

.

Pablo Arturo Rodríguez Gutiérrez

Febrero 2006

Índice general

1. Introducción	1
2. Teoría de Branas en un espacio-tiempo 5-dimensional	4
2.1. Relatividad General	4
2.2. Universo Homogéneo e Isotrópico	9
2.3. Espacio-tiempo con dimensiones extras	11
3. Solución a las Ecuaciones de Einstein	16
3.1. El Tensor Métrico	16
3.2. El Tensor de Einstein	18
3.3. El Ansatz $K(t) = \sqrt{R^2 - (R - t)^2}$	19
4. La Fuente Como un F.P. en Todo el E-T 5-Dimensional	21
4.1. El tensor de materia	21
4.2. Consecuencias de las soluciones de $b(\chi)$	25
4.3. Ecuación de estado del fluido	26
5. Resultados y Conclusiones.	38
Referencias y bibliografía	40

Índice de figuras

3.1. Recorrido del espacio-tiempo cinco dimensional en el espacio-tiempo de seis dimensiones	20
4.1. Gráfica de $b(\chi)$ con $C_1 = 0,3$ y $C_2 = 0,1$	27
4.2. Gráfica de $b(\chi)$ con $C_1 = -0,4$ y $C_2 = 0,05$	27
4.3. Gráfica de $b(\chi)$ con $C_1 = 1$ y $C_2 = 1$	28
4.4. Gráfica de $b(\chi)$ con $C_1 = 3$ y $C_2 = 4$	28
4.5. Gráfica del comportamiento de la densidad de materia en toda la quinta dimensión tomando $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=100$	30
4.6. Gráfica del comportamiento de la densidad de materia en toda la quinta dimensión tomando $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=500$	31
4.7. Gráfica del comportamiento de la densidad de materia en toda la quinta dimensión tomando $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=1000$	32
4.8. Gráfica del comportamiento de la presión en toda la quinta dimensión tomando $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=100$. . .	33
4.9. Gráfica del comportamiento de la presión en toda la quinta dimensión tomando $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=500$. . .	34
4.10. Gráfica del comportamiento de la presión en toda la quinta dimensión tomando $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=1000$. . .	35
4.11. Gráfica de ω con $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=100$	36

4.12. Gráfica de ω con $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=500$	36
4.13. Gráfica de ω con $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=1000$	37

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS
DEL IPN
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

•

PABLO ARTURO RODRÍGUEZ GUTIÉRREZ

Departamento de Física
CINVESTAV
Distrito Federal, México

Asesor:
Dr. Tonatiuh Matos Chassin

Tesis que para obtener el título
de Maestro en Ciencias

Febrero 2006

Capítulo 1

Introducción

Antes de que Einstein formulara la teoría especial de la relatividad, los conceptos de espacio y tiempo se tomaban de forma separada y se creía que vivíamos en un universo tridimensional, el concepto como una variable universal independiente de las coordenadas espaciales, por lo que para medir un evento en dos marcos de referencia se hacía uso de las transformaciones de Galileo; con la formulación de la relatividad especial los conceptos de espacio y tiempo se unificaron, apareciendo el concepto de espacio–tiempo, así el tiempo dejó de ser absoluto convirtiéndose en una dimensión del espacio–tiempo de cuatro dimensiones en el que vivimos, lo que no cambió con la llegada de la relatividad especial ésta en el hecho de que la geometría del espacio–tiempo es única, vivimos en un universo plano y la materia no tiene influencia en la forma del espacio–tiempo (\mathbb{R}^4).

En relatividad especial, los efectos gravitacionales no fueron considerados, con la formulación de la relatividad general los efectos gravitacionales sobre los cuerpos fueron considerados, nuestra concepción de espacio–tiempo volvió a cambiar de forma radical, en ésta teoría la materia que contiene el universo incide de forma directa con la geometría del espacio–tiempo, la materia curva el espacio provocando que el espacio–tiempo difiera de la forma plana (\mathbb{R}^4)¹, dando lugar a geometrías generales llamadas variedades \mathbb{M}^4 .

¹La geometría plana (\mathbb{R}^4) también es una variedad

La geometría del espacio–tiempo es descrita por su métrica, en el caso de la relatividad general la métrica del espacio–tiempo es plana, en el caso de la relatividad general la métrica del espacio–tiempo es curvada.

Otro de los cambios notables que origino la relatividad general fue predecir un universo con una expansión acelerada², desechando la idea de un universo estático.

Conforme la ciencia avanza, conceptos que parecían inalterables han evolucionado e ideas que en un principio pudieran parecer de ciencia ficción (vivir en cuatro dimensiones y espacios curvados) han tenido gran éxito con las observaciones, sin olvidar la aparición de la mecánica cuántica y sus consecuencias, debemos de explorar nuevas ideas, una de estas novedosas ideas fue el hecho de pensar en que vivimos en un espacio–tiempo de n dimensiones ($n > 4$), éste tipo de trabajos comenzaron con el modelo de Kaluza–Klein, pero las dimensiones extras no fueron detectadas por los experimentos, años más tarde Randall y Sundrum retomaron ésta idea, colocando el universo en que vivimos en un espacio–tiempo de cuatro dimensiones (3–brana) y dejando las dimensiones extras sin los campos del modelo estándar, el único campo que podía contener las dimensiones extras era el gravitacional, de allí en adelante diversos autores han explorado estas ideas encontrando resultados los cuales concuerdan con las observaciones³, además se ha predicho un tipo de materia la cual posee presión negativa.

En este trabajo se presenta un modelo de juguete, en el cual el espacio–tiempo contiene dimensiones extras, tomando el concepto de homogeneidad e isotropía del universo para un fluido perfecto el cual esta contenido en todo el

²Lo cual fue confirmado por Hubble's en 1929 observando el corrimiento al rojo de las galaxias.

³Estos modelos son llamados Braneworld

espacio-tiempo cinco dimensional, se propone un ansatz para la expansión del espacio-tiempo cinco dimensional.

Capítulo 2

Teoría de Branas en un espacio-tiempo 5–dimensional

En este capítulo se dará un breve resumen de la forma en que nuestra concepción del espacio–tiempo a ido cambiando a través de los años, iniciando con las ideas principales que originaron la formulación de la relatividad general, dando lugar a la hipótesis de que la materia tiene incidencia directa sobre la forma geométrica del espacio–tiempo, en la siguiente sección describiremos el caso donde el contenido de materia del universo es homogéneo e isotrópico y examinaremos cuales geometrías con la anterior suposición de homogeneidad e isotropía, en la última sección nos enfocaremos en los modelos que toman el espacio–tiempo ya no sólo de cuatro dimensiones (3 espaciales + 1 temporal), sino que incrustan el espacio–tiempo cuatro dimensional en un espacio–tiempo con $(4 + n)$ –dimensiones, siendo n las dimensiones extras de la teoría, estos modelos son llamados Braneworld y mencionaremos algunos para los cuales la componente dominante de la densidad de energía tiene presión negativa.

2.1. Relatividad General

A priori para la relatividad especial, las nociones pre–relativistas del espacio y tiempo impugnan (entre cualquier otra cosa) la formulación de las leyes de la

física. Cuando estas nociones fueron derribadas, la tarea restante fue modificar y reformular las leyes de la física para que fueran consistentes con la estructura del espacio-tiempo dada por la teoría de la relatividad especial. La teoría de Maxwell ya era consistente con la relatividad especial. Realmente, esta incompatibilidad con las nociones pre-relativistas de la estructura del espacio-tiempo de no ser por la idea del marco de referencia preferencial, fueron introducidas directamente por el descubrimiento de la relatividad especial. La teoría de Newton de la gravitación no es consistente con la relatividad especial dado que ésta contiene nociones de influencia instantánea de un cuerpo sobre otro, pero de esto se puede considerar que se puede simplemente modificar lo anterior para ser capaz de estar dentro del marco de trabajo de la relatividad especial.

Sin embargo, dos ideas claves motivadas por Einstein no siguen este camino pero tratan de buscar una nueva teoría completa del espacio-tiempo y gravitación; una teoría que revolucione nuestras nociones de espacio y tiempo tanto como la relatividad especial ya lo había hecho.

La primera idea es que todos los cuerpos están influenciados por la gravedad y todos ellos caen de la misma forma en un campo gravitacional. Este hecho es conocido como *el principio de equivalencia*, el cual está expresado en la teoría Newtoniana de la gravitación por la exposición de que la fuerza gravitacional sobre un cuerpo es proporcional a su masa inercial. Ya que de lo anterior el movimiento es independiente de la naturaleza de los cuerpos, la trayectoria de los cuerpos en caída libre define un conjunto preferente de curvas en el espacio-tiempo justo como en relatividad especial los caminos en el espacio-tiempo de cuerpos inerciales definen un conjunto preferente de curvas, independiente de la naturaleza de los cuerpos. Esto sugiere la posibilidad de adjudicar propiedades del campo gravitacional al mismo espacio-tiempo. La trayectoria de cuerpos inerciales en relatividad especial son geodésicas de la métrica del espacio-tiempo. Quizás entonces las trayectorias de los cuerpos en caída libre son siempre geodésicas, pero la métrica del espacio-tiempo no siempre viene dada por la relatividad especial.

