

Sistemas no lineales en cosmología

TONATIUH MATOS Y L. ARTURO UREÑA-LÓPEZ*

Resumen. Presentamos un resumen de los resultados obtenidos últimamente en el contexto de la cosmología. Vemos cómo los sistemas con campos escalares que pueden resolver el enigma de la materia oscura pueden tener un comportamiento no lineal tipo solitónico y definitivamente no perturbativo.

Palabras clave: solitones, materia oscura, campos escalares, no linealidad.

Non Linear Systems in Cosmology

Abstract. This paper presents a resume of results obtained recently in the context of cosmology. We see how systems with escalating fields that can resolve the riddle of dark matter also can have a non linear comportment of the soltonic and definitively non disturbing type.

Keywords: solitons, dark matter, scalar fields, non linearity.

Recepción: 8 de noviembre de 2000

Aceptación: 24 de abril de 2001

Introducción

No hay duda del interés creciente en sistemas no lineales en ciencias naturales. La razón es muy simple: la naturaleza está dominada por los fenómenos no lineales. No hay prácticamente área de las ciencias naturales en donde los fenómenos no lineales no sean los más actuales e interesantes. En esta discusión se presenta la repercusión de los sistemas no lineales en cosmología.

El descubrimiento de la expansión del Universo y de la radiación cósmica de fondo dan sustento a la teoría del nacimiento del Universo a partir de una gran explosión ocurrida aproximadamente hace 15 mil millones de años. La predicción de la producción de elementos ligeros de acuerdo con el Modelo Estándar de Partículas coincide con las mediciones de hidrógeno y helio primordiales. Pero en los últimos años, las observaciones con nueva tecnología han aclarado nuestra imagen del Universo. Las observaciones en supernovas del tipo I^a han demostrado que la materia se

separa en dos diferentes clases: una atractiva gravitacional, que contribuiría con 30% del total de materia; y la otra repulsiva o antrigravitacional, con el restante 70% (Perlmutter, 1998). A la primera clase pertenece la materia de la que estamos hechos, los bariones (5% del total). Sin embargo, el resto de esa materia atractiva no es visible y su naturaleza se desconoce por completo. A esta materia se le conoce como *materia oscura*. La naturaleza de esta materia desconocida se ha convertido en unos de los problemas más interesantes y de mayor dificultad de la cosmología (véase <http://physicsweb.org>). A otra materia desconocida y repulsiva se le suele denominar energía oscura, porque tal vez esté relacionada con la energía del vacío cuántico.

* Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, Apartado Postal 14-740, C.P. 07000. México, D.F. Correo electrónico: tmatos@fis.cinvestav.mx y lurena@fis.cinvestav.mx

Nuestro agradecimiento especial a Máximo Agüero por su participación en el Taller Sobre Fenómenos No Lineales; a Darío Núñez y F. Siddhartha Guzmán por sus valiosos comentarios. Este trabajo fue financiado por CONACYT, a través de los apoyos 119259 (I.a.u.) y 34407-E.

Para mayor información sobre nuestro grupo de investigación puede consultarse la página <http://www.fis.cinvestav.mx/siddh/PHI/>

Sistemas no lineales en cosmología

TONATIUH MATOS Y L. ARTURO UREÑA-LÓPEZ*

Resumen. Presentamos un resumen de los resultados obtenidos últimamente en el contexto de la cosmología. Vemos cómo los sistemas con campos escalares que pueden resolver el enigma de la materia oscura pueden tener un comportamiento no lineal tipo solitónico y definitivamente no perturbativo.

Palabras clave: solitones, materia oscura, campos escalares, no linealidad.

Non Linear Systems in Cosmology

Abstract. This paper presents a resume of results obtained recently in the context of cosmology. We see how systems with escalating fields that can resolve the riddle of dark matter also can have a non linear comportment of the solitonic and definitively non disturbing type.

Keywords: solitons, dark matter, scalar fields, non linearity.

