 0$ . Para la base de Chebyshev, se ob-

**CAPÍTULO 3. MÉTODOS ESPECTRALES**  
**3.11. TRANSFORMADA DISCRETA DE CHEBYSHEV**

---

tienen los datos iniciales  $a_n(0)$  en forma eficiente y más precisa, por medio de la cuadratura Gaussiana, que básicamente es una aproximación de integrales de funciones definidas en  $[-1, 1]$ , en nuestro caso, la función es del tipo  $f(x) = g(x)W(x)$  donde  $W(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ . La aproximación que a nosotros nos interesa es entonces

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \sum_{i=1}^n w_i g(x_i) \quad (3.56)$$

donde se asume que  $f$  es una función no singular, que se ha expandido en serie truncada de  $T_k(x)$ . Los puntos en (3.56)  $x_k = \cos(\pi(k-0,5)/n)$ , con  $k = 1, 2, \dots, n$ , son ceros de  $T_n(x) = \cos(ncos^{-1}x)$  y  $w_i$  son pesos apropiados. Nosotros queremos calcular  $a_n(0)$  usando la cuadratura, que al adaptarla queda específicamente como

$$a_k(0) = \int_{-1}^1 u(x, 0) T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{2}{c_k n} \sum_{j=1}^n u(x_j, 0) T_k(x_j) \quad (3.57)$$

con  $x_j = \cos(\pi(j-0,5)/n)$ , con  $j = 1, 2, \dots, n$ .  $n$  debe ser mayor o igual a la  $N$  de nuestra expansión.

### 3.11. Transformada discreta de Chebyshev

Dada una función  $u(x)$ , con  $x \in [-1, 1]$ , la representación de Chebyshev de la función original es

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N \bar{u}_k T_k(x) \quad (3.58)$$

con los puntos  $x_j = \cos(\pi j/N)$  la serie de Chebyshev se lee

$$u_N(x_j) = \sum_{k=0}^N \bar{u}_k \cos\left(\frac{k\pi j}{N}\right) \quad 0 \leq j \leq N. \quad (3.59)$$

Tenemos así una serie coseno y puede mostrarse que los coeficientes se escriben como

$$\bar{u}_k = \sum_{j=0}^N \frac{2}{N C_j C_k} u(x_j) \cos(kx_j) \quad 0 \leq k \leq N \quad (3.60)$$

y donde

$$C_j, C_k \begin{cases} 2, & \text{para } j \text{ o } k = 0 \text{ o } N \\ 1 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3.61)$$

En el siguiente capítulo aplicaremos las herramientas aquí vistas a las ecuaciones que describen nuestro problema.

# Capítulo 4

## El código

### 4.1. Ecuaciones básicas para un fluido unidimensional

Usamos coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ . Se asume que el disco de acreción no es autogravitante y es axialmente simétrico, con el eje de rotación paralelo al eje  $z$ .

Las ecuaciones que describen el problema consisten de: la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma u) = 0 \quad (4.1)$$

la ecuación de movimiento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{l^2}{r^3} - g. \quad (4.2)$$

con  $g = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ . En estas ecuaciones  $u$  es la velocidad radial,  $\Sigma$  es la densidad superficial y  $P$  es la presión integrada verticalmente.

El momento angular específico  $l(r, t) = r^2 \Omega(r, t)$  satisface

$$\frac{\partial l}{\partial t} + u \frac{\partial l}{\partial r} = \frac{1}{r \Sigma} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) \quad (4.3)$$

Aquí  $\tau_{r\phi}$  es la componente  $r\phi$  del tensor de viscosidad y está dada por

$$\tau_{r\phi} = \nu \Sigma r \frac{\partial \Omega}{\partial r} = \nu \Sigma r \frac{\partial (l/r^2)}{\partial r} \quad (4.4)$$

con  $\nu$  la viscosidad cinemática y donde  $r \frac{\partial (l/r^2)}{\partial r} = r \frac{\partial \Omega}{\partial r}$  se denomina velocidad de corte. El producto de  $\nu$  y la velocidad de corte da la torca de un anillo sobre el siguiente, y es la derivada de esta torca la que impulsa los cambios en el momento angular.

## 4.2. El código

Empezamos desarrollando  $\Sigma(r, y)$ ,  $u(r, t)$ , y  $l(r, t)$  en términos de los primeros  $N + 1$  polinomios de Chebyshev:

$$\begin{aligned}\Sigma_N(\bar{r}, t) &= \sum_{n=0}^N a_n(t) T_n(\bar{r}) \\ u_N(\bar{r}, t) &= \sum_{n=0}^N b_n(t) T_n(\bar{r}) \\ l(\bar{r}, t) &= \sum_{n=0}^N c_n(t) T_n(\bar{r})\end{aligned}\tag{4.5}$$

donde  $\bar{r} \in [-1, 1]$  y  $r \in [r_{min}, r_{max}]$ , por tanto, a fin de mapear la coordenada radial estandarizada  $\bar{r}$  a la coordenada radial física  $r$  introducimos una función mapeo  $r = g(\bar{r})$  que es estrictamente creciente y satisface  $g(-1) = r_{min}$ ,  $g(1) = r_{max}$ . Por lo tanto la derivada radial dentro de nuestras ecuaciones puede ser encontrada usando la regla de la cadena.

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{dg/d\bar{r}} \frac{\partial f}{\partial \bar{r}}.\tag{4.6}$$

El mapeo más trivial  $r = g(\bar{r})$  es lineal y está dado por

$$r = \frac{r_{max}}{2}(\bar{r} + 1) - \frac{r_{min}}{2}(\bar{r} - 1).\tag{4.7}$$

Y en este caso

$$\frac{1}{dg/d\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dr} = \frac{2}{r_{max} - r_{min}} = D\tag{4.8}$$

que es una constante.

Por lo tanto, si expresamos nuestras ecuaciones en términos de la variable  $\bar{r}$ , los residuos de cada una de ellas son:

$$\begin{aligned}R_1(\bar{r}, t) &= \frac{\partial \Sigma_N}{\partial t} + D \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r} \Sigma_N u_N) \\ R_2(\bar{r}, t) &= \frac{\partial u_N}{\partial t} + D u_N \frac{\partial u_N}{\partial \bar{r}} + D \frac{1}{\Sigma_N} \frac{\partial P}{\partial \bar{r}} - \frac{l_N^2}{\bar{r}^3} + D \frac{\partial \Phi_N}{\partial \bar{r}} \\ R_3(\bar{r}, t) &= \frac{\partial l_N}{\partial t} + D u_N \frac{\partial l_N}{\partial \bar{r}} - \nu \left( D \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial l_N}{\partial \bar{r}} + D^2 \frac{1}{\Sigma_N} \frac{\partial \Sigma_N}{\partial \bar{r}} \frac{\partial l_N}{\partial \bar{r}} + D^2 \frac{\partial^2 l_N}{\partial \bar{r}^2} - \frac{2D}{\bar{r}} \frac{\partial l_N}{\partial \bar{r}} - \frac{2D}{r} \frac{l_N}{\Sigma_N} \frac{\Sigma}{\partial \bar{r}} \right)\end{aligned}\tag{4.9}$$

A fin de minimizar el residuo uno demanda que  $R(\bar{r}, t)$  sea ortogonal al espacio expandido por  $\{T_k(x)\}_{k=0}^{N-2}$ , y debido a la ortogonalidad de  $T_k(x)$ , llegamos a

$$\begin{aligned}\dot{a}_k &= p_{ak} \\ \dot{b}_k &= p_{bk} + p_{ck} + p_{dk} - g_k, \quad 0 \leq k \leq N - 2 \\ \dot{c}_k &= p_{ek} + \nu \left( p_{fk} + p_{gk} + c_k^{(2)} + p_{hk} + p_{ik} \right)\end{aligned}\tag{4.10}$$

donde  $c_k^{(2)}$  son como de costumbre los coeficientes de la expansión de la segunda derivada de  $l(\bar{r}, t)$ , los términos  $p$ 's son los coeficientes de la expansión en polinomios de Chebishev de los términos no lineales en las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 p_{ak} &= -\left(\frac{1}{r}\partial_{\bar{r}}(\bar{r}\Sigma_N u_N)\right)_k \\
 p_{bk} &= -(u_N \partial_{\bar{r}} u_N)_k \\
 p_{ck} &= -\left(\frac{1}{\Sigma_N}\partial_{\bar{r}} P\right)_k \\
 p_{dk} &= \left(\frac{l_N^2}{r^3}\right)_k \\
 p_{ek} &= -(u_N \partial_{\bar{r}} l_N)_k \\
 p_{fk} &= \left(\frac{1}{r}\partial_{\bar{r}} l_N\right)_k \\
 p_{gk} &= \left(\frac{1}{\Sigma}\partial_{\bar{r}}\Sigma_N \partial_{\bar{r}} l_N\right)_k \\
 p_{hk} &= -\left(\frac{2}{r}\partial_{\bar{r}} l_N\right)_k \\
 p_{ik} &= -\left(\frac{2l_N}{r\Sigma_N}\partial_{\bar{r}}\Sigma_N\right)_k
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

El sistema de ecuaciones (4.10) junto con las condiciones de frontera constituyen un conjunto completo para calcular los coeficientes de la expansión a todo tiempo con la condición inicial dada.