CAPÍTULO 2. TEORÍA DE BRANAS EN UN ESPACIO-TIEMPO 5-DIMENSIONAL 6

Así pensemos que un campo gravitacional no es un campo nuevo, sino que corresponde a una desviación de la geometría del espacio-tiempo de la geometría plana de la relatividad especial.

Para ver la relevancia del principio de equivalencia, desarrollemos un punto de vista sobre la gravitación; consideremos cómo medimos el campo electromagnético en relatividad especial. El primer paso es adecuar “observadores de fondo”, los cuales no deben de estar sujetos a fuerzas electromagnéticas (es decir, sean eléctricamente neutros, sin momento dipolar magnético, etc) o a cualquier otra fuerza. Estos observadores son llamados inerciales y satisfacen la ecuación de movimiento de una geodésica. El siguiente paso es colocar un cuerpo de prueba cargado. La línea de mundo de estos cuerpos satisfacen la ecuación de movimiento de un partícula de carga q moviéndose en un campo electromagnético $F_{\mu\nu}$; observando la desviación del movimiento inercial (para suficientes cuerpos de prueba) podemos determinar $F_{\mu\nu}[1]$.

Si aplicamos este procedimiento a la gravitación, inmediatamente nos topamos con una serie de problemas: por el principio de equivalencia no tenemos forma de “aislar” un observador o un cuerpo de la fuerza gravitacional, así no tenemos un procedimiento físico simple y directo de construir observadores inerciales en el sentido usado por el electromagnetismo. Cualquier observador se moverá exactamente de la misma forma; no tenemos un “movimiento de fondo” natural para comparar con el cuerpo de prueba; no tenemos una forma simple y directa de medir un campo de fuerzas gravitacional. Entonces, el principio de equivalencia puede ser visto como una peculiaridad de la ley de la fuerza gravitacional, justo como es vista en el tratamiento estudiado en el formalismo Newtoniano.

En el marco de trabajo de la relatividad general hay que considerar la posibilidad opuesta: que en principio no podemos (aún con complicados procedimientos) construir observadores inerciales en el sentido usado por la relatividad especial y medir la fuerza gravitacional. Esto es establecido por la siguiente hipótesis: *La*

métrica del espacio-tiempo no es plana, como se asume en relatividad especial. Las líneas de mundo de los cuerpos en caída libre dentro de un campo gravitacional son simplemente las geodésicas de la métrica (curvada) del espacio-tiempo. Con esto no tiene sentido describir la gravedad como un campo de fuerzas, sino más bien como un aspecto de la estructura del espacio-tiempo. Aunque la fuerza gravitacional absoluta no tiene sentido, la fuerza gravitacional relativa entre dos puntos cercanos aún tiene significado y puede ser medida observando la aceleración relativa de dos cuerpos en caída libre. Esta aceleración relativa está directamente relacionada con la curvatura del espacio-tiempo.

El segundo conjunto de ideas (mucho menos precisas), que motivaron la formulación de la relatividad general, yacen bajo el nombre de *principio Mach's*. Tanto en la relatividad especial como en las nociones pre-relativistas del espacio-tiempo, la estructura del espacio-tiempo es dada de una sola vez y no es afectada por los cuerpos materiales que pueden estar presentes. En particular “movimientos inerciales” y “sin rotación” no son influenciados por materia en el universo. Mach, además de un número de filósofos y estudiantes (en particular Riemann) encontró que esta idea no era satisfactoria. Mejor dicho, Mach percibió que toda la materia en el universo puede contribuir al movimiento “sin aceleración” y “sin rotación”; que en un universo desprovisto de materia no hay un significado de estos conceptos. Einstein aceptó esta idea y fue fuertemente motivado a buscar un teoría donde, a diferencia de la relatividad especial, la estructura del espacio-tiempo es influenciada por la presencia de materia.

La nueva teoría del espacio-tiempo y gravitación (relatividad general) propuesta por Einstein establece lo siguiente: “*Las propiedades intrínsecas, independientes del observador, del espacio-tiempo son descritas por un métrica espacio-temporal como en relatividad especial*”. Sin embargo, la métrica del espacio-tiempo no necesariamente tiene la forma plana que esta tiene en relatividad especial. La curvatura, es decir la desviación de la métrica del espacio-tiempo de su forma plana, es responsable de los efectos físicos usualmente adjudicados al

campo gravitacional. Además la curvatura del espacio-tiempo está relacionada con el tensor de energía-momento de la materia contenida en el espacio-tiempo vía una ecuación postulada por el propio Einstein. De esta manera, la estructura del espacio-tiempo (contenida en la métrica del espacio-tiempo) está relacionada con el contenido de materia del espacio-tiempo en acuerdo con algunas (pero no todas) de las ideas de Mach.

La estructura de la relatividad general permite que la métrica Lorentziana, $g_{\mu\nu}$, del espacio-tiempo sea curvada. Esto asegura que el espacio-tiempo puede ser curvado en todas las situaciones donde, físicamente, un campo gravitacional esté presente. Dado que se permiten geometrías curvadas, es mucho más natural permitir espacio-tiempos que tengan una estructura de variedad \mathbb{M}^4 y no solo \mathbb{R}^4 .

La característica final de la relatividad general son las ecuaciones de Einstein, las cuales relacionan la geometría del espacio-tiempo con la distribución de materia.

El contenido entero de la relatividad general puede resumirse como sigue:

- **El espacio-tiempo es una variedad \mathbb{M}^4 sobre la cual hay definida una métrica Lorentziana $g_{\mu\nu}$ curvada. La curvatura de $g_{\mu\nu}$ se relaciona con la distribución de materia en el espacio-tiempo por las ecuaciones de Einstein.**[2]

Las leyes de la física en relatividad general son gobernadas por dos principios básicos

- *El principio de covarianza general*, el cual establece que la métrica, $g_{\mu\nu}$ y cantidades derivables de ésta son sólo las cantidades espacio-temporales que pueden aparecer en las ecuaciones físicas.
- Se requiere que las ecuaciones puedan reducirse a las ecuaciones que satisfacen la relatividad especial cuando $g_{\mu\nu}$ sea plana.

Dado que la estructura básica de la relatividad general con respecto a la relatividad especial solo se modifica en permitir variedades diferente de \mathbb{R}^4 y en el hecho que la métrica no es plana, podemos continuar representando cantidades físicas por el mismo tipo de campos tensoriales como en relatividad especial. El movimiento de las partículas continua siendo representado por curvas *timelike*; fluidos perfectos aún son descritos en términos de su densidad de materia ρ y su presión p . Hasta el momento, las predicciones de la relatividad general tienen una muy buena concordancia con los experimentos y las observaciones.

2.2. Universo Homogéneo e Isotrópico

Desde el tiempo de Copérnico se asumió de manera general que nosotros no ocupamos una posición privilegiada dentro de nuestro universo. Si estuviéramos localizados en una región diferente de nuestro universo, las características básicas de nuestros alrededores serían las mismas. De forma similar, es natural asumir que nuestro universo es isotrópico, esto es, no hay una dirección preferencial en el espacio; las observaciones a escalas suficientemente grandes reproducen resultados los cuales no dependen de la dirección en que miremos. Estos prejuicios filosóficos de homogeneidad e isotropía han recibido fuertes confirmaciones de observaciones modernas. Mientras las observaciones de la distribución de galaxias en nuestro universo muestran clusters de galaxias sobre un amplio rango de distancias y recientes observaciones permiten ver grandes regiones desprovistas de galaxias (a una escala más grande la distribución de las galaxias parece ser homogénea e isotrópica). Considerando las fuentes de radio y la isotropía de la radiación de fondo de rayos X y rayos γ se confirma la hipótesis de la homogeneidad e isotropía del universo a grandes escalas. Hasta las observaciones más fuertes sobre la evidencia de la homogeneidad e isotropía de nuestro universo vienen del descubrimiento de la radiación térmica de alrededor de $3K$ la cual permea nuestro universo. La radiación térmica a sido medida, siendo isotrópica con una precisión muy alta (se creó que el origen de esta radiación es cosmológico), siendo muy difícil explicar su existencia y su isotropía si la hipótesis de homogeneidad

e isotropía de nuestro universo no fuera válida a una escala de distancias grandes.