Recepción: 8 de noviembre de 2000

Aceptación: 24 de abril de 2001

Introducción

No hay duda del interés creciente en sistemas no lineales en ciencias naturales. La razón es muy simple: la naturaleza está dominada por los fenómenos no lineales. No hay prácticamente área de las ciencias naturales en donde los fenómenos no lineales no sean los más actuales e interesantes. En esta discusión se presenta la repercusión de los sistemas no lineales en cosmología.

El descubrimiento de la expansión del Universo y de la radiación cósmica de fondo dan sustento a la teoría del nacimiento del Universo a partir de una gran explosión ocurrida aproximadamente hace 15 mil millones de años. La predicción de la producción de elementos ligeros de acuerdo con el Modelo Estándar de Partículas coincide con las mediciones de hidrógeno y helio primordiales. Pero en los últimos años, las observaciones con nueva tecnología han aclarado nuestra imagen del Universo. Las observaciones en supernovas del tipo I^a han demostrado que la materia se

separa en dos diferentes clases: una atractiva gravitacional, que contribuiría con 30% del total de materia; y la otra repulsiva o antrigravitacional, con el restante 70% (Perlmutter, 1998). A la primera clase pertenece la materia de la que estamos hechos, los bariones (5% del total). Sin embargo, el resto de esa materia atractiva no es visible y su naturaleza se desconoce por completo. A esta materia se le conoce como *materia oscura*. La naturaleza de esta materia desconocida se ha convertido en unos de los problemas más interesantes y de mayor dificultad de la cosmología (véase <http://physicsweb.org>). A otra materia desconocida y repulsiva se le suele denominar energía oscura, porque tal vez esté relacionada con la energía del vacío cuántico.

* Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, Apartado Postal 14-740, C.P. 07000. México, D.F. Correo electrónico: tmatos@fis.cinvestav.mx y lurena@fis.cinvestav.mx

Nuestro agradecimiento especial a Máximo Agüero por su participación en el Taller Sobre Fenómenos No Lineales; a Darío Núñez y F. Siddhartha Guzmán por sus valiosos comentarios. Este trabajo fue financiado por CONACYT, a través de los apoyos 119259 (l.a.u.) y 34407-E.

Para mayor información sobre nuestro grupo de investigación puede consultarse la página <http://www.fis.cinvestav.mx/siddh/PHI/>

Recientes observaciones de la anisotropía de la radiación cósmica de fondo (remanente del Big-Bang) *Boomerang and Maxima* (Bernardis *et al.*, 2000) sugieren que el Universo es homogéneo e isotrópico en una parte de 100 mil. Además sugieren que su curvatura es cero, es decir, el Universo es plano. Esto último también significa que la suma de las densidades de energía de cada uno de los componentes en el Universo es igual a la densidad crítica, de aproximadamente $\Sigma\rho = \rho_c \simeq 8 \times 10^{-30} g\ cm^{-3}$. Las observaciones en su conjunto parecen ser consistentes con el llamado Modelo Estándar de Cosmología. Éste considera un Universo homogéneo, isotrópico (lo que está de acuerdo con el Principio Cosmológico) y plano en expansión. La materia que lo compone es 5% de bariones, 25% de materia oscura y 70% de energía oscura. Pese a los éxitos de este modelo (Bahcall *et al.*, 1999) 95% de la materia en él es de naturaleza desconocida.

En una serie de artículos publicados recientemente, hemos estado trabajando la hipótesis de que tanto la energía oscura como la materia oscura pueden ser modeladas por campos escalares (Matos y Ureña, 2000 y 2001; Matos *et al.*, 2001). Las propiedades particulares de los campos escalares son determinadas por el potencial escalar que gobierna su evolución. Es interesante que los potenciales escalares que hemos utilizado pertenecen a la misma familia de potenciales de la forma:

$$V(\Psi) = V_0 [\sinh(\alpha\sqrt{k_0}\Psi)]^\beta \tag{1}$$

Un modelo adecuado para la energía oscura (repulsiva) se obtiene considerando que $\beta \neq 2$ (Ureña y Matos, 2000; Sahni y Wang, 2000). Por otro lado, el potencial escalar de materia oscura se obtiene al considerar que $\beta = 2$ y se puede reescribir de la forma (Ureña y Matos, 2001; Sahni y Wang, 2000):

$$V(\Phi) = V_0 [\cosh(\lambda\sqrt{k_0}\Phi) - 1] \tag{2}$$

En este último caso podemos hablar de un campo escalar con masa, la cual está definida como $m_\Phi^2 = V''|_{\Phi=0} = \lambda^2 k_0 V_0$.