Las condiciones de frontera homogéneas, como ya se ha visto, se escriben como

$$\sum_{n=0, n \text{ par}} a_k = 0, \quad \sum_{n=1, n \text{ impar}} a_k = 0 \tag{4.12}$$

El sistema (4.10) evoluciona a los coeficientes  $a_n$  para  $0 \leq N - 2$ , y con las condiciones de frontera (4.12) se calculan  $a_{N-1}$  y  $a_N$  a cada paso de tiempo. Los términos no lineales  $p_k$  requieren un trato especial, el delineado en la sección de las transformadas discretas de Fourier, donde se tiene una “danza” entre el espacio físico y el espacio espectral que debe darse ahora a cada paso de tiempo en la evolución de los coeficientes. El método utilizado para la evolución temporal fue el de Runge-Kutta de cuarto orden (ver Apéndice A).

### 4.2.1. Caída libre de un anillo de polvo

Como primera prueba estudiamos la caída libre de una distribución de materia con simetría axial, sin momento angular, sin presión y sin viscosidad. Esto nos permite verificar la implementación de la gravedad, las condiciones de frontera radiales y la conservación de la masa en la dirección radial. Hacemos  $\nu = 0, P = 0, l = 0$ , y consideramos solo gravedad newtoniana  $g = (GM/r^2)$ . Con el fin de verificar nuestro resultado numérico, también resolvemos el problema analíticamente. Usando cantidades sin dimensiones de tal manera que  $GM = 1$ , escribimos la conservación de la energía para un elemento de fluido inicialmente en  $r_0$  como

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{r} - \frac{2}{r_0}. \tag{4.13}$$

Integrando en el tiempo obtenemos la trayectoria  $r = r(t, r_0)$  de cada elemento de fluido en la forma implícita

$$\frac{\sqrt{2}}{r_0^{3/2}}t = \frac{1}{2}\text{sen}\left(2\text{arccos}\sqrt{\frac{r}{r_0}}\right) + \text{arccos}\sqrt{r/r_0}. \quad (4.14)$$

Ahora consideramos la conservación de la masa, esto es, a cualquier tiempo se requiere que

$$2\pi r\Sigma(r, t)dr = 2\pi r_0\Sigma_0(r_0)dr_0. \quad (4.15)$$

Si se evalua  $dr_0$  usando la ecuación anterior tenemos

$$dr_0 = \frac{r_0 dr}{\sqrt{r_0/r - 1}} \left[ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{r_0}}t + \frac{r}{\sqrt{r_0/r - 1}} \right]^{-1}, \quad (4.16)$$

la solución analítica para la densidad es

$$\Sigma(r, t) = \Sigma_0(r_0)\frac{r_0^2}{r} \left[ \frac{3t}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{r_0}\right)\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)} + r \right]^{-1}, \quad (4.17)$$

donde  $r_0$  puede ser obtenido implícitamente usando (4.14).

La condición inicial es un anillo gaussiano

$$\Sigma_0(r) = \exp[-20(r - 1)^2] \quad (4.18)$$

con velocidad inicial cero. Sobre la frontera exterior usamos condiciones de frontera de Newmann estandar, esto es, hacemos  $(\partial\Sigma/\partial r)|_{r_{out}} = 0$  y  $(\partial u/\partial r)|_{r_{out}} = 0$  para todo tiempo.

En la figura 4.1(izq.) se comparan los resultados de las simulaciones y la solución analítica. A simple vista los resultados son indistinguibles de la solución analítica. Las gráficas a la derecha de la figura muestran el error entre la solución numérica y analítica. Esta prueba demuestra la habilidad de nuestro algoritmo de conservar la masa con una precisión de algunas partes/10000.



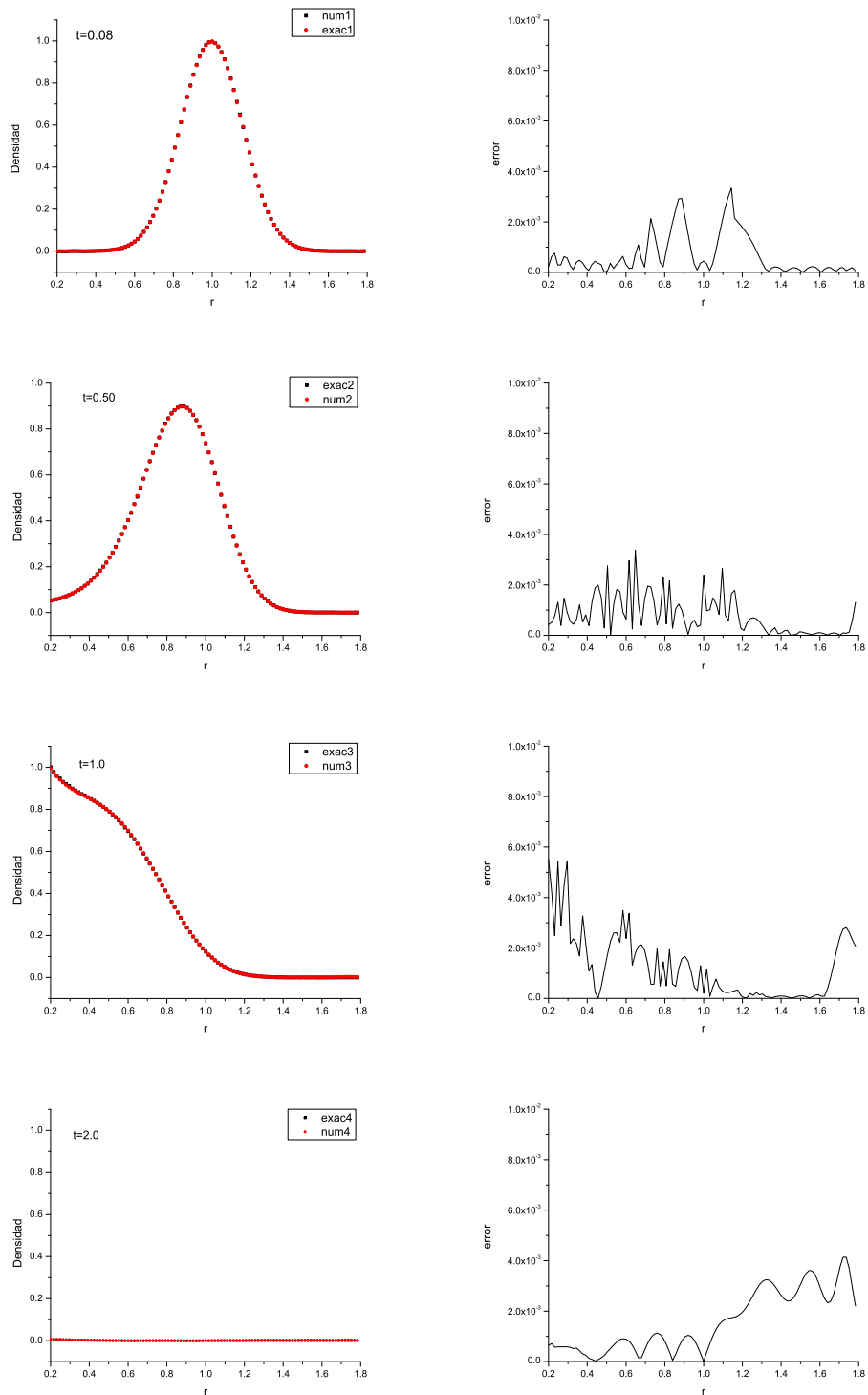


Figura 4.1: *Izquierda:* La solución analítica (círculos) es comparada con la solución numérica (cuadros). *Derecha:* Los errores numéricos, definidos como  $|\Sigma_{num} - \Sigma_{ana}|$ , a diferentes tiempos para el anillo gaussiano en caída libre.