El requerimiento de homogeneidad e isotropía implica la necesidad de una *curvatura constante* ($K = \text{constante}$) en el espacio-tiempo. Los espacios cuya curvatura entre cualquier par de puntos q y p es constante y positiva son las 3-esferas[3], definidas como las superficies en cuatro dimensiones del espacio euclidiano plano \mathbb{R}^4 cuyas coordenadas cartesianas satisfacen

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2, \quad (2.1)$$

donde la métrica de la 3-esfera unitaria es en coordenadas esféricas

$$ds^2 = d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.2)$$

El valor de $K = 0$ es tomado por el espacio plano tridimensional ordinario. En coordenadas cartesianas, la métrica es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.3)$$

todos los valores constantes y negativos de la curvatura son englobados por un hiperboloide tridimensional, definido como superficie en un espacio-tiempo de Minkowski de cuatro dimensiones, cuyas coordenadas inerciales globales satisfacen

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = R^2, \quad (2.4)$$

donde la métrica del hiperboloide unitario es en coordenadas hiperbólicas

$$ds^2 = d\psi^2 + \sinh^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.5)$$

En física pre-relativista, además de la relatividad especial, se asume el espacio con una estructura plana con valor $K = 0$; pero aún bajo la restrictiva suposición de homogeneidad e isotropía, la estructura de la relatividad general admite otras

dos posibilidades distintas. La posibilidad de una 3-esfera en la geometría espacial es particularmente interesante, siendo ésta una variedad compacta^[3]¹ quien describe un universo, el cual es finito pero que no tiene fronteras, tal universo es llamado *cerrado*², mientras los universos con secciones espaciales no compactas, tales como la geometría plana e hiperbólica, son llamados *abierto*³.

Eligiendo coordenadas convenientes según sean las geometrías espaciales de nuestro espacio-tiempo (esféricas, cartesianas, hiperbólicas), la métrica del espacio-tiempo toma la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(d\psi^2 + \sin^2 \psi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)), \quad (2.6)$$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.7)$$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(d\psi^2 + \sinh^2 \psi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)), \quad (2.8)$$

donde las tres posibilidades corresponden a las tres posibles geometrías espaciales.

La forma de la métrica, ecuación (2.6) es llamada métrica de *Friedman–Robertson–Walker–Lemaitre* (considerando todo en unidades de $c = 1$). Así, nuestra suposición de homogeneidad e isotropía sólo será determinada en la métrica del espacio-tiempo hasta las tres posibilidades de la geometría espacial.

2.3. Espacio-tiempo con dimensiones extras

Históricamente, investigaciones sobre la posibilidad de dimensiones extra comenzaron con teorías tipo Kaluza–Klein[4] y fueron revividas con la llegada de la física

¹Considerando un conjunto X y todas las posibles cubiertas de X . El conjunto X es compacto si, para cualquier cubierta abierta $\{U_i | i \in I\}$, existe un subconjunto finito J de I tal que $\{U_j | j \in J\}$ es también una cubierta de X

²Universo que se expande hasta un cierto límite, contrayéndose sobre si mismo

³Universo que se expande sin límites, el universo plano es el caso límite entre el “cerrado” ($K > 0$) y el “abierto” ($K < 0$)

teórica de las altas energías, tales como las teorías de cuerdas y supercuerdas, donde la existencia de una dimensión adicional parece necesaria, sin embargo, esta dimensión extra no fue detectada en los experimentos y fue restringida a ser muy pequeña.

Recientemente ha habido una gran cantidad de actividades sobre la posibilidad de que vivamos en un mundo tridimensional incrustado en un espacio de altas dimensiones[5]. Modificando la imagen de Kaluza–Klein, donde la dimensión extra es suficientemente compacta, estos recientes desarrollos se basaron en la idea de que los campos de materia ordinaria están confinados en un mundo tridimensional, el cual aparentemente corresponde a nuestro universo, mientras la gravedad yace en un espacio de altas dimensiones. La restricción impuesta por el modelo de Kaluza–Klein puede por lo tanto ser relajada y la dimensión extra puede ser suficientemente grande.

Usando la misma idea de las dimensiones extra, Randall y Sundrum propusieron un nuevo mecanismo para resolver el problema de la jerarquización de masas, usando una sola dimensión extra y colocando dos 3-branas en ella (una de las cuales contiene los campos del modelo estándar)[6]. Además, usando una teoría efectiva cuatro dimensional dentro de cinco dimensiones no compactas propusieron una explicación alternativa para la compactificación del modelo de Kaluza–Klein y colocando una 3-brana en un espacio de altas dimensiones mostraron que podemos vivir en $(4 + n)$ -dimensiones no compactas en perfecta compatibilidad con la gravedad experimental, siendo n el número de dimensiones extras[7]. Una de las ventajas de esta imagen fue quitar la fuerte restricción sobre el tamaño de las dimensiones extras y permitirles ser suficientemente grandes.

Una fuerte motivación para considerar tales modelos viene de las teorías de cuerdas acopladas[8,9], las cuales establecen que son teorías de once dimensiones. Allí, la materia está confinada sobre dos superficies de diez dimensiones (9-branas), las cuales se pueden ver como las fronteras del espacio-tiempo[8].

Para todas estas teorías, una consecuencia esencial e interesante es la evolución cosmológica de nuestro universo; examinando con un interés especial el caso de la inflación[10–17].

Los esfuerzos para explicar el estado de expansión acelerada de nuestro universo tienen enfocada la atención en modelos en los cuales la componente dominante de la densidad de energía cósmica tiene presión negativa, con una ecuación de estado lineal entre la densidad de materia y la presión cuya constante de proporcionalidad (ω) tiene valores $\omega \geq -1$; las observaciones son consistentes con modelos hasta el límite de constante cosmológica (Λ) $\omega = -1$ [18].

Se han desarrollado trabajos de modelos cosmológicos cuya componente dominante de la densidad de energía tiene ecuación de estado lineal y $\omega < -1$ [19], esta componente dominante se dice que es un “*phantom*”⁴.

Modelos Braneworld permiten que la dinámica de la expansión sea radicalmente diferente de la predicha por la gravedad convencional de Einstein en (3+1)-dimensiones[20], algunas de las sorpresas cosmológicas que surgen de los modelos Braneworld incluyen:

- Ambas aceleraciones (la de los primeros tiempos y la de tiempos posteriores) pueden ser unificadas dentro de un solo esquema (Inflación–Quintaescencia)[21–28]. En este modelo el mismo campo escalar, el cual dirige la inflación en los primeros tiempos, se convierte en quintaescencia para tiempos posteriores. La noción de inflación–quintaescencia fue primeramente explorada en el contexto de la gravedad de Einstein (3+1)-dimensional por Peebles y Vilenkin[21]. La posibilidad de que los modelos puedan proveer una realización más eficiente de este escenario fue sugerida por Copeland, Liddle y Lidsey[22], y posteriormente discutida con más detalle por varios

⁴Un phantom es alguna cosa perceptible a la vista en un cierto sentido, pero que no tiene existencia corporea

autores[23–27].

- La ecuación (efectiva) de estado de energía oscura ($p = \omega\rho$) en escenarios Braneworld puede ser “tipo phantom” ($\omega < -1$) o “tipo quintaescencia” ($\omega > -1$). Estas dos posibilidades se relacionan con las dos maneras distintas en el cual la brana puede ser incrustada en el bulto (con tensión positiva o negativa). Los Braneworlds que tienen comportamiento “tipo phantom”, no tienen los problemas convencionales de la “materia-phantom”: no violan la condición de energía débil y no se aproximan a una singularidad en un futuro[18].
- La aceleración del universo puede ser un “fenómeno transitorio”[29]. Recientes investigaciones indican que un universo eternamente acelerado el cual posee un horizonte de eventos cosmológico, impide la construcción de una matriz S convencional, la cual describe interacciones entre partículas dentro de la estructura de la teoría de cuerdas o la teoría M [31]. Los modelos Braneworld pueden entrar dentro de un régimen de una expansión acelerada para tiempos posteriores, aún si la tensión en la brana y la constante cosmológica del bulto se ajustan para satisfacer la construcción de Randall–Sundrum sobre la brana. Modelos Braneworld durante la presente época de aceleración pueden regresar a una época dominada por materia para tiempos posteriores, en [32] este tipo de modelos son llamados “**Disappearing Dark Energy**” (DDE).
- Una clase de modelos Braneworld se enfrentan con una “futura singularidad” para la cual $\dot{a} \rightarrow \text{constante}$, pero $\ddot{a} \rightarrow \infty$. La sorprendente característica de esta singularidad es que mientras el parámetro de Hubble, la densidad de materia y la presión permanecen finitas, el parámetro de desaceleración y todos los invariantes de la curvatura divergen cuando se aproxima la singularidad.
- Un modelo Braneworld espacialmente plano puede mimetizar un universo cerrado para corrimientos al rojo grandes.

- Un Braneworld incrustado en un espacio cinco dimensional, en el cual la dimensión extra (bulto) es *timelike*, puede “brincar” los primeros tiempos[30], de tal modo se evita la singularidad llamada “Big Bang”.

Capítulo 3

Solución a las Ecuaciones de Einstein

En este capítulo describiremos la parte geométrica de nuestro modelo de juguete, comenzando (en la primera sección) por explicar la forma de la métrica que describe nuestro espacio–tiempo con una dimensión extra, en la siguiente sección se resolverá la parte geométrica de las ecuaciones de Einstein¹, en la última sección se propondrá el ansatz $K(t)$, el cual describe la manera en la cual el espacio–tiempo de cinco dimensional cambia su tamaño.