El orden de este artículo es el siguiente. En la sección I se resuelven las ecuaciones de evolución del Universo dentro del marco de la Teoría General de la Relatividad de Einstein. En particular, consideramos que las componentes de materia y energía oscuras del Universo son descritas por los campos escalares Φ, Ψ , respectivamente. La evolución de tal Universo

es dividida en diferentes etapas, nombradas según la componente dominante de cada época: radiación (RD), materia (MD) y energía oscura (DED). También mostramos cómo determinar los parámetros libres de los potenciales escalares (1, 2). En la sección II se presenta la teoría lineal de perturbaciones en la que se basa la formación de la estructura observada: galaxias, cúmulos de galaxias, etc. Se muestra que esta estructura es formada por la materia oscura escalar en la misma proporción que la materia oscura del modelo estándar. En la sección III hablamos sobre algunas predicciones *no perturbativas* del modelo de materia oscura escalar y la posible aparición de soluciones solitónicas no topológicas al pasar al régimen no lineal de perturbaciones. En las conclusiones presentamos un breve resumen del artículo.

I. Las soluciones cosmológicas

El que el Universo observado sea homogéneo, isotrópico y plano nos permite adoptar como *ansatz* la métrica plana de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)], \tag{3}$$

donde a es llamado el *factor de escala*, el cual varía en el rango $[0, 1]$, y actualmente $a = 1$. Se han escogido las unidades con $c = 1$. Las ecuaciones de evolución son

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{k_0}{3} (\rho + \rho_\Phi + \rho_\Psi) \tag{4}$$

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p) \tag{5}$$

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} = -\lambda\sqrt{k_0}V_0 \sinh(\lambda\sqrt{k_0}\Phi) \tag{6}$$

$$\ddot{\Psi} + 3H\dot{\Psi} = -\alpha\beta\sqrt{k_0}V_0 \cosh(\alpha\sqrt{k_0}\Psi) \times [\sinh(\alpha\sqrt{k_0}\Psi)]^{\beta-1} \tag{7}$$

donde $k_0 \equiv 8\pi G$ y $\rho(p)$ es la densidad de energía (presión) de la radiación, más bariones, más neutrinos, etc. Las densidades de energía (presiones) escalares son

$$\rho_\Phi = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + V(\Phi) \left(p_\Phi = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 - V(\Phi) \right) \tag{8}$$

$$\rho_\Psi = \frac{1}{2} \dot{\Psi}^2 + \mathcal{V}(\Psi) \left(p_\Psi = \frac{1}{2} \dot{\Psi}^2 - \mathcal{V}(\Psi) \right).$$

El punto representa la derivada con respecto al tiempo cósmico t . H es conocida como el parámetro de Hubble y su valor actual es $H_0 = 65 \pm 10 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Este parámetro de Hubble también nos proporciona una medida de la edad del Universo definida por $t_H = h^{-1} \simeq 10^{10}$ años.

La ecuación (4) es conocida como la ecuación de Friedmann y H es el llamado parámetro de Hubble, que nos da una medida de la rapidez de expansión del Universo. La ecuación (5) es la ecuación de conservación aplicada (por separado) a la radiación, la bariones, etc. Por último, las ecuaciones (6, 7) son las ecuaciones de Klein-Gordon (también ecuaciones de conservación) para cada uno de los campos escalares. Observe que las ecuaciones de Klein-Gordon (6) y (7) son ecuaciones "solitónicas", no lineales, donde el observador se mueve con todo el sistema, en este caso con el Universo. El Universo se expande y su dinámica está gobernada por la ecuación de Friedmann. Las ecuaciones de Klein-Gordon "no ven" el movimiento del sistema porque son ecuaciones solitónicas en el sistema de referencia del solitón.