## CAPÍTULO 4. EL CÓDIGO

### 4.2. EL CÓDIGO

---

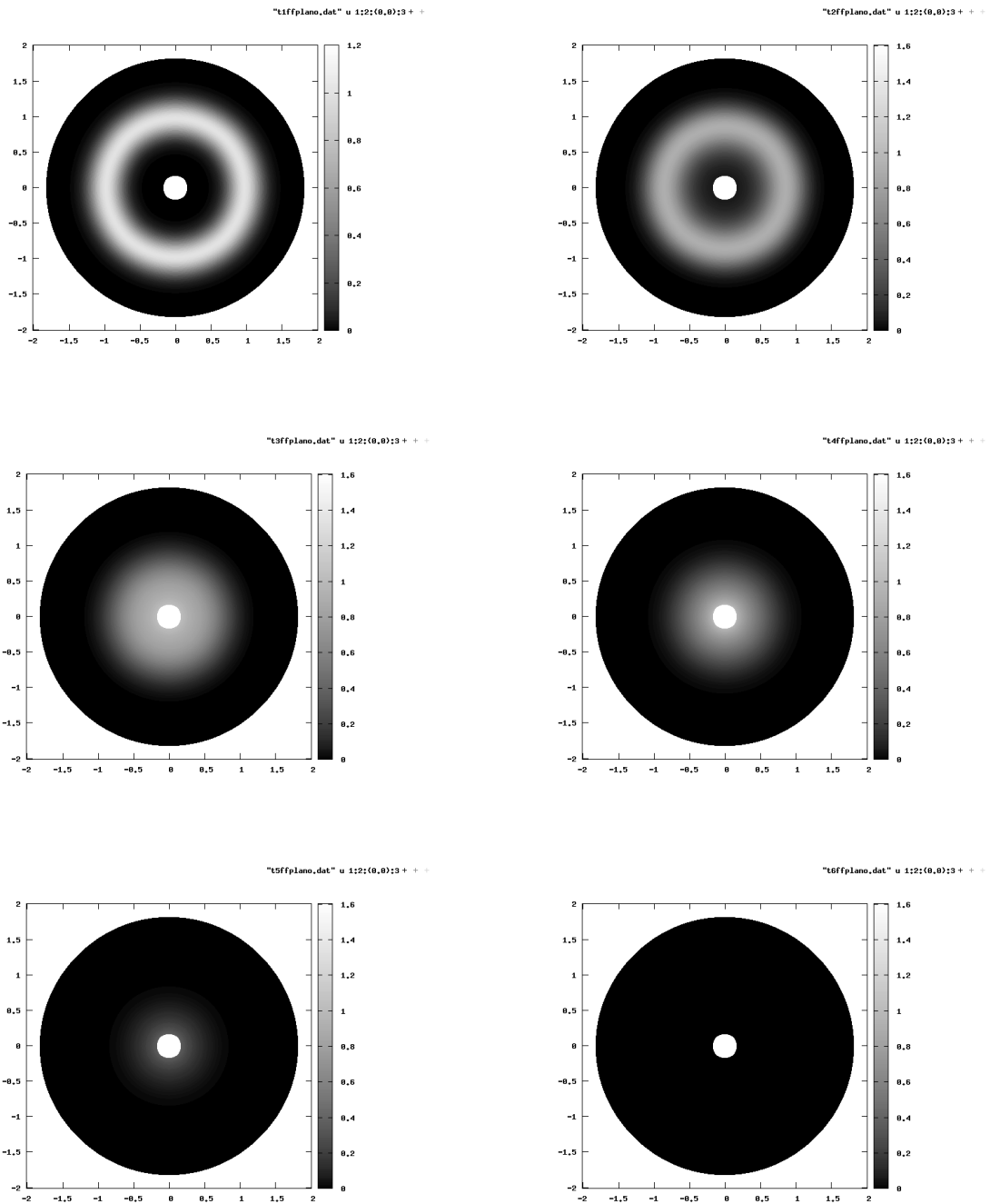


Figura 4.2: Evolución de un anillo gaussiano de gas en caída libre bajo la influencia de un potencial newtoniano. Las figuras muestran la densidad superficial  $\Sigma(r)$  a diferentes tiempos

### 4.2.2. Momento angular y viscosidad.

A continuación implementaremos todos los términos involucrados en las ecuaciones y veremos cual es efecto que tienen el momento angular  $l$ , la presión  $P$  y la viscosidad  $\nu$  en el comportamiento de la distribución de materia. Enfatizamos que en este trabajo solo se consideró el caso de un disco geoméricamente delgado. La existencia de un disco delgado implica que el enfriamiento radiativo debe ser eficiente, y esto nos permite una mayor simplificación al problema ya que podemos adoptar una ecuación de estado isotérmica en lugar de resolver la ecuación de la energía. Por tanto para las siguientes simulaciones consideramos un fluido isotérmico, donde la presión  $P$  está dada por,

$$P = c_s^2 \rho, \quad (4.19)$$

donde  $c_s$  es la velocidad del sonido y  $\rho$  es la densidad. La condición inicial para la densidad está dada por (4.18). En la siguiente figura se muestran, a  $t = 1,0$ , la densidad del fluido en caída libre, con momento angular inicial  $l_0 = 0,4r^{1/2}$ , y con momento angular inicial  $l_0 = 0,5r^{1/2}$ , estas últimas dos gráficas con  $e = 7 \times 10^{-11}$  y  $\nu = 4 \times 10^{-8}$ .

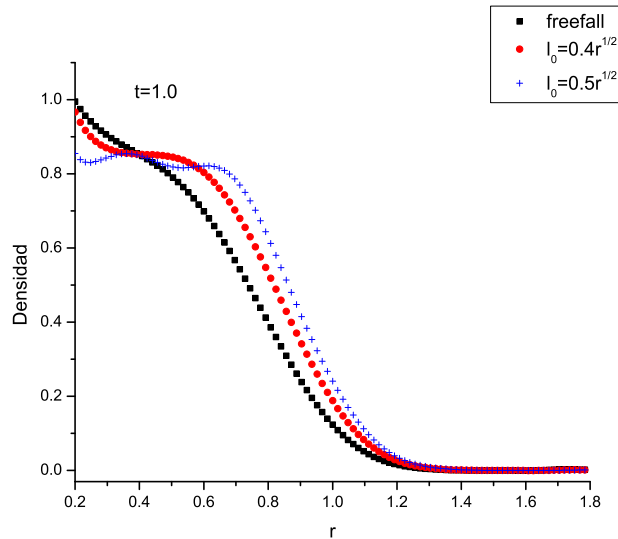


Figura 4.3: Diferencias en la dinámica del fluido cuando agregamos viscosidad y momento angular.

En las siguientes simulaciones tomamos  $r \in [1, 5]$  con la condición inicial para la densidad

$$\Sigma_0(r) = \exp[-2(r - 3)^2] \quad (4.20)$$

al igual que en la figura anterior se compara, al tiempo  $t = 4,4$ , la densidad del fluido en caída libre, con momento angular inicial  $l_0 = 0,5r^{1/2}$ , y con momento angular inicial  $l_0 = 0,7r^{1/2}$ , estas últimas dos gráficas con  $e = 7 \times 10^{-11}$  y  $\nu = 4 \times 10^{-8}$ .

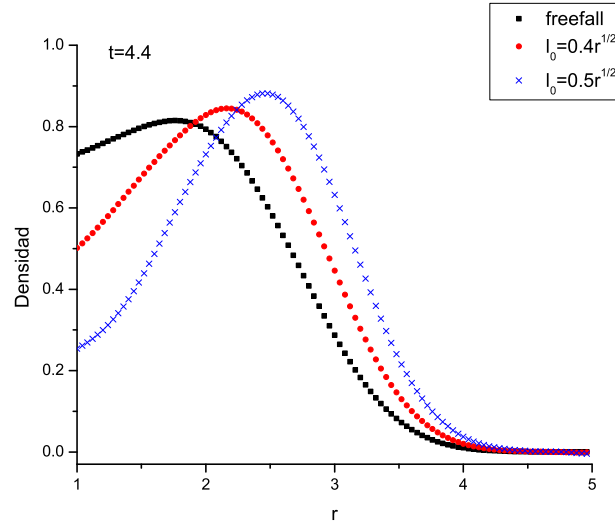
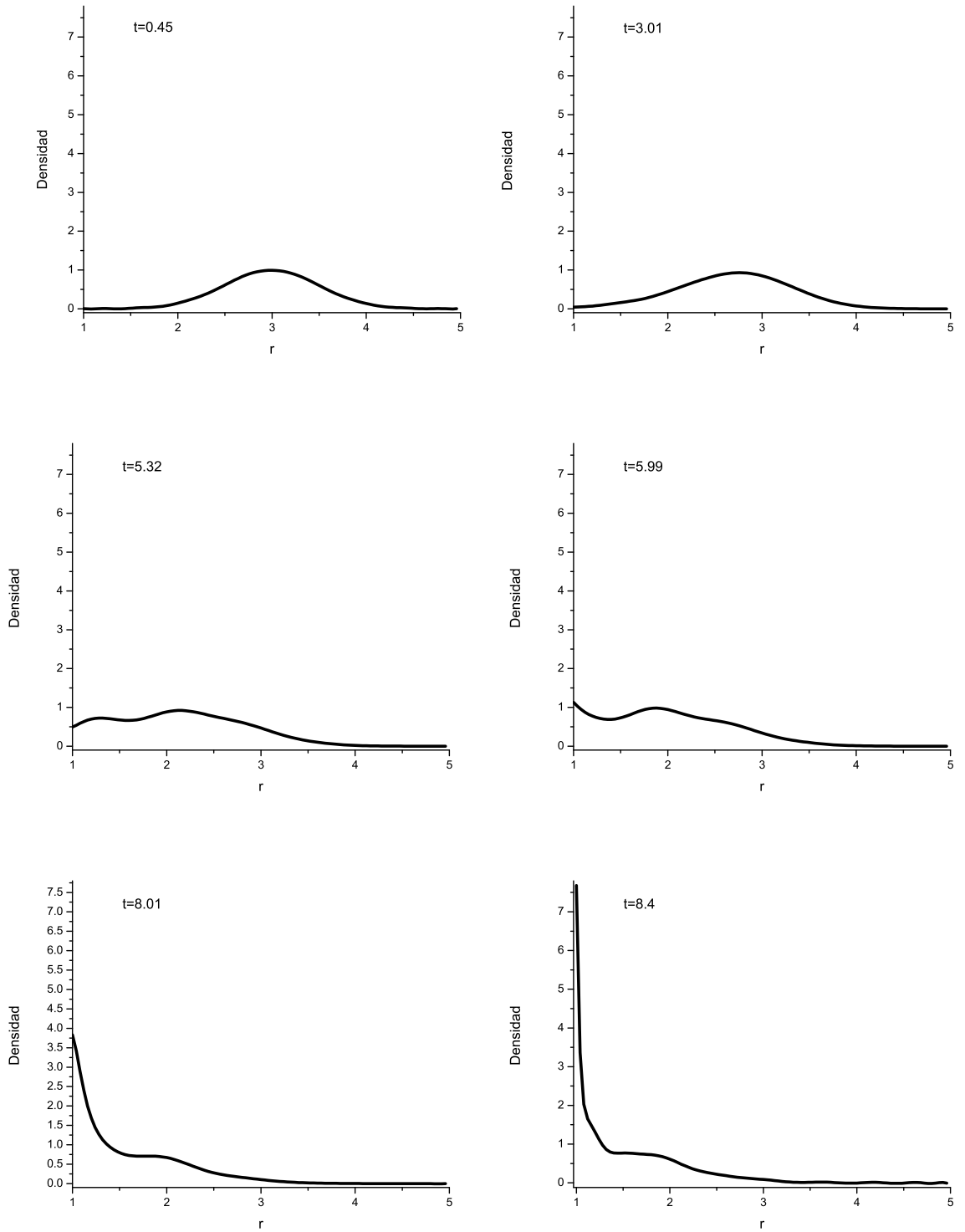


Figura 4.4: Se aprecia fácilmente el retraso en los tiempos de acreción cuando se incluye momento angular.