3.1. El Tensor Métrico

Tomemos un espacio cinco dimensional descrito por las coordenadas cartesianas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ cuya geometría es descrita por la métrica

$$ds_{\mathbb{R}^5}^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2, \quad (3.1)$$

consideremos S^4 descrita por las coordenadas esféricas $(\sigma, \theta, \phi, \chi)$ de radio K constante, la cual se encuentra dentro de este espacio cartesiano, la transformación de coordenadas que lleva de \mathbb{R}^5 a la hipersuperficie S^4 es

¹Usando la métrica de la primera sección

$$x_1 = K \sin \sigma \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \quad (3.2)$$

$$x_2 = K \sin \sigma \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \quad (3.3)$$

$$x_3 = K \sin \sigma \sin \chi \cos \theta, \quad (3.4)$$

$$x_4 = K \sin \sigma \cos \chi, \quad (3.5)$$

$$x_5 = K \cos \sigma, \quad (3.6)$$

con esta transformación de coordenadas la métrica de S^4 es

$$ds_{S^4}^2 = K^2 d\sigma^2 + K^2 \sin^2 \sigma d\chi^2 + K^2 \sin^2 \sigma \sin^2 \chi d\theta^2 + K^2 \sin^2 \sigma \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.7)$$

Por lo que, la métrica que describe el espacio-tiempo definido por $S^4 \times \mathbb{R}$ es

$$ds_{S^4 \times \mathbb{R}}^2 = K^2 d\sigma^2 + K^2 \sin^2 \sigma d\chi^2 + K^2 \sin^2 \sigma \sin^2 \chi d\theta^2 + K^2 \sin^2 \sigma \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\phi^2 - dt^2, \quad (3.8)$$

realizando la transformación $a = \sin \sigma$, la métrica (3.8) adquiere la forma

$$ds_{S^4 \times \mathbb{R}}^2 = -dt^2 + \frac{K^2}{1-a^2} da^2 + K^2 a^2 \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + K^2 a^2 d\chi^2, \quad (3.9)$$

la cual describe el espacio-tiempo esférico convencional² descrito por las coordenadas (a, θ, ϕ, t) inmerso en un espacio-tiempo esférico cinco dimensional. Con esta métrica podemos formular una teoría de dimensiones extras, donde χ representa nuestra quinta dimensión la cual toma valores en el rango $0 \leq \chi \leq 2\pi$.

Si, en lugar de tomar el espacio-tiempo de cuatro dimensiones inmerso en un espacio-tiempo cinco dimensional, lo colocamos dentro de un espacio con una dimensión extra, cuya geometría esté descrita por una función que dependa únicamente de esta dimensión extra y además consideramos que el radio K es

²Llamado en la literatura Modelo Cosmológico de Robertson-Walker

constante en el espacio pero no en el tiempo, esto es $K = K(t)$, la métrica que describe este espacio–tiempo vendrá dada como

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{K(t)^2}{1-a^2} da^2 + K(t)^2 a^2 b(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + K(t)^2 a^2 d\chi^2, \quad (3.10)$$

así el espacio–tiempo de cuatro dimensiones será descrito por las coordenadas (a, θ, ϕ, t) , siendo χ nuestra dimensión extra y $b(\chi)$ dictara la forma del espacio cinco dimensional.

Con esto las componentes del tensor métrico son

$$\mathbf{g}_{\mathbf{AB}} = \begin{bmatrix} \frac{K(t)^2}{1-a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K(t)^2 b(\chi) a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K(t)^2 b(\chi) a^2 \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K(t)^2 a^2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

3.2. El Tensor de Einstein

La dinámica de la geometría del espacio–tiempo cinco dimensional es gobernada por las ecuaciones de Einstein³

$$G_{AB} + \Lambda g_{AB} = \kappa_0 T_{AB}, \quad (3.12)$$

Usando las componentes del tensor métrico, las componentes no nulas del tensor de Einstein son⁴

$$G_a^a = \frac{-3a^2 b^2 - 3a^2 b^2 K_t^2 - 3K a^2 b^2 K_{t,t} - 1 + 3b^2 + b_\chi^2 + 2bb_{\chi,\chi}}{K^2 b^2 a^2}, \quad (3.13)$$

$$G_\theta^\theta = \frac{-3a^2 b - 3a^2 b K_t^2 + b - 3K a^2 b K_{t,t} + b_{\chi,\chi}}{ba^2 K^2}, \quad (3.14)$$

³Utilizaremos letras latinas mayúsculas para denotar las cinco componentes del espacio–tiempo

⁴El subíndice en la función denota derivada con respecto a esta variable.

$$G_\phi^\phi = \frac{-3a^2b - 3a^2bK_t^2 + b - 3Ka^2bK_{t,t} + b_{\chi,\chi}}{ba^2K^2}, \quad (3.15)$$

$$G_t^t = \frac{-6a^2b^2 - 6a^2b^2K_t^2 - 1 + 3b^2 + b_\chi^2 + 2bb_{\chi,\chi}}{a^2b^2K^2}, \quad (3.16)$$

$$G_5^5 = \frac{-3a^2b^2 - 3a^2b^2K_t^2 + b^2 - 3Ka^2b^2K_{t,t} - 1 + b_\chi^2}{a^2b^2K^2}, \quad (3.17)$$

sustituyendo las componentes de G_B^A en (3.12) obtenemos las ecuaciones que nos dan la descripción geométrica de la teoría, definiendo $h_A^A = G_A^A + \Lambda g_A^A$

$$h_a^a = \frac{-3a^2b^2 - 3a^2b^2K_t^2 - 3Ka^2b^2K_{t,t} - 1 + 3b^2 + b_\chi^2 + 2bb_{\chi,\chi} + \Lambda K^2 a^2 b^2}{K^2 b^2 a^2} \quad (3.18)$$

$$h_\theta^\theta = \frac{-3a^2b - 3a^2bK_t^2 + b - 3Ka^2bK_{t,t} + b_{\chi,\chi} + \Lambda a^2 b K^2}{ba^2K^2} \quad (3.19)$$

$$h_\phi^\phi = \frac{-3a^2b - 3a^2bK_t^2 + b - 3Ka^2bK_{t,t} + b_{\chi,\chi} + \Lambda a^2 b K^2}{ba^2K^2} \quad (3.20)$$

$$h_t^t = \frac{-6a^2b^2 - 6a^2b^2K_t^2 - 1 + 3b^2 + b_\chi^2 + 2bb_{\chi,\chi} + \Lambda a^2 b^2 K^2}{a^2 b^2 K^2} \quad (3.21)$$

$$h_5^5 = \frac{-3a^2b^2 - 3a^2b^2K_t^2 + b^2 - 3Ka^2b^2K_{t,t} - 1 + b_\chi^2 + \Lambda a^2 b^2 K^2}{a^2 b^2 K^2} \quad (3.22)$$

3.3. El Ansatz $K(t) = \sqrt{R^2 - (R - t)^2}$

En este punto consideraremos que nuestro espacio-tiempo cuatro dimensional se encuentra en expansión.

Modelaremos esto de la siguiente manera:

Consideremos el espacio-tiempo cinco dimensional dentro de un espacio-tiempo seis dimensional esférico ($S^4 \times \mathbb{R}$) de radio constante R , donde el tiempo es compartido por ambos espacios, haremos que el espacio-tiempo cinco dimensional recorra el espacio-tiempo de seis dimensiones como se muestra en la siguiente figura

de esta manera el radio K del espacio-tiempo cinco dimensional cambiará con el tiempo de la forma

$$K(t) = \sqrt{R^2 - (R - t)^2}. \quad (3.23)$$

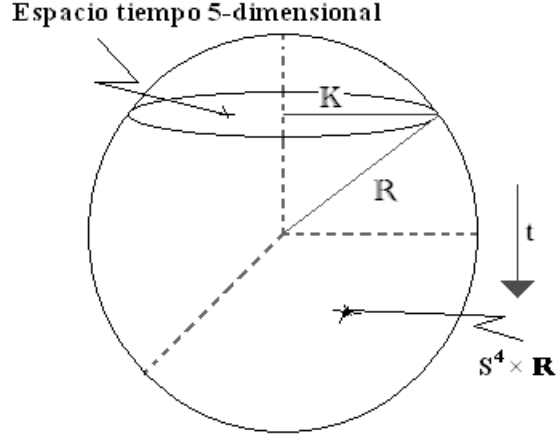


Figura 3.1: Recorrido del espacio-tiempo cinco dimensional en el espacio-tiempo de seis dimensiones