La ecuación (5) puede ser fácilmente resuelta en función del factor de escala a para los casos de radiación (γ) y bariones (b). Considerando que $\gamma = (1/3) \rho_\gamma$ ($p_b = 0$), la solución es $\rho_\gamma = \rho_{\gamma 0} a^{-4}$ ($\rho_b = \rho_{b0} a^{-3}$). Se considera la evolución del Universo a partir del final de la etapa de inflación, por ejemplo aproximadamente cuando $a \sim 10^{-30}$. No es posible dar una solución general analítica para toda la evolución temporal del Universo. Por eso, es conveniente separar dicha evolución en diferentes eras que nos permitan encontrar soluciones con muy buena aproximación.

1. Época dominada por radiación (RD)

Comenzamos la evolución durante la era de radiación dominante, es decir, consideraremos condiciones iniciales tales que $(\rho_{\Phi 0}, \rho_{\Psi 0}) \leq \rho_\gamma$. También supondremos que $\Phi \ll 0$ ($\Psi \ll 1$) y entonces el potencial escalar $V(\Phi)$ puede considerarse como exponencial (de potencia inversa).

Una solución exacta para el potencial (1) puede encontrarse aún considerando la presencia de otra componente (Chimento y Jakubi, 1996). Para nuestro propósito, que es modelar una energía oscura, es conveniente tomar la solución en presencia de materia no relativista: materia oscura y bariones. Los parámetros del potencial son dados por (Matos y Ureña, 2000; Ureña y Matos, 2000; Chimento y Jakubi, 1996):

$$\alpha = \frac{3\omega_\Psi}{2\sqrt{3(1+\omega_\Psi)}},$$

$$\beta = \frac{2(1+\omega_\Psi)}{\omega_\Psi},$$

$$\kappa_0 \mathcal{V}_0 = \frac{3(1-\omega_\Psi)}{2} \left(\frac{\Omega_{0M}}{\Omega_{0\Psi}} \right)^{\frac{1+\omega_\Psi}{\omega_\Psi}} \Omega_{0\Psi} H_0^2, \tag{8}$$

$$\Psi = (\alpha\sqrt{k_0})^{-1} \text{arccoth} \left[1 + \left(\frac{a}{a_{M\Psi}} \right)^{3\omega_\Psi} \right]^{1/2}, \tag{9}$$

$$\rho_\Psi = \rho_{0\Psi} a^{-3(1+\omega_\Psi)}, \tag{10}$$

$\Omega_{0\Psi} = 0.7$ es la contribución actual del la energía oscura y $\omega_\Psi = p_\Psi/\rho_\Psi$ es su ecuación de estado actual. Las observaciones sugieren la cota superior $\omega_\Psi < -0.6$; pero son necesarias más observaciones para fijar los parámetros del potencial (1). $a_{M\Psi}$ es el valor del factor de escala al tiempo de la equivalencia entre la energía oscura y la materia no relativista:

$$a_{M\Psi} = \left(\frac{\Omega_{0M}}{\Omega_{0\Psi}} \right)^{-1/(3\omega_\Psi)}, \tag{11}$$

donde $\Omega_{0M} = 0.3$. Vale la pena mencionar que esta solución es una solución atractor en el espacio fase.

Debido a que el potencial escalar para la materia oscura es de la forma exponencial en esta época, el campo escalar Φ evoluciona de igual manera que la componente dominante, en este caso la radiación. La solución indica entonces que la energía escalar es de la forma $\rho_\Phi = \rho_{\Phi 0} a^{-4}$. Asimismo, la razón entre la energía escalar ρ_Φ y la energía total se mantiene constante (Chimento y Jakubi, 1996; Ferreira y Joyce, 1998)

$$\frac{\rho_\Phi}{\rho_\gamma + \rho_\Phi} = \frac{4}{\lambda^2}. \tag{12}$$

Esta es también una solución atractor. Debido a que durante esta época se formaron los elementos ligeros en el Universo (proceso llamado nucleosíntesis), aparece una restricción de la forma (Ferreira y Joyce, 1998)

$$\frac{\rho_\Phi}{\rho_\gamma} = \frac{4}{\lambda^2 - 4} < 0.2 \tag{13}$$

que se traduce en la condición $\lambda > \sqrt{24}$.