En casi toda circunstancia, el gas alrededor de un objeto (estrella, agujero negro, AGN's) tiene suficiente momento angular como para ser tragado directamente por el objeto central. Entender el mecanismo que conduce al transporte de momento angular en fluidos rotantes es por tanto uno de los problemas centrales en la teoría de discos de acreción. En la siguiente figura se ilustra mejor el proceso. La condición inicial para  $\Sigma_0$  está dada por (4.20),  $l_0 = 0,7r^{1/2}$ ,  $e = 7 \times 10^{-11}$  y  $\nu = 8 \times 10^{-5}$ , es decir, hemos tomado un coeficiente de viscosidad mayor con respecto al utilizado en la última gráfica. En la figura 4.5 podemos ver que a pesar de que el fluido acreta y alcanza densidades relativamente grandes en radios menores, este sigue formando parte del disco de acreción y no del objeto central, contrario a lo que sucede en las simulaciones anteriores donde el coeficiente de viscosidad es menor, lo que hacía que el transporte de momento angular no fuera significativo permitiendo un proceso de acreción más rápido.

CAPÍTULO 4. EL CÓDIGO  
4.2. EL CÓDIGO

---



---

Figura 4.5:

# CAPÍTULO 4. EL CÓDIGO

## 4.2. EL CÓDIGO

---

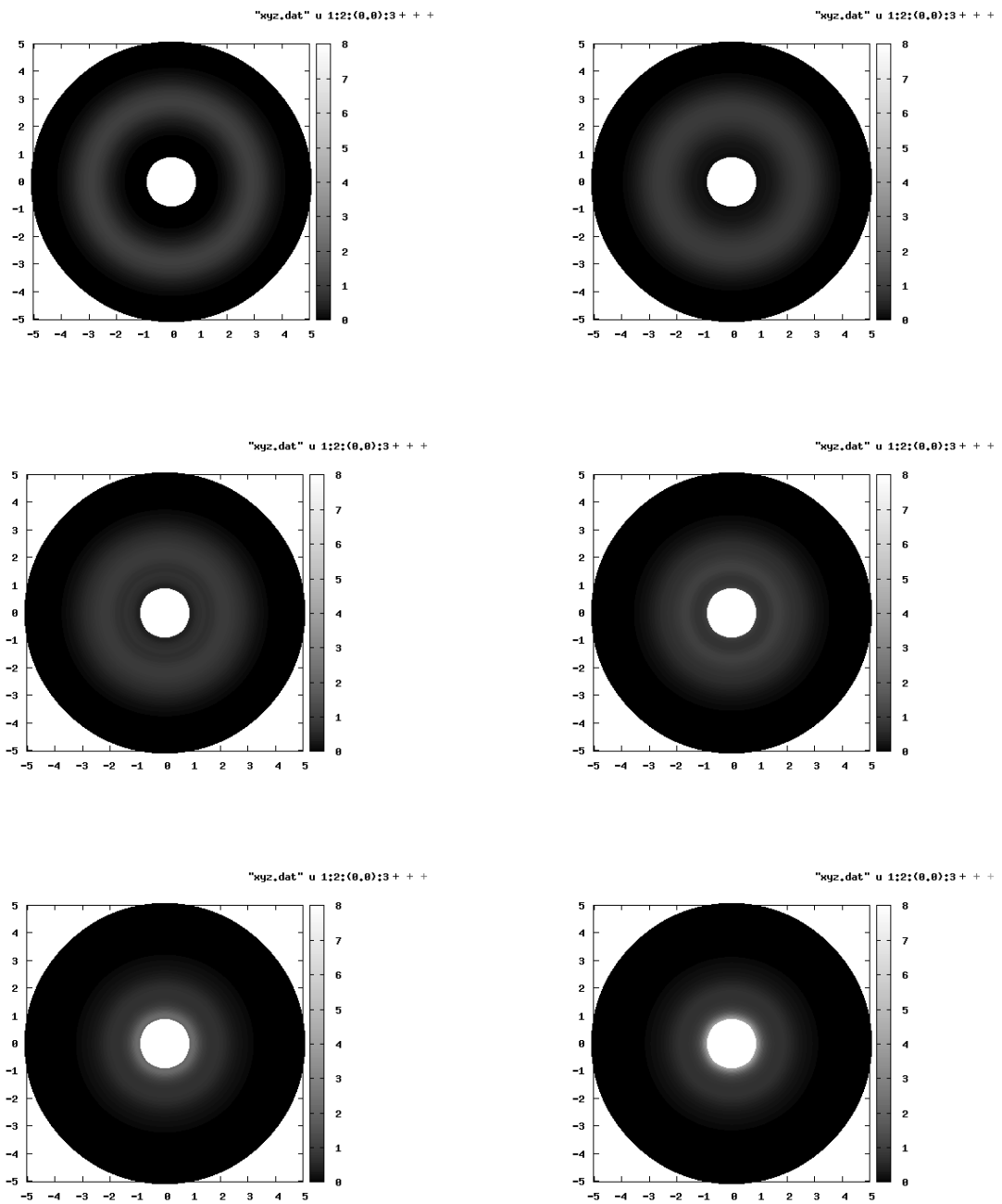


Figura 4.6:

### 4.3. Acreción en Agujeros Negros

Describimos el campo gravitacional del agujero negro en términos de hidrodinámica newtoniana, con el potencial gravitacional introducido por Paczyński y Wiita (1980).

$$\Phi(r, z) = \frac{GM}{R - R_G}. \quad (4.21)$$

Aquí  $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$ ,  $R_G = 2GM/c^2$  es el radio gravitacional del agujero negro (equivalente al radio de Schwarzschild en la relatividad general) y  $M$  es su masa. El potencial pseudo newtoniano (4.21) para el campo gravitacional del agujero negro ha sido usado anteriormente por un gran número de investigadores. Se encontró que para un toro estático este da cualitativamente los mismos resultados que los cálculos correctos de la relatividad general y que la concordancia cuantitativa es típicamente mejor que algunos puntos porcentuales.

Con este potencial el momento angular de una órbita circular es

$$l_{Kep} = (GMr)^{1/2} \frac{r}{r - r_g}. \quad (4.22)$$

El potencial pseudo-newtoniano imita una propiedad dinámicamente importante de la métrica de Schwarzschild, la órbita circular marginalmente estable (definida por  $dl_{Kep}/dr = 0$ ) en  $r = r_{ms} = 3r_g$ . En el Apéndice B podemos leer más sobre este potencial.

La existencia de una órbita marginalmente estable es una característica distintiva de los flujos de acreción sobre agujeros negros. Dentro de  $r_{ms}$ , las órbitas circulares estables no existen, y el gas se hunde inevitablemente, en una escala de tiempo corta, dentro del agujero negro. La ubicación de la órbita circular marginalmente estable, que se encuentra en  $r_{ms} = 6GM/c^2$  para un agujero no rotante, varía fuertemente con el parámetro de spin  $a$  para agujeros negros de Kerr. Esta variación, junto con la asunción de un cambio grande en las propiedades de emisión del gas interior y exterior a  $r_{ms}$ , es fundamental en cualquier intento de medir  $a$  a partir de cantidades observables para agujeros, ya sean galácticos o supermasivos. Las estrellas de neutrones, si son lo suficientemente compactas, también pueden poseer una última órbita estable.

A continuación mostraremos una serie de gráficas que resultan de incluir el potencial de Paczyński y Wiita en las ecuaciones que describen a un disco de acreción. Empezamos por graficar la densidad de un anillo gaussiano en caída libre, es decir,  $P = 0$ ,  $\nu = 0$  y  $u_0 = 0$ . Además el radio gravitacional  $r_g = 0,5$ , por tanto el radio de la última órbita estable  $r_{ms} = 1,5$ , y  $r$  varía entre 1 y 5, es decir, la simulación corre de  $r = 2r_g$  a  $r = 10r_g$ .