De modo que al cambiar el radio del espacio-tiempo cinco dimensional, el espacio-tiempo de cuatro dimensiones también cambiara su tamaño. Sustituyendo el ansatz dado por (3.23) en las ecuaciones (3.18) a (3.22) y realizando las operaciones indicadas, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$h_a^a = \frac{\Lambda a^2 b^2 t^2 - 2\Lambda a^2 b^2 R t - 2b b_{\chi,\chi} - b_\chi^2 - 3b^2 + 1}{t b^2 a^2 (t - 2R)}, \quad (3.24)$$

$$h_\theta^\theta = \frac{\Lambda b a^2 t^2 - 2\Lambda b a^2 R t - b_{\chi,\chi} - b}{t a^2 b (t - 2R)}, \quad (3.25)$$

$$h_\phi^\phi = \frac{\Lambda b a^2 t^2 - 2\Lambda b a^2 R t - b_{\chi,\chi} - b}{t a^2 b (t - 2R)}, \quad (3.26)$$

$$h_5^5 = \frac{\Lambda a^2 b^2 t^2 - 2\Lambda a^2 b^2 R t - b^2 - b_\chi^2 + 1}{t b^2 a^2 (t - 2R)}, \quad (3.27)$$

$$h_t^t = \frac{((t^4 - 4Rt^3 + 4R^2t^2)\Lambda + 6R)a^2b^2 + (2bb_{\chi,\chi} + b_\chi^2 + 3b^2 - 1)(2R - t)t}{a^2b^2t^2(t - 2R)}, \quad (3.28)$$

Capítulo 4

La Fuente Como un F.P. en Todo el E-T 5-Dimensional

En este capítulo toca el turno de la parte de la materia que contiene el espacio-tiempo cinco dimensional, en la primera sección se propone un fluido perfecto como la materia contenida en el espacio-tiempo cinco dimensional, se construye el tensor de materia para este fluido y se resuelve la parte faltante de las ecuaciones de Einstein; en la siguiente sección se encuentra la forma de la función $b(\chi)$ la cual describe la geometría de la dimensión extra y se obtiene una solución exacta de las ecuaciones de Einstein; en la última sección se analiza la forma de la ecuación de estado del fluido perfecto, resultando en una densidad de materia con presión negativa.

4.1. El tensor de materia

Después de describir la parte geométrica de nuestro modelo, nos enfocaremos en describir la parte faltante del modelo, es decir, describiremos las fuentes que se encuentran dentro del espacio cinco dimensional.

Tomando a la fuente en todo el espacio cinco dimensional como un *fluido perfecto*, el cual se define como una distribución continua de materia, cuyo tensor de energía-momento viene dado como

$$T_{AB} = \rho u_A u_B + p(g_{AB} + u_A u_B), \quad (4.1)$$

donde u_A es un campo vectorial unitario de tipo *timelike*.

Las funciones ρ y p son respectivamente la densidad de materia y la presión del fluido perfecto a través del espacio. Este tipo de materia es llamado un fluido perfecto debido a la ausencia de los términos de conducción de calor y de viscosidad.

Las ecuaciones de movimiento de un fluido perfecto en ausencia de fuerzas externas son simplemente

$$\nabla^A T_{AB} = 0, \quad (4.2)$$

lo cual produce

$$u^A \nabla_A \rho + (\rho + p) \nabla^A u_A = 0, \quad (4.3)$$

$$(\rho + p) u^A \nabla_A u_B + (g_{AB} + u_A u_B) \nabla^A p = 0, \quad (4.4)$$

la ecuación (4.3) es la conservación de la masa-energía y la ecuación (4.4) es la ecuación de Euler.

Para construir el tensor de energía-momento, tomemos un vector *timelike* u_A con componentes

$$u_a = 0, \quad (4.5)$$

$$u_\theta = 0, \quad (4.6)$$

$$u_t = 1, \quad (4.7)$$

$$u_\chi = 0, \quad (4.8)$$

$$u_\phi = 0, \quad (4.9)$$

con esto, el tensor de energía-momento para el fluido perfecto en el espacio-tiempo cinco dimensional es

$$\mathbf{T}_B^A = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

por lo que la ecuación de conservación que cumple el tensor de momento-energía (usando (4.3) y (4.4)) es:

$$\rho_t + \frac{4K_t}{K}(\rho + p) = 0, \quad (4.11)$$

la cual difiere de la ecuación de conservación estándar por el coeficiente del segundo término del lado izquierdo, ya que estamos considerando el fluido perfecto en todo el espacio cinco dimensional.

Sustituyendo las componentes de este tensor de energía-momento en la parte derecha de las ecuaciones de Einstein (3.12) e igualando las componentes con las de h_B^A obtenemos:

componente (a,a)

$$\frac{\Lambda a^2 b^2 t^2 - 2\Lambda a^2 b^2 R t - 2b b_{\chi,\chi} - b_\chi^2 - 3b^2 + 1}{t b^2 a^2 (t - 2R)} = \kappa_0 p, \quad (4.12)$$

componente (θ, θ)

$$\frac{\Lambda b a^2 t^2 - 2\Lambda b a^2 R t - b_{\chi,\chi} - b}{t a^2 b (t - 2R)} = \kappa_0 p, \quad (4.13)$$

componente (ϕ, ϕ)

$$\frac{\Lambda b a^2 t^2 - 2\Lambda b a^2 R t - b_{\chi,\chi} - b}{t a^2 b (t - 2R)} = \kappa_0 p, \quad (4.14)$$

componente (t,t)

$$\frac{((t^4 - 4Rt^3 + 4R^2t^2)\Lambda + 6R)a^2b^2 + (2bb_{\chi,\chi} + b_\chi^2 + 3b^2 - 1)(2R - t)t}{a^2b^2t^2(t - 2R)} = -\kappa_0\rho, \quad (4.15)$$

componente (5,5)

$$\frac{\Lambda a^2 b^2 t^2 - 2\Lambda a^2 b^2 R t - b^2 - b_\chi^2 + 1}{t b^2 a^2 (t - 2R)} = \kappa_0 p, \quad (4.16)$$

arreglando las anteriores expresiones y definiendo las siguientes funciones, para facilitar el trabajo

$$\beta_{aa} = -2bb_{\chi,\chi} - b_\chi^2 - b^2 a^2 (t - 2R)t\kappa_0 p - 3b^2 + 1 = 0, \quad (4.17)$$

$$\beta_{\theta\theta} = b_{\chi,\chi} + (1 + a^2(t - 2R)t\kappa_0 p)b = 0, \quad (4.18)$$

$$\beta_{\phi\phi} = b_{\chi,\chi} + (1 + a^2(t - 2R)t\kappa_0 p)b = 0, \quad (4.19)$$

$$\beta_{55} = b_\chi^2 - 1 + (1 + a^2(t - 2R)t\kappa_0 p)b^2 = 0, \quad (4.20)$$

$$\beta_{tt} = (\kappa_0 t a^2 (2R - t)b^2 \rho + 2bb_{\chi,\chi} + b_\chi^2 - 1)t(t - 2R) + (6a^2 R^2 - 6Rt + 3t^2)b^2 = 0, \quad (4.21)$$

nuestra próxima tarea será resolver este sistema de ecuaciones. Vemos que $\beta_{\phi\phi}$ y $\beta_{\theta\theta}$ son las mismas ecuaciones, tomando la derivada parcial de β_{55} con respecto a χ y dividiendo el resultado por $2b_\chi$ obtenemos $\beta_{\theta\theta}$, esto es

$$\frac{1}{2b_\chi} \frac{\partial \beta_{55}}{\partial \chi} = \beta_{\theta\theta},$$

por lo anterior $\beta_{\phi\phi}$, $\beta_{\theta\theta}$ y β_{55} nos proporcionan la misma información, pero β_{aa} y β_{tt} son independientes de las otras tres ecuaciones, por lo que nuestro sistema de cinco ecuaciones diferenciales se reduce a un sistema de tres ecuaciones.

$$\beta_{aa} = -2bb_{\chi,\chi} - b_\chi^2 - b^2 a^2 (t - 2R)t\kappa_0 p - 3b^2 + 1 = 0, \quad (4.22)$$

$$\beta_{\theta\theta} = b_{\chi,\chi} + (1 + a^2(t - 2R)t\kappa_0 p)b = 0, \quad (4.23)$$

$$\beta_{tt} = (\kappa_0 t a^2 (2R - t)b^2 \rho + 2bb_{\chi,\chi} + b_\chi^2 - 1)t(t - 2R) + (6a^2 R^2 - 6Rt + 3t^2)b^2 = 0, \quad (4.24)$$

4.2. Consecuencias de las soluciones de $b(\chi)$

Concentremos nuestra atención en las ecuaciones que contienen a la presión, estas son $\beta_{\theta\theta}$ y β_{aa} . Eliminando la presión de ambas ecuaciones, obtenemos la ecuación de constricción para $b(\chi)$ haciendo $-\beta_{aa} - b(\chi)\beta_{\theta\theta} = 0$

$$bb_{\chi,\chi} + b_\chi^2 + 2b^2 - 1 = 0. \quad (4.25)$$

Las soluciones de esta ecuación diferencial son¹

$$b_1(\chi) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 4C_1 \sin(2\chi) + 4C_2 \cos(2\chi)}, \quad (4.26)$$

$$b_1(\chi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2 - 4C_1 \sin(2\chi) + 4C_2 \cos(2\chi)}, \quad (4.27)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración.