Sin embargo, es también durante esta época que el campo escalar Φ comienza a oscilar alrededor del mínimo del potencial (2). Para estudiar esta transición, denotemos como

a^* al factor de escala al tiempo cuando $|\lambda \sqrt{k_0} \Phi| \approx 1$, es decir, cuando esperamos la transición entre el comportamiento exponencial y el cuadrático (alrededor del mínimo) del potencial (2). Aún cuando puede encontrarse una solución exacta a la ecuación (6) (de la Macorra y Piccinelli, 2000), utilizaremos argumentos sobre promedios temporales del campo para encontrar la solución.

Las oscilaciones del campo escalar Φ son tan rápidas que el Universo solamente es afectado por la evolución promedio del campo. De aquí que durante el tiempo de una oscilación, el término de fricción provocada por la expansión del Universo pueda ser despreciado en la ecuación (6). Si tomamos un promedio temporal en un periodo de tiempo mayor que el de una oscilación, pero menor que el tiempo de Hubble H^{-1} de la cantidad (Turner, 1987).

$$\frac{d(\Phi \dot{\Phi})}{dt} = \dot{\Phi}^2 + \Phi \ddot{\Phi} \quad (14)$$

obtenemos que

$$\langle \dot{\Phi}^2 \rangle = \langle \Phi \frac{dV}{d\Phi} \rangle \quad (15)$$

Tomando como buena aproximación sólo los términos cuadrático y cuártico en la expansión del potencial (2), la densidad de energía y la presión escalares pueden escribirse como (Peebles and Vilenkin, 1999)

$$\langle \rho_\phi \rangle \approx m_\phi^2 \langle \Phi^2 \rangle + \frac{1}{8} \lambda^2 m_\phi^2 k_0 \langle \Phi^4 \rangle, \quad (16)$$

$$\langle p_\phi \rangle \approx \frac{1}{24} \lambda^2 m_\phi^2 k_0 \langle \Phi^4 \rangle, \quad (17)$$

por lo que la ecuación de estado escalar ω_ϕ viene dada por

$$\langle \omega_\phi \rangle = \frac{1}{3} \frac{\langle \Phi^4 \rangle}{\frac{8}{\lambda^2 k_0} \langle \Phi^2 \rangle + \langle \Phi^4 \rangle}. \quad (18)$$

Obsérvese que al dominar el término cuártico la ecuación de estado es $\omega_\phi \approx 1/3$, como radiación, lo que coincide con la solución dada anteriormente. Una vez que domina el término cuadrático, se puede demostrar fácilmente que $\langle \Phi^4 \rangle = (3/2) \langle \Phi^2 \rangle^2$ y además $\langle \rho_\phi \rangle = 2 \langle V \rangle$. La ecuación de estado viene dada por

$$\langle \omega_\phi \rangle = \frac{1}{16V_0} \langle \rho_\phi \rangle \quad (19)$$

Entonces, $\langle \omega_\phi \rangle \rightarrow 0$ y $\langle \rho_\phi \rangle$, evoluciona como materia no relativista, i.e. $p_\phi = 0$ (de la Macorra y Piccinelli, 2000; Turner, 1987).

Para reproducir los resultados del modelo estándar de materia oscura, debemos determinar el valor de los parámetros libres del potencial (2). Esto puede hacerse de la siguiente manera. Suponiendo que la transición de radiación a materia para el campo escalar Φ ocurra suavemente (como lo sugiere la solución en la ecuación (18) cuando $a = a^*$, entonces debe cumplirse que

$$\rho_i \Phi (a^*)^{-4} \approx \rho_{0CDM} (a^*)^{-3} \quad (20)$$

donde del lado derecho hemos usado el resultado estándar de materia oscura no relativista. Usando la ecuación (12) en el lado izquierdo de (20) y ajustando numéricamente, encontramos que

$$a^* \approx \sqrt[3]{\frac{9}{1.7}} (\lambda^2 k_0)^{-1/4} \frac{\Omega_{0\gamma}}{\Omega_{0CDM}} \quad (21)$$