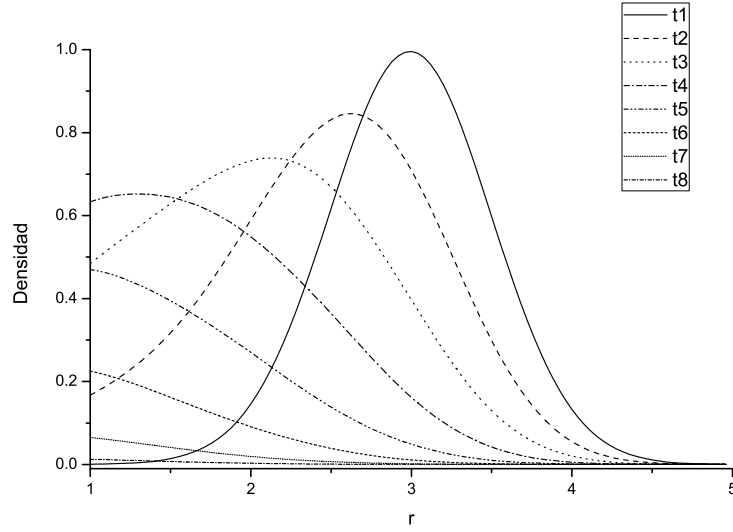


Figura 4.7: Distribución gaussiana de materia en caída libre bajo la acción del potencial Paczyński-Wiita.

Veamos como evoluciona la misma distribución de materia bajo la acción del transporte de momento angular debido a la viscosidad. En esta simulación  $\nu = 4 \times 10^{-5}$  y  $e = 4 \times 10^{-5}$

Para esto primero grafiquemos, a modo de comparación, la densidad para el fluido con viscosidad y la densidad para el fluido en caída libre, ambas a  $t = 6,11$  (figura 4.8).

La diferencia entre ambas gráficas es notable, el fluido en caída libre a acretao practicamente en su totalidad mientras que la mayor parte del fluido con viscosidad permanece y sigue formando parte del disco de acreción. Esto ilustra el efecto del transporte de momento angular y el aumento de las escalas de tiempo necesarias para que el fluido acrete cuando la viscosidad y momento angular están presentes en el sistema.

A continuación analizaremos la evolución completa del fluido con viscosidad (figura 4.9).

Uno de los resultados importantes que se pueden observar en la simulación es que a medida que el fluido cae, este empieza a concentrarse en anillos alrededor de  $r = r_{ms}$ . Entonces a diferencia del caso con potencial newtoniano, donde la distribución de materia cae de manera continua, la acreción para el potencial pseudo-newtoniano que imita las propiedades de un Agujero Negro ocurre en forma de anillos a partir de  $r = r_{ms}$ . Este resultado se ilustra mejor graficando la densidad superficial en escala de grises sobre el plano x-y.



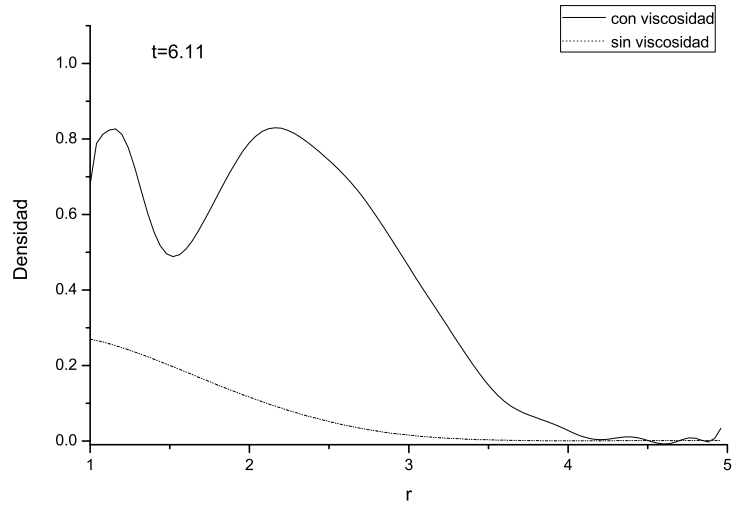


Figura 4.8:

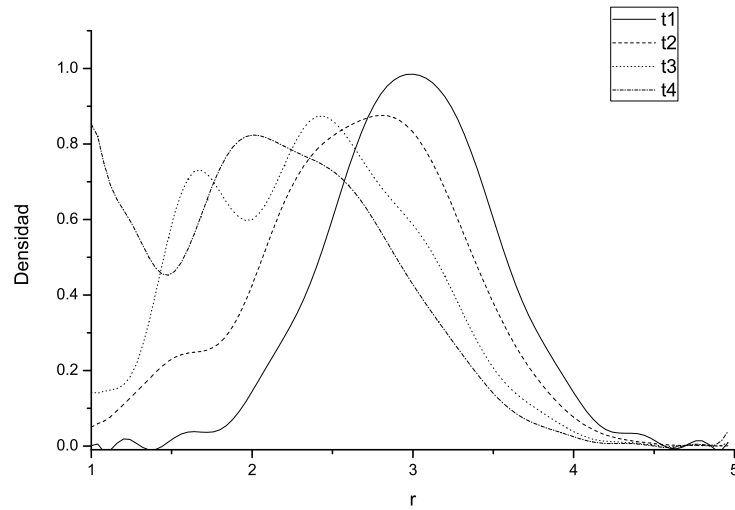


Figura 4.9:

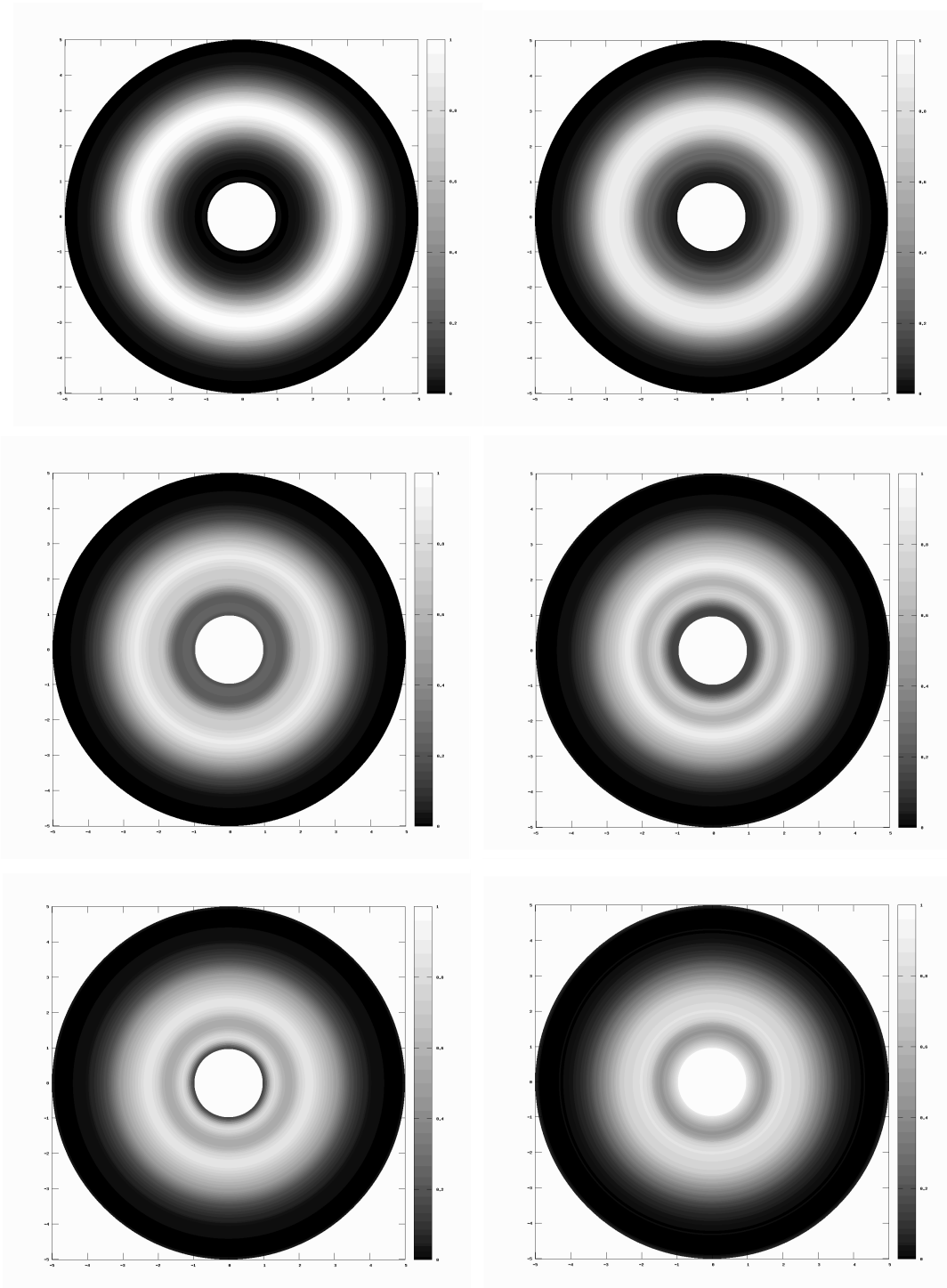


Figura 4.10: La acreción se lleva a cabo en forma de anillos a partir de  $r \approx r_{ms} = 1,5$ .

La otra característica importante que se puede observar en la simulación y de la

---

cual ya se ha hablado es que dentro de  $r_{ms}$  la materia se unde inevitablemente ya que no alcanza valores grandes como los vistos en el caso del potencial newtoniano, sino que cae en una escala de tiempo corta. El imitar esta dinámica es una de las razones principales para utilizar el potencial de Paczyński-Wiita, y nuestro código la reproduce de manera evidente.