Debido a la forma de la métrica que estamos utilizando (3.10), ambas soluciones para $b(\chi)$ proporcionan la misma geometría, utilizaremos $b_1(\chi)$ en el resto de este trabajo.

Encontremos la primera y segunda derivada de $b(\chi)$

$$b_\chi = -\frac{C_1 \cos(2\chi) + C_2 \sin(2\chi)}{b}, \quad (4.28)$$

$$b_{\chi,\chi} = -\frac{(C_1 \sin(2\chi) + C_2 \cos(2\chi))^2}{b^3} + \frac{2C_1 \sin(2\chi) - 2C_2 \cos(2\chi)}{b}, \quad (4.29)$$

sustituyendo (4.26), (4.28) y (4.29) en β_{aa} (o (4.26), (4.29) en $\beta_{\theta\theta}$) y despejando la presión obtenemos

$$p = \frac{4C_1^2 + 4C_2^2 - 1}{a^2 t \kappa_0 (1 - 2C_1 \sin(2\chi) + 2C_2 \cos(2\chi))^2 (t - 2R)}, \quad (4.30)$$

sustituyendo (4.26), (4.28), (4.29), (4.30) en β_{tt} y despejando la densidad se obtiene

¹Obtenidas con la ayuda del programa MAPLE 9.5

$$\rho = \frac{6a^2 R^2 \{4[(C_1 \sin 2\chi - C_2 \cos 2\chi)^2 - C_1 \sin 2\chi - C_2 \cos 2\chi] + 1\} + t(t - 2R)[1 - 4(C_1^2 + C_2^2)]}{t^2 a^2 \kappa_0 (t - 2R)^2 (1 - 2C_1 \sin(2\chi) + 2C_2 \cos(2\chi))^2}, \quad (4.31)$$

con (4.26), (4.30), (4.31) obtenemos una solución exacta de las ecuaciones de Einstein en el espacio cinco dimensional, descrito anteriormente.

A continuación analizaremos la forma de $b(\chi)$ para los posibles valores de C_1 y C_2 .

La función $b(\chi)$ será continua en toda la quinta dimensión si se cumple

$$2 - 4C_1 \sin 2\chi + 4C_2 \cos 2\chi \geq 0. \quad (4.32)$$

Esta desigualdad se cumple si C_1 y C_2 se encuentran en el siguiente rango de valores

$$-\frac{1}{2} \leq C_1 \leq 0 \quad \implies \quad -\frac{1}{2}(1 + 2C_1) \leq C_2 \leq \frac{1}{2}(1 + 2C_1), \quad (4.33)$$

$$0 < C_1 \leq \frac{1}{2} \quad \implies \quad -\frac{1}{2}(1 - 2C_1) \leq C_2 \leq \frac{1}{2}(1 - 2C_1). \quad (4.34)$$

Como se puede observar en las gráficas (4.1), (4.2), para cualquier valor de C_1 y C_2 fuera de estos intervalos, la gráfica de la función $b(\chi)$ presenta asíntotas separadas una distancia constante, como se observa en las gráficas (4.3), (4.4)

por lo que la métrica resultante es:

$$(4.35)$$

la cual cumple el requerimiento de que la métrica debe ser continua en todo el espacio-tiempo cinco dimensional.

4.3. Ecuación de estado del fluido

Al recorrer el espacio-tiempo cinco dimensional el espacio-tiempo seis dimensional, el radio del espacio-tiempo de cuatro dimensiones también cambiara su tamaño, cambiándolo de manera proporcional a K , así $a = AK(t)$

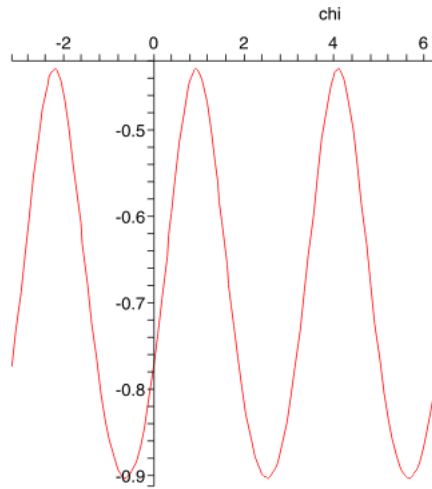


Figura 4.1: Gráfica de $b(\chi)$ con $C_1 = 0,3$ y $C_2 = 0,1$

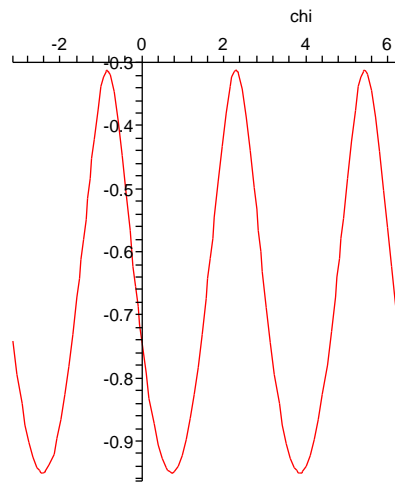


Figura 4.2: Gráfica de $b(\chi)$ con $C_1 = -0,4$ y $C_2 = 0,05$

$$a = A\sqrt{2RT - t^2} = A(2Rt)^{1/2} \left(1 - \frac{t}{2R}\right)^{1/2},$$

donde A es la constante de proporcionalidad, tomando en cuenta el termino

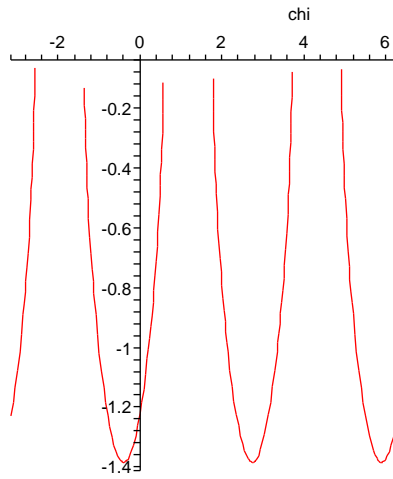


Figura 4.3: Gráfica de $b(\chi)$ con $C_1 = 1$ y $C_2 = 1$

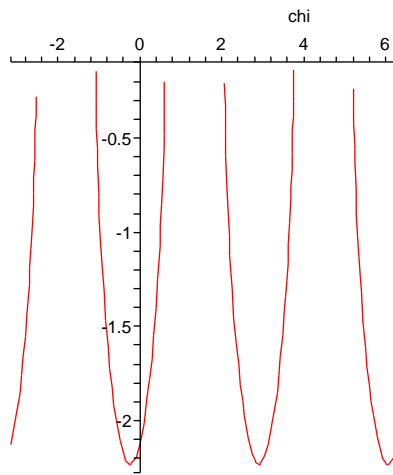


Figura 4.4: Gráfica de $b(\chi)$ con $C_1 = 3$ y $C_2 = 4$

$2R/t < 1$ podemos expandir el radical y sólo con el término dominante obtenemos

$$a = \alpha t^{1/2}, \quad (4.36)$$

donde α contiene todas las constantes.

Calculemos la primera y segunda derivada de $a(t)$:

$$a_t = \frac{1}{2}\alpha t^{-1/2}, \quad (4.37)$$

$$a_{tt} = -\frac{1}{4}\alpha t^{-3/2}, \quad (4.38)$$

de lo anterior podemos calcular el valor del parámetro de Hubble

$$H = \frac{a_t}{a} = \frac{1}{2}t^{-1}, \quad (4.39)$$

y calcularemos también el valor del parámetro de desaceleración

$$q = -\frac{a_{tt}a}{a_t^2} = 1, \quad (4.40)$$

para universos abiertos el valor del parámetro de desaceleración es $q \leq 1/2$ y para universos cerrados $q \geq 1/2$, por lo que el valor obtenido en este trabajo (ecuación (4.40)) concuerda con los resultados.

Sustituyendo la forma que obtuvimos para a en la presión y la densidad de energía (ecuaciones (4.29) y (4.30) respectivamente), se obtiene

$$p = \frac{4C_1^2 + 4C_2^2 - 1}{\alpha^2 t^2 \kappa_0 (1 - 2C_1 \sin(2\chi) + 2C_2 \cos(2\chi))^2 (t - 2R)}, \quad (4.41)$$

$$\rho = \frac{6\alpha^2 t R^2 \{4[(C_1 \sin 2\chi - C_2 \cos 2\chi)^2 - C_1 \sin 2\chi - C_2 \cos 2\chi] + 1\} + t(t - 2R)[1 - 4(C_1^2 + C_2^2)]}{\alpha^2 t^3 \kappa_0 (t - 2R)^2 (1 - 2C_1 \sin(2\chi) + 2C_2 \cos(2\chi))^2}, \quad (4.42)$$

Si tomamos la ecuación de estado más simple que obedece el fluido, es decir, una relación lineal entre ρ y p

$$p = \omega \rho, \quad (4.43)$$

despejando ω y sustituyendo los valores encontrados para p y ρ (ecuaciones (4.35), (4.36)) se obtiene

$$w = \frac{t(2R - t)(4C_2^2 + 4C_1^2 - 1)}{6\alpha^2 t R^2 \{4[(C_1 \sin 2\chi - C_2 \cos 2\chi)^2 - C_1 \sin 2\chi - C_2 \cos 2\chi] + 1\} + t(t - 2R)[1 - 4(C_1^2 + C_2^2)]} \quad (4.44)$$

Graficando el comportamiento de la densidad de materia en el tiempo para toda la quinta dimensión, observamos que la materia se localiza en regiones bien específicas del espacio cinco dimensional y no de forma continua a través de todo el espacio, como se muestra en las gráficas (4.5), (4.6) y (4.7).