Por otro lado, si ahora utilizamos $\langle \rho_\phi \rangle = 2 \langle V \rangle \approx \rho_{CDM}$ en el lado derecho de la ecuación (20), obtenemos

$$V_0 \langle \lambda^2 k_0 \Phi^2 \rangle |_{a^*} \approx \rho_{0CDM} (a^*)^{-3} \quad (22)$$

Por lo tanto, la relación necesaria es (Matos y Ureña, 2000)

$$V_0 \frac{1.7}{9} (\lambda^2 k_0)^{-3/4} \frac{\Omega_{0CDM}^3}{\Omega_{0\gamma}} \approx \rho_{0CDM} \quad (23)$$

$\Omega_{0CDM} = 0.25$ y $\Omega_{0\gamma} = 5 \times 10^{-5}$ las proporciones actuales de materia oscura y radiación en el Universo. Con esta relación, recuperamos la evolución cosmológica estándar con $\rho_\phi = \rho_{CDM}$.

2. Épocas dominadas por materia (MD) y energía oscura (DED)

Durante esta época la contribución radiativa ρ_γ es muy pequeña y puede ser despreciada en la solución a las ecuaciones, y el campo escalar Φ contribuye como materia no relativista, al igual que los bariones. La ecuación (4) puede integrarse de manera exacta, dando por resultado (Ureña y Matos, 2000; Chimento y Jakubi, 1996)

$$H_0 t = \frac{2}{3(1+\omega_\Psi)} \frac{a^{\frac{3}{2}(1+\omega_\Psi)}}{\sqrt{\Omega_{0\Psi}}} \times {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{\beta}{4}, \frac{\beta+4}{4}; \frac{a}{a_{M\Psi}} \right]^{3\omega_\Psi} \quad (24)$$

donde ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica. Sin embargo, se puede dar una solución aproximada para todas las épocas considerando $a > a^*$. Esta solución es (Matos y Ureña, 2000):

$$\begin{aligned}
 H_0 t = & \frac{2}{3(1+\omega_\psi)} \frac{a^{\frac{3}{2}}(1+\omega_\psi)}{\sqrt{\Omega_{0\psi}}} \left[1 + \left(\frac{a}{a_{M\psi}} \right)^{3\omega_\psi} \right]^{-1/2} \\
 & \times {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{\beta+4}{4}; \frac{(a/a_{M\psi})^{3\omega_\psi}}{1+(a/a_{M\psi})^{3\omega_\psi}} \right) \\
 & \times \sqrt{1 + \frac{a_{\gamma M}}{a} \left(\frac{1}{2} - \frac{a_{\gamma M}}{a} \right)} \\
 & - \frac{2}{3} \frac{(a^*)^{3/2}}{\sqrt{\Omega_{0M}}} \sqrt{1 + \frac{a_{\gamma M}}{a^*} \left(\frac{1}{2} - \frac{a_{\gamma M}}{a^*} \right)} \\
 & + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4}}{\lambda} \frac{(a^*)^2}{2\sqrt{\Omega_{0\gamma}}} \quad (25)
 \end{aligned}$$

Durante la época de dominación por la energía oscura, la componente dominante es el campo escalar Ψ . Ahora es el potencial (1) el que se comporta efectivamente de forma exponencial (Ureña y Matos, 2000; Matos *et al.*, 2000). La evolución de las diferentes componentes y la solución temporal pueden encontrarse al tomar los límites para el caso en que $a \rightarrow \infty$.

La característica más importante de esta época es que el Universo entra en una etapa inflacionaria, es decir, se expande aceleradamente y su velocidad de expansión crece. Esto también se interpreta diciendo que el factor de escala es de la forma $a \sim t^n$, con $n > 1$. Aun cuando la expansión con una constante cosmológica también es acelerada, el potencial escalar (1) es claramente distinguible de aquella (Ureña y Matos, 2000).