### 4.3.1. Unidades físicas y unidades del código

Los resultados anteriores están dados en unidades del código, que son libres de escala. En ocasiones es conveniente tener escalas astrofísicas asociadas con estos valores. Siguiendo a Paczyński y Wiita (1980), igualamos el radio gravitacional  $r_g = 0,5$  con el radio de Schwarzschild

$$r_g = 3 \times 10^5 (M/M_\odot) cm, \quad (4.23)$$

donde  $M/M_\odot$  es la masa del agujero negro. También hemos trabajado con  $GM = 1$ , y la velocidad de la luz es  $c = (2GM/r_g)^{1/2}$ , o 2 en unidades del código.

El tiempo orbital a  $6r_g$  es

$$\approx 10\pi \times \sqrt{12} r_g / c. \quad (4.24)$$

Este está definido como un tiempo de  $5\pi\sqrt{3}$  unidades del código, de tal manera que una unidad de tiempo del código es  $4r_g/c \approx 40M/M_\odot \mu s$ . Para un agujero negro de  $3,7 \times 10^6 M_\odot$ , la escala de tiempo del código es  $t_{bh} = 148s$ . Sin embargo, para un agujero negro de  $50M_\odot$  la escala de tiempo es de tan solo  $0,002s$ . Es decir, la escala de tiempo varía enormemente con la masa, aunque la dinámica mostrada en las simulaciones es la misma, solo cambian las escalas de tiempo y distancia.



# Capítulo 5

## Acreción en oscilaciones

El modelo de Lambda Cold Dark Matter ( $\Lambda$ CDM) ha mostrado recientemente un enorme poder predictivo. Puede explicar la formación de estructura del universo, su expansión acelerada, las fluctuaciones de microkelvins de la radiación de fondo cósmico, etc. Sin embargo, desde que este modelo fue propuesto, han surgido algunas cuestiones relacionadas con la formación de galaxias. El paradigma CDM predice un perfil de densidad que corresponde con el perfil Navarro-Frenk-White (NFW), Navarro et al, 1997, dado por

$$\rho_{NFW} = \frac{\rho_0}{\frac{r}{r_0} \left( \frac{r}{r_0} + 1 \right)^2}. \quad (5.1)$$

Sin embargo, este perfil parece tener algunas diferencias con los perfiles observados de galaxias LSB (Low Surface Brightness). Bernal, Matos y Núñez 2008 han mostrado que un perfil central plano surge naturalmente dentro de la hipótesis de la materia oscura escalar, implicando que la región central de las galaxias distingue entre CDM y SFDM.

La idea clave del panorama SFDM es que la materia oscura responsable de la formación de estructura en el Universo es un campo escalar real,  $\Phi$ , mínimamente acoplado a la gravedad de Einstein con autointeracción parametrizada por una energía potencial de la forma

$$V(\phi) = V_0[\cosh(\lambda\sqrt{\kappa}\Phi) - 1], \quad (5.2)$$

donde  $V_0$  y  $\lambda$  son los únicos parámetros libres del modelo,  $\kappa_0 = 8\pi G$  y usamos unidades naturales  $\hbar = c = 1$ . la masa efectiva del campo escalar está dada por  $m_\phi^2 = \kappa_0 V_0 \lambda^2$ .

La ventaja del modelo SFDM es que este es insensible a condiciones iniciales y el campo escalar se comporta como CDM una vez que este empieza a oscilar alrededor del mínimo de su potencial. En este caso se puede mostrar (Matos y Ureña-López 2000, 201) que el modelo SFDM es capaz de reproducir todos los logros del modelo estándar  $\Lambda$ CDM por encima de escalas galácticas. Además predice un corte

## CAPÍTULO 5. ACRECIÓN EN OSCILATONES

---

bruzco en el espectro de potencias de masa debido a su naturaleza cuadrática, por lo tanto explicando la escasez de galaxias enanas, en contraste con el posible exceso predicho por simulaciones de  $N$  cuerpos con CDM estándar. El mejor ajuste a los datos cosmológicos puede deducirse de las densidades actuales de materia oscura y radiación en el Universo y del corte en el espectro de potencias de masa que condiciona el número de galaxias enanas en los clusters. Los valores favorecidos que se encuentran (Matos y Ureña-López 2001) para los dos parámetros libres en el potencial del campo escalar son:

$$\begin{aligned}\lambda &\approx 20, \\ V_0 &\approx (3 \times 10^{-27} m_{Pl})^4,\end{aligned}\tag{5.3}$$

donde  $m_{Pl} \equiv G^{-1/2} \approx 10^{-5} g$  es la masa de Planck. Esto implica que la masa efectiva del campo escalar debe ser  $m_\phi \approx 9,1 \times 10^{-52} m_{Pl} = 1,1 \times 10^{-23} eV$ .

Ahora veamos porque se sospecha que el campo escalar también puede ser la materia oscura a escala galáctica. Existen tres razones principales. La primera razón es que las simulaciones numéricas sugieren que la masa crítica para el caso considerado aquí, usando el potencial escalar (5.2), y los parámetros dados por (5.3) es aproximadamente, Alcubierre et. al. 2002

$$M_{crit} \approx 0,1 \frac{m_{Pl}^2}{\sqrt{\kappa V_0}} = 2,5 \times 10^{13} M_\odot.\tag{5.4}$$

Este fue un resultado sorprendente. La masa crítica del modelo mostrado en Matos y Ureña-López 2000, 2001, es del mismo orden de magnitud del contenido de materia oscura de un halo galáctico estándar. Observe que los parámetros del modelo, ec.(5.3), fueron fijados utilizando observaciones cosmológicas. El resultado sorprendente consistía en el hecho de que usando el mismo campo escalar para explicar la materia oscura a escalas cosmológicas, este siempre colapsará con una masa preferencial que corresponde al halo de una galaxia real. Así, este resultado es una predicción del modelo cosmológico SFDM para formación de galaxias. La segunda razón es que durante el régimen lineal de fluctuaciones cosmológicas, el campo escalar y un fluido tipo polvo, como CDM, se comportan de la misma manera. La densidad de contraste en CDM y en los modelos de SFDM evolucionan exactamente de la misma forma y por tanto ambos modelos predicen la misma formación de estructura a gran escala en el Universo. Las diferencias entre CDM y SFDM empiezan a aparecer en el régimen no lineal de formación de estructura de tal manera que habrá diferencias en sus predicciones sobre formación de galaxias. La tercera razón es que un objeto de campo escalar (e.g. un oscilaton) contiene un perfil central de densidad plano, como parece ser el caso en galaxias. En el caso de SFDM, la fuerte autointeracción del campo escalar resulta en la formación de objetos solitónicos llamados “oscilaton”, que tienen una masa del orden de una galaxia (ver por ejemplo Ureña-López 2002, Ureña-López et al 2002 y Alcubierre et al 2003).

## 5.1. Acreción en Oscilatonos

En esta sección describiremos, con la ayuda de nuestro código, a un fluido inmerso en el potencial de un oscilatón. Usando el hecho de que las galaxias tienen un campo gravitacional débil y por tanto su espacio tiempo es casi plano, Bernal, Matos y Núñez 2008 estudiaron un oscilaton masivo sin autointeracción (i.e. con potencial  $V = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2$ ) en el espacio-tiempo de Minkowski. La solución es analítica y nos ayudará a entender algunas características que aparecen en oscilatonos no planos. La expresión analítica para la densidad del campo escalar es:

$$\rho_\phi = \frac{\phi_0^2 k^2}{2x^2} \left[ \left( \left( \frac{\text{sen}(x)}{x} - \cos(x) \right)^2 - k^2 \text{sen}^2(x) \right) \cos^2(wt) + w^2 \text{sen}^2(x) \right], \quad (5.5)$$

que oscila con una frecuencia  $2wt$ , con la relación de dispersión  $k^2 = w^2 - m_\phi^2$  y donde  $x = kr$ . Dada  $\rho_\phi$  podemos encontrar el potencial  $\Phi$  producido por el oscilatón, pero dado que en nuestras ecuaciones hidrodinámicas necesitamos el gradiente de  $\Phi$ , este se puede obtener integrando una vez la densidad  $\rho_\phi$ ,

$$\nabla\Phi = \frac{2\pi G\phi_0^2}{r^2} \left[ -\frac{\text{sen}^2(kr)}{k^2 r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\text{sen}(2kr)}{2k} + r \right) - \frac{1}{2} k^2 \left( r - \frac{\text{sen}(2kr)}{2k} \right) \right] \cos^2(wt) + \frac{w^2}{2} \left( r - \frac{\text{sen}(2kr)}{2k} \right) \quad (5.6)$$

Sustituyendo  $\nabla\Phi$  en las ecuaciones hidrodinámicas podemos hacer la siguiente simulación. Caída libre de una distribución de materia en el potencial producido por un oscilatón, haciendo  $P = 0$ ,  $\nu = 0$  y  $l = 0$ . En las figuras 5.1 y 5.2 podemos ver que al menos para el caso de caída libre no hay mucha diferencia con el caso newtoniano.