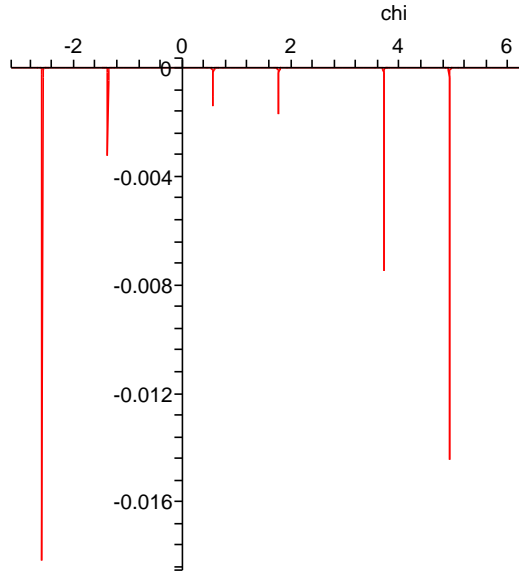


Figura 4.5: Gráfica del comportamiento de la densidad de materia en toda la quinta dimensión tomando $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=100$

Ahora graficando la evolución temporal de la presión a través de toda la quinta dimensión, encontramos que no existe presión en toda la quinta dimensión excepto en ciertos lugares del espacio, como se muestra en las gráficas (4.8), (4.9) y (4.10); al comparar las gráficas de la densidad de materia y la presión encontramos que la presión se desvanece en las regiones donde no hay materia,

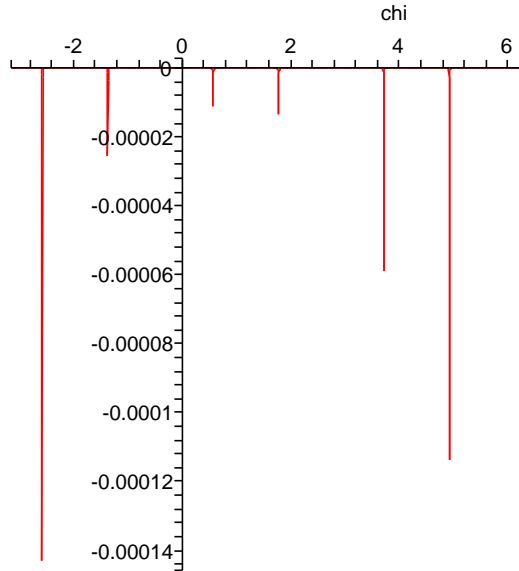


Figura 4.6: Gráfica del comportamiento de la densidad de materia en toda la quinta dimensión tomando $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=500$

mientras que en las regiones del espacio cinco dimensional donde se concentra la materia la presión es distinta de cero.

Este modelo de juguete mimetiza los modelos Braneworld en los cuales la materia es colocada dentro de un 3-branas y estas a su vez son colocadas en un espacio de $(4+n)$ -dimensiones, en donde sólo el campo gravitacional se encuentra en las dimensiones extras.

La diferencia entre este y los modelos Braneworld recae en el hecho de que la materia no fue colocada a mano dentro de 3-branas, sino que se colocó en todo el espacio-tiempo cinco dimensional y al proponer el ansatz $K(t)$ la materia se concentró debido a los efectos gravitacionales en regiones específicas del espacio cinco dimensional, creando de forma natural el efecto de las 3-branas.

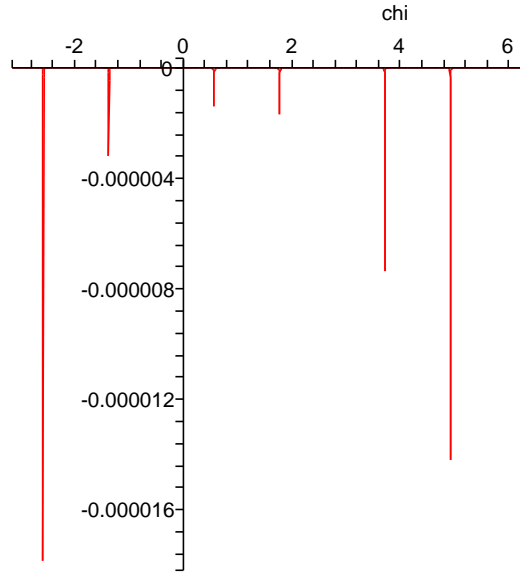


Figura 4.7: Gráfica del comportamiento de la densidad de materia en toda la quinta dimensión tomando $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=1000$

Graficando el comportamiento de ω conforme el tiempo avanza, se observa que éste va tendiendo a -1, como se puede observar en las gráficas (4.11), (4.12) y (4.13), por lo que ω se vuelve constante y la ecuación de estado del fluido será

$$p \approx -\rho. \quad (4.45)$$

El modelo propuesto en este trabajo predice materia que se encuentra en el límite de los modelos de Quintaesencia $\omega > -1$ y modelos phantom $\omega < -1$.

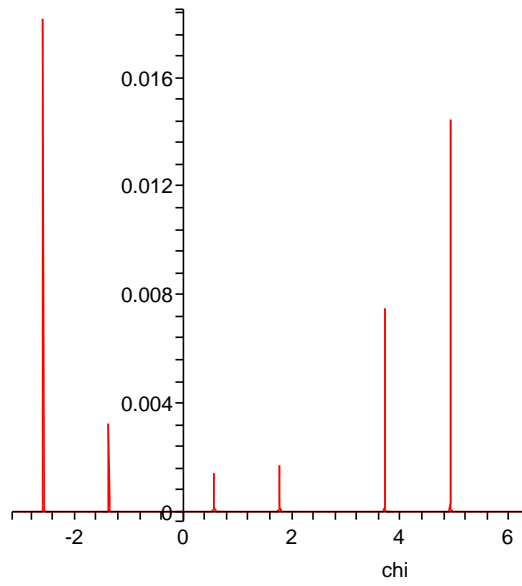


Figura 4.8: Gráfica del comportamiento de la presión en toda la quinta dimensión tomando $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=100$

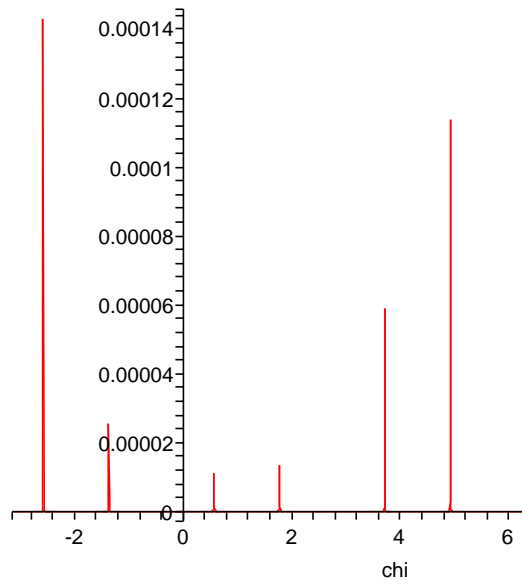


Figura 4.9: Gráfica del comportamiento de la presión en toda la quinta dimensión tomando $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=500$

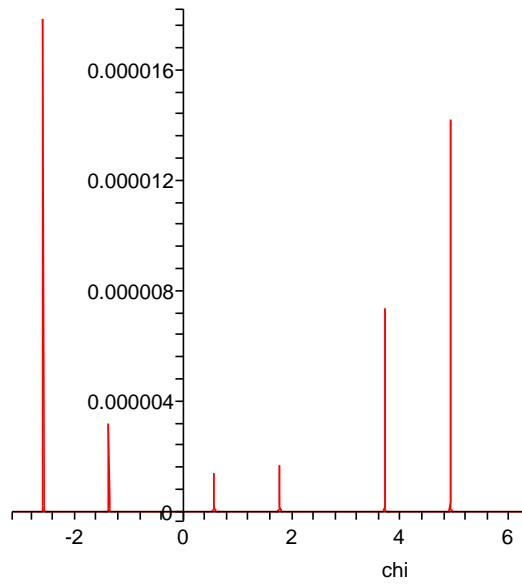


Figura 4.10: Gráfica del comportamiento de la presión en toda la quinta dimensión tomando $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=1000$