II. Teoría Lineal de Perturbaciones

Dentro del contexto de formación de estructura en el Universo (galaxias, grupos de galaxias, etc.), deben calcularse las perturbaciones gravitacionales al modelo homogéneo e isotrópico presentado anteriormente. En esta sección estudiamos exclusivamente las perturbaciones al campo escalar de materia oscura. Mostraremos que las perturbaciones son aquellas predichas por el modelo estándar cosmológico. Presentaremos los pasos generales para llegar a tales soluciones.

1. Perturbaciones

Se considera una perturbación lineal a la parte espacial de la métrica dada por $ds^2 = a^2 [-d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j]$, donde τ es llamado el tiempo conformal. Las ecuaciones son escritas en el espacio de Fourier ($\vec{k} = k\hat{k}$), con k como el número de onda de las perturbaciones. Las ecuaciones de Einstein perturbadas a resolver son (Ma and Berthshinger, 1995):

$$h_{ij}(x, \tau) = d^3 k e^{i k \cdot x} \left(\hat{k}_i \hat{k}_j b(k, \tau) + \left(\hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \theta(k, \tau) \right), \quad (26)$$

$$k^2 \eta - \frac{1}{2} \dot{a} \dot{b} = 4\pi G a^2 \delta T_0^0, \quad (27)$$

$$k^2 \eta = 4\pi G a^2 (\rho + p)\theta, \quad (28)$$

$$\ddot{b} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{b} - 2k^2 \eta = -8\pi a^2 \delta T_i^i, \quad (29)$$

$$\ddot{b} + 6\ddot{\eta} + 2 \frac{\dot{a}}{a} (\dot{b} + 6\dot{\eta}) - 2k^2 \eta = -24\pi G a^2 (\rho + p)\sigma \quad (30)$$

Las funciones θ y σ son definidas por las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 (\rho + p)\theta & \equiv ik^j \delta T_j^0 \\
 (\rho + p)\sigma & \equiv - \left(k_i k_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \Sigma_j^i, \\
 \Sigma_j^i & \equiv T_j^i - \frac{1}{3} \delta_j^i T_k^k. \quad (31)
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de conservación perturbadas son escritas como ecuaciones para la densidad de contraste ($\delta \equiv \delta\rho/\rho$) y la función θ , las cuales son:

$$\dot{\delta} = -(1+\omega) \left(\theta + \frac{\dot{b}}{2} \right) - 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\delta\rho}{\delta\rho} - \omega \right) \delta, \quad (32)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{a}}{a} (1-3\omega)\theta - \frac{\dot{\omega}}{1+\omega} \theta + \frac{\delta\rho/\delta\rho}{1+\omega} k^2 \delta - k^2 \sigma. \quad (33)$$

Para este modelo también debemos agregar las perturbaciones a los campos escalares $\Phi(\tau) \rightarrow \Phi(\tau) + \phi(k, \tau)$ y $\Psi(\tau) \rightarrow \Psi(\tau) + \psi(k, \tau)$ (Ferreira y Joyce, 1998).

$$\begin{aligned} \delta\rho_\Phi &= \frac{1}{a^2}\dot{\Phi}\dot{\phi} + V'\phi, \\ \delta p_\Phi &= \frac{1}{a^2}\dot{\Phi}\dot{\phi} - V'\phi, \\ (\rho_\Phi + p_\Phi)\theta_\Phi &= \frac{1}{a^2}\dot{\Phi}k^2\phi, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \delta\rho_\Psi &= \frac{1}{a^2}\dot{\Psi}\dot{\psi} + V'\psi, \\ \delta p_\Psi &= \frac{1}{a^2}\dot{\Psi}\dot{\psi} - V'\psi, \\ (\rho_\Psi + p_\Psi)\theta_\Psi &= \frac{1}{a^2}\dot{\Psi}k^2\psi, \end{aligned} \quad (35)$$

con las ecuaciones de evolución perturbadas dadas por

$$\ddot{\phi} + 2\dot{\phi} + k^2\phi + a^2V''\phi + \frac{1}{2}\dot{\Phi}\dot{h} = 0, \quad (36)$$

$$\ddot{\psi} + 2\dot{\psi} + k^2\psi + a^2V''\psi + \frac{1}{2}\dot{\Psi}\dot{h} = 0. \quad (37)$$

Donde ' denota la derivada respecto de los campos escalares Φ y Ψ . En la siguiente sección, nos restringiremos sólo a las perturbaciones del campo escalar Φ .