Ahora, al igual que en los casos anteriores introducimos los términos de viscosidad y momento angular en las ecuaciones, tomamos los valores  $\nu = 4 \times 10^{-8}$ ,  $e = 7 \times 10^{-11}$  y  $l_0 = 0,75r^{3/2}g^{1/2}(r, 0)$ , donde  $g(r, t) = \partial\Phi/\partial r$  ec. (5.6). En la figura 5.3 podemos ver la dinámica del fluido. Este sigue acretando debido a que el momento angular es menor al necesario para mantener orbitas circulares. Dado que el tiempo transcurrido en esta simulación es aproximadamente el mismo que el de la caída libre, una vez más podemos verificar la importancia de la viscosidad. Ya que mientras que el fluido ha acretado totalmente para  $t \approx 36$  en el caso de caída libre, el disco ha perdido poca materia en el caso con viscosidad y momento angular, es decir, la escala de tiempo del proceso de acreción se ve modificada de manera notable.

## CAPÍTULO 5. ACRECIÓN EN OSCILACIONES

### 5.1. ACRECIÓN EN OSCILACIONES

---

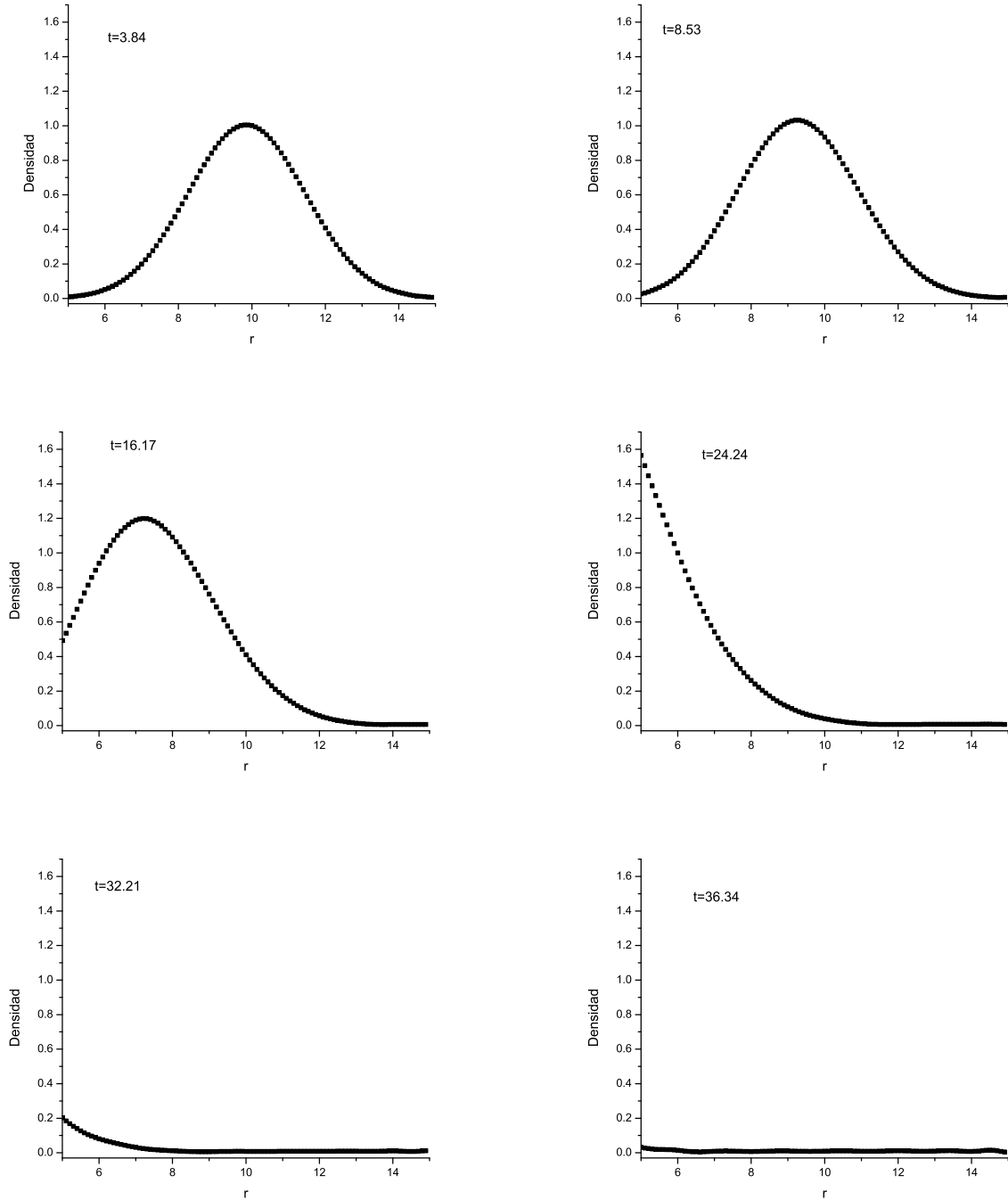


Figura 5.1: El perfil de densidad recibe un efecto de advección hacia la izquierda, mientras que la amplitud de la onda crece con cada paso de tiempo.



# CAPÍTULO 5. ACRECIÓN EN OSCILACIONES

## 5.1. ACRECIÓN EN OSCILACIONES

---

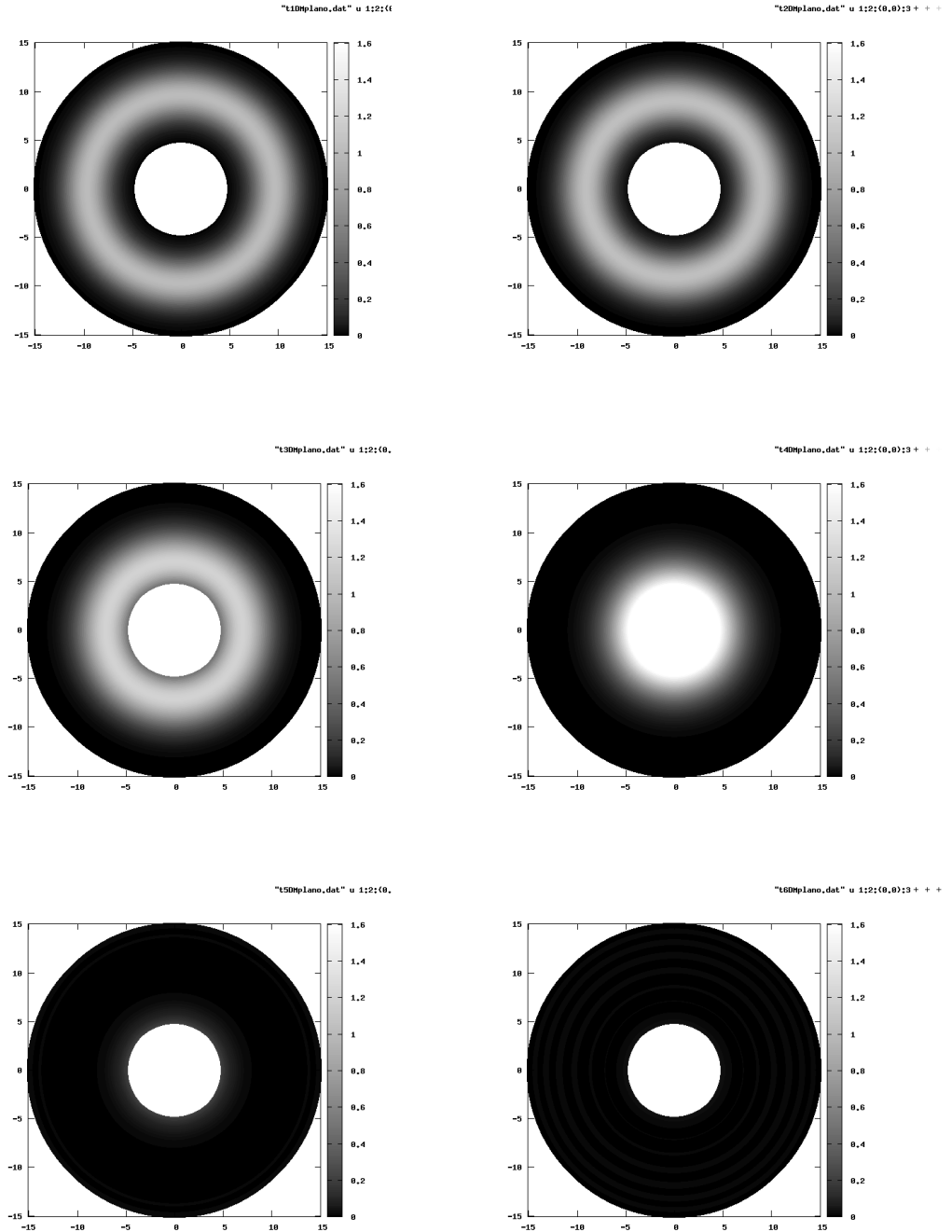


Figura 5.2:

## CAPÍTULO 5. ACRECIÓN EN OSCILATONES

### 5.1. ACRECIÓN EN OSCILATONES

---

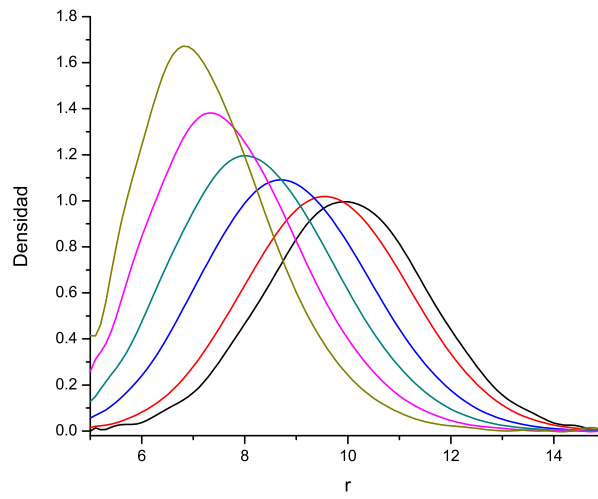


Figura 5.3:

Por último, en esta gráfica es apreciable la diferencia en la dinámica del fluido con respecto a la producida por el potencial newtoniano y el potencial de Paczyński y Wiita. La figura 5.3 muestra un efecto de advección que no existe para los dos potenciales antes mencionados.