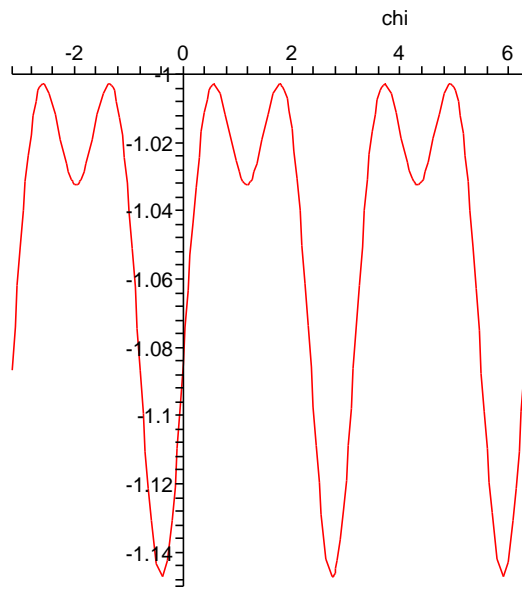


Figura 4.11: Gráfica de ω con $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=100$

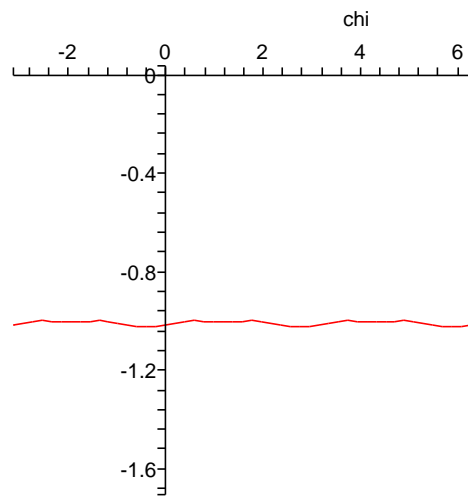


Figura 4.12: Gráfica de ω con $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=500$

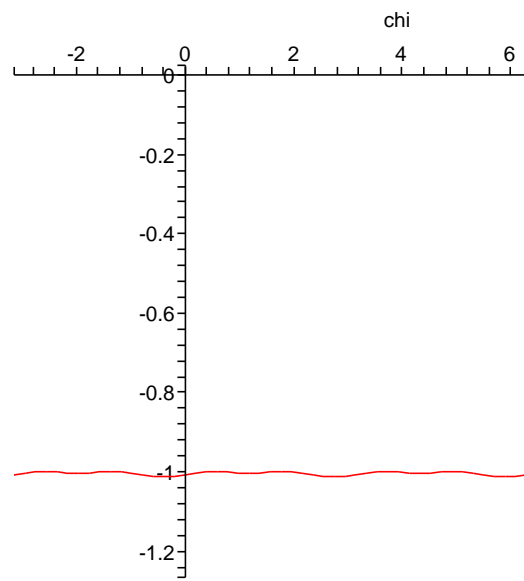


Figura 4.13: Gráfica de ω con $C_1 = C_2 = R = \alpha = 1$ a un tiempo $t=1000$

Capítulo 5

Resultados y Conclusiones.

En general, los trabajos sobre los modelos Braneworld inician proponiendo la geometría del espacio-tiempo con dimensiones extras y colocando varios tipos de materia en una 3-brana incrustada en el espacio-tiempo de altas dimensiones, encontrando la forma en la que se expande el espacio-tiempo de cuatro dimensiones.

En ésta tesis se trabajo una forma alternativa, se propuso la geometría del espacio-tiempo de cinco dimensiones y se colocó un sólo tipo de materia (fluido perfecto) en todo el espacio-tiempo cinco dimensional y se propuso la forma en la que el espacio-tiempo cinco dimensional se expandiera, encontrando que a través de la expansión del espacio-tiempo cinco dimensional la materia se concentra en sólo regiones específicas del espacio-tiempo, formando regiones de cuatro dimensiones, se encontró que el valor del parámetro de desaceleración y el parámetro de Hubble concuerdan con los rangos para un universo cerrado ($q > 1/2$), además dado que el universo se encuentra en expansión $\dot{a} > 0$ y $\ddot{a} < 0$, lo que concuerda con los resultados obtenidos en éste trabajo

$$a_t = \frac{1}{2}\alpha t^{-1/2}, \quad (5.1)$$

$$a_{tt} = -\frac{1}{4}\alpha t^{-3/2}, \quad (5.2)$$

$$H = \frac{a_t}{a} = \frac{1}{2}t^{-1}, \quad (5.3)$$

$$q = -\frac{a_{tt}a}{a_t^2} = 1. \quad (5.4)$$

Se encontró la ecuación de estado para el fluido perfecto, dando como resultado una densidad de energía con presión negativa

$$p \approx -\rho, \quad (5.5)$$

resultando que la constante de proporcionalidad tiende al valor de -1 ($\omega \approx -1$), cuando el espacio-tiempo se encuentra en expansión, lo que concuerda con los modelos en los cuales la componente dominante de la densidad de energía tiene presión negativa y su ecuación de estado se encuentra en el rango $\omega \geq -1$.

Bibliografía

- [1] J. D. JACKSON. *Classical Electrodynamics*. 3ra Edición. John Wiley e Hijos, (1999).
- [2] R. M. WALD. *General Relativity*. 1ra Edición. The University of Chicago Press, (1984).
- [3] M. NAKAHARA *Geometry, Topology and Physics*. 2da Edición. instituto of Physics Publishing Imprint,
- [4] T. APPELQUIST, A. CHODOS Y P.FREUND, *Modern Kaluza–Klein Theories*. 5a Edición. Addison Wesley Pub, (1987).
- [5] N. KALOPER, I. L KOGAN, K. A OLIVE,[hep-th/9711027]
- [6] L. RANDALL AND R. SUNDRUM, Phys. Rev. Lett. **83**,3370 (1999)[hep-th/9905221].
- [7] L. RANDALL AND R. SUNDRUM, Phys. Rev. Lett. **83**,4690 (1999)[hep-th/9906064].
- [8] P. HORAVA AND E. WITTEN, Nucl. Phys, B460(1996)506, Nucl. Phys, B475(1996)94.
- [9] I. ANTONIADIS, N. ARKANI–HAMED, S. DIMOPOULOS, G. DRALI, Phys. Lett. B436, (1998)257.
- [10] D. H. LYTH, Phys. Lett. B448, (1999)191.

- [11] N. KALOPEP, A. LINDE[hep-th/9811141].
- [12] G. DVALI, S. H. HENRY TYE, Phys, Lett, B450 (1999)72.
- [13] A.LUKAS, B. A. OVRUT, D. WALDRAM,[hep-th/9902071].
- [14] A. MAZUMDAR,[hep-ph/9902381].
- [15] N. ARKANI-HAMED, S. DIMOPOULOS, N. KALOPEP, J. MARCH-RUSSEL,[hep-ph/9903224].
- [16] C. CSAKI, M. GRAESSER, J. TERNING,[hep-ph/9903319].
- [17] P. KANTI, K. A. OLIVE,[hep-ph/9903524].
- [18] WANG, L. CALDWELL, R. R. OSTRICKER, J. AND STEINHARDT, P. J.Astrophys. J. 530, 17 (2000).
- [19] CALDWELL, R. R.[astro-ph/9908168].
- [20] P. BINETRUY, C. DEFFAYET AND D. LANGLOIS, Nucl. Phys. B565, 269 (2000)[hep-th/0502032].
- [21] P. J. PEEBLES AND A. VILEKIN, Phys. Rev. D59, 063505(1999).
- [22] E. J. COPELAND, A. R. LIDDLE AND J. E. LIDSEY,Phys. Rev. D64, 023509(2001)[astro-ph/0006421].
- [23] G. HUEY AND LIDSEY, Phys. Lett. B514, 217(2001).
- [24] V. SAHNI, M. SAMI AND T. SOURADOEP, Phys. Rev. D65, 023518(2003).
- [25] A. S. MAJUMDAR, Phys. Rev. D64, 083503(2001).
- [26] S. NOJIRI AND S. D. ODINTSOV, Phys. Rev. D. 68, 123512(2003).
- [27] M. SAMI AND V. SAHNI, Phys. Rev. D70, 083513(2004).
- [28] R.MAARTENS, D. WANDS, B. A. BASSET AND I. P. C. HEARD, Phys. Rev. D62, 041301 (R) (2000)

- [29] V. SAHNI,(2005)[astro-ph/0502032].
- [30] YU. SHTANOV AND V. SAHNI, Phys. Lett. B557, 1 (2003)[gr-qc/0208047].
- [31] W. FISCHLER, A. KASHANI-POOR, R. MCNEES AND S. PABAN,(2001)[hep-th/0104181].
- [32] V. SAHNI AND YU. V. SHTANOV,JCAP 0311, 014 (2003)[astro-ph/0202346].