# Capítulo 6

## Conclusiones

Los métodos espectrales nos han permitido construir un código para resolver las ecuaciones hidrodinámicas de una manera relativamente simple, gracias a que los términos no lineales en las ecs. son implementados de una forma sencilla en el código. Y aunque solo hemos tratado uno de los casos en donde se puede encontrar solución analítica, nuestras gráficas están en concordancia con esta última, lo cual ha significado una prueba importante para el código, permitiendonos seguir adelante con nuestras simulaciones.

Como hemos visto, el problema ha sido simplificado en este trabajo en tanto que las ecuaciones son unidimensionales y hemos prescindido de la ecuación de la energía al considerar un fluido isotérmico. Sin embargo se ha trabajado con los términos de viscosidad, que son clave en el proceso de acreción al ser los responsables del transporte de momento angular en el gas.

Un trabajo posterior supone trabajar, en 2 y 3D, las ecuaciones completas de la hidrodinámica además de tomar en cuenta el efecto de los campos eléctrico y magnético presentes en el sistema, los cuales desempeñan un papel de suma importancia en el fenómeno de discos de acreción.

La idea de colocar el potencial de oscilación, en las ecuaciones hidrodinámicas, es interesante, aunque requiere de un análisis de la validez de su uso en un esquema newtoniano. Sin embargo nos puede ayudar a entender el proceso de formación de estructura en el universo a escala galáctica.

Destaca la notoria diferencia en la dinámica del fluido bajo la acción de cada uno de los potenciales aquí tratados.



# Apéndice A

## Método de Runge-Kutta para sistemas de ecuaciones diferenciales

Para aproximar la solución de un sistema de  $m$  problemas iniciales de primer orden

$$u'_j = f_j(t, u_1, u_2, \dots, u_m), \quad a \leq t \leq b, \quad \text{con } u_j(a) = \alpha_j, \quad (\text{A.1})$$

para  $j = 1, 2, \dots, m$  para  $(N + 1)$  números igualmente espaciados en el intervalo  $[a, b]$ :

**ENTRADA** puntos extremos  $a, b$ ; número de ecuaciones  $m$ ; entero  $N$ ; condiciones iniciales  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ .

**SALIDA** aproximaciones  $w_j$  a  $u_j(t)$  para los  $(N + 1)$  valores de  $T$ .

Paso 1 Fijar  $h = (b - a)/N$ ;  
 $t = a$ .

Paso 2 Para  $j = 1, 2, \dots, m$  sea  $w_j = \alpha_j$ .

Paso 3 SALIDA  $(t, w_1, w_2, \dots, w_m)$ .

Paso 4 Para  $i = 1, 2, \dots, N$  realizar pasos 5-11.

Paso 5 Para  $j = 1, 2, \dots, m$  se define

$$k_{1,j} = hf_j(t, w_1, w_2, \dots, w_m).$$

Paso 6 Para  $j = 1, 2, \dots, m$  se define

## APÉNDICE A. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA PARA SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

---

$$k_{2,j} = hf_j(t + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_2 + \frac{1}{2}k_{1,2}, \dots, w_m + \frac{1}{2}k_{1,m}).$$

Paso 7 Para  $j = 1, 2, \dots, m$  se define

$$k_{3,j} = hf_j(t + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_2 + \frac{1}{2}k_{2,2}, \dots, w_m + \frac{1}{2}k_{2,m}).$$

Paso 8 Para  $j = 1, 2, \dots, m$  se define

$$k_{4,j} = hf_j(t + h, w_1 + k_{3,1}, w_2 + k_{3,2}, \dots, w_m + k_{3,m}).$$

Paso 9 Para  $j = 1, 2, \dots, m$  se define

$$w_j = w_j + (k_{1,j} + 2k_{2,j} + 2k_{3,j} + k_{4,j})/6.$$

Paso 10  $t = a + ih$ .

Paso 11 SALIDA  $(t, w_1, w_2, \dots, w_m)$ .

Paso 12 STOP.

# Apéndice B

## El potencial Paczyński-Wiita

Paczyński se dio cuenta que un potencial gravitacional escogido de manera adecuada puede modelar con precisión (en una teoría “seudo newtoniana”) efectos relativistas que determinan el movimiento de la materia cerca de un agujero negro no rotante. La elección de Paczyński, conocida ahora como el “Potencial Paczyński-Wiita”, a probado ser muy práctico.

Abramowicz, quien en (1978) era parte del grupo de Paczyński en Varsovia relata como encontraron este potencial: “Nuestro líder, Bohdan Paczyński, quien no estaba familiarizado con los aspectos técnicos de la relatividad general, me pidió encontrar una forma newtoniana de describir estos efectos. Yo no estaba muy contento con la petición de Paczyński porque inicialmente pense que el único método adecuado para la tarea debería ser el esquema pot-newtoniano. Este usa expansiones tediosas, largas y aburridas. Estaba trabajando desesperadamente, produciendo fórmulas cada vez más largas, cuando un día Paczyński vino a mi oficina y dijo “deja de trabajar en eso. Encontré la solución.” Y me mostró su solución, un potencial newtoniano,

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r - r_G}, \quad r_G = \frac{2GM}{c^2}, \quad (\text{B.1})$$

donde  $r$  es el radio esférico,  $M$  la masa del agujero negro, y  $r_G$  su radio gravitacional. Paczyński había comprobado que los dos radios más importantes que caracterizan órbitas circulares keplerianas, el radio de la órbita marginalmente estable  $r_{ms}$  (i.e ISCO) y el radio de la órbita marginalmente ligada  $r_{mb}$  tienen los mismos valores en la gravedad newtoniana con este potencial (B.1) que en la gravedad de Einstein en la métrica de Swarzschild,

$$r_{ms} = 3r_G, \quad r_{mb} = 2r_G. \quad (\text{B.2})$$

Este fue un despliegue brillante de las cualidades de Paczyński: el simplemente “adivinó” la solución correcta y más simple del problema. Su solución inmediatamente probó ser muy práctica. Poco después Paczyński & Wiita (1980) usaron (B.1) para calcular numericamente los modelos de discos gruesos. Los modelos difieren de aquellos calculados con toda la fuerza de la relatividad general en solo unos puntos

## APÉNDICE B. EL POTENCIAL PACZYŃSKI-WIITA

---

porcentuales. Más tarde esto abrió las puertas a que numerosos autores usaran el potencial Paczyński-Wiita en sus cálculos sobre acreción en agujeros negros.”

El potencial no es ni una aproximación de la gravedad relativista ni una fórmula de ajuste. En su lugar, se trata de un único modelo (“seudo”) newtoniano de la gravedad de un agujero negro no rotante. Este reproduce *exactamente*:

- la ubicación de la órbita marginalmente estable  $r_{ms} = \text{ISCO}$ ,
- la ubicación de la órbita marginalmente ligada  $R_{mb}$ ,
- la forma de momento angular kepleriano  $L(r)$ .



# Bibliografía

- [1] Armitage, P. J., Reynolds, C. S., and Chiang, J. 2001, *ApJ*, 548, 868
- [2] Armitage, P.J. astro-ph/0405170 v1
- [3] Balbus, S.A. and Hawley, J.F. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 70, No. 1, January 1998
- [4] Becerril, R. 2009, Una Breve Introducción a los Métodos Espectrales
- [5] Bernal, A., Matos, T. and Núñez, D. astro-ph/0303455v3
- [6] Boyd, J.P. 200, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Second edition.(Dover Publications, Inc.)
- [7] Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A. and Zang, T.A. 2006, *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*
- [8] Chakrebarati, S.K. astro-ph/9807104v1
- [9] Chan, C.-K., Psaltis, D., and Özel, F. 2005, *ApJ*, 628, 353
- [10] Frank, J., King, A., and Raine, D. J. 2002, *Accretion Power in Astrophysics: Third Edition*. (Cambridge, U.K.: Cambridge University Press)
- [11] Igumenshchev, I.V., Chen, X. and Abramowicz, M.A. astro-ph/9509070
- [12] Landau, L.D. and Lifshitz , *Fluid Mechanics*, Second Edition
- [13] Lee, W.L. and Ramirez–Ruiz, E. :astro-ph/0206011v1
- [14] Malec, E. and Rembiasz, T. arXiv:1004.4197v1 [gr-qc]
- [15] “Numerical Recipes in C” William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling and Brian P. Flannery, Cambridge University Press, Second Edition (1997).
- [16] Papaloizou, J. and Szuszkiewicz, E. astro-ph/9401025v1
- [17] Savonije, G.J., Papaloizou, J.C.B. and Lin, D.N.C. *Mon.Not.R.Astron.Soc.*268, 13-28(1994)

- [18] Shore, S.N. 2007, *Astrophysical Hydrodynamics*, Second Edition
- [19] Spruit, H.C. A. Baykal et al. (eds.), *The Electromagnetic Spectrum of Neutron Stars*, 203–247.