2. Perturbaciones para el campo escalar Φ

Se pueden dar ciertas soluciones aproximadas de las ecuaciones (26-37) tomando en consideración que la ecuación de evolución de la función h es

$$\frac{d}{dt}(a\dot{h}) + 3a^2[\Omega_r\delta_r + \Omega_b\delta_b + \Omega_\Phi\delta_\Phi(1 + 3\frac{\delta p_\Phi}{\delta\rho_\Phi}) + \Omega_\Psi\delta_\Psi(1 + 3\frac{\delta p_\Psi}{\delta\rho_\Psi})] = 0, \quad (38)$$

donde $\Omega_i = \rho_i/\rho_T$, $\rho_T = (3^2)/(k_0 a^2)$. Puede notarse fácilmente que la componente dominante en la evolución del Universo es también la que domina esta ecuación diferencial. Por lo tanto, las soluciones para la función h son aquellas del modelo estándar (Padmanabhan, 1993: 168). Interesados sólo en aquellas soluciones que sean crecientes, nos limitaremos al caso en que $k^2 \ll a^2V''$ en la ecuación (36) (Matos y Ureña, 2000).

Durante la época dominada por radiación (RD), el campo escalar se comporta como un fluido perfecto con ecuación de estado $\omega_\Phi = 1/3$. En el caso estándar, $\tau = \tau^{-1}$, $a = \tau$ y

$\dot{h} = C\tau$ con $C = const$. La ecuación a resolver (36) se puede escribir como

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{\tau}\dot{\phi} + \frac{4}{\tau^2}\phi = -\frac{2C}{\sqrt{k_0}\lambda} \quad (39)$$

La solución creciente para ϕ es

$$\sqrt{k_0}\phi(\tau) = \frac{C}{5\lambda}\tau^2 \quad (40)$$

Recordando que el resultado estándar para la materia oscura es $-(1/2)h = \delta_{CDM}$ (para todas las épocas), encontramos que

$$\delta_\Phi = \frac{4}{15}\delta_{CDM} \quad (41)$$

La solución es aquella del modelo estándar, pero es de una amplitud menor. Es interesante notar que esta solución tampoco depende de las condiciones iniciales, por tanto es una solución atractor.

Una vez que el campo escalar Φ comienza a oscilar, sucede que $V'' = m_\Phi^2$. La ecuación a resolver (36) ahora es

$$\ddot{\phi} + 2\dot{\phi} + a^2m_\Phi^2\phi + \frac{1}{2}\dot{\Phi}\dot{h} = 0. \quad (42)$$

Podemos observar que la fluctuación del campo escalar ϕ oscila con la misma frecuencia que el campo sin perturbar Φ . Siguiendo el procedimiento de la sección anterior, tomamos el promedio temporal de la cantidad

$$\frac{d(\Phi\dot{\phi})}{d\tau} = \dot{\Phi}\dot{\phi} + \Phi\ddot{\phi} \quad (43)$$

y obtenemos

$$\langle \dot{\Phi}\dot{\phi} \rangle = \langle \Phi\ddot{\phi} \rangle. \quad (44)$$

El segundo y cuarto términos de la ecuación (42) son aproximadamente constantes durante el tiempo de una oscilación, por lo que

$$\langle \Phi\ddot{\phi} \rangle \approx -\langle a^2m_\Phi^2\Phi\phi \rangle \approx -\langle a^2V'\phi \rangle. \quad (45)$$

Por lo tanto, encontramos

$$\frac{\langle \delta p_\Phi \rangle}{\langle \delta\rho_\Phi \rangle} = \frac{\langle \dot{\Phi}\dot{\phi} \rangle - \langle a^2V'\phi \rangle}{\langle \dot{\Phi}\dot{\phi} \rangle + \langle a^2V'\phi \rangle} \approx 0. \quad (46)$$

Reescribiendo la ecuación (42) de la forma de la ecuación (32),

$$\delta_\phi + 3\delta_\phi \left(\frac{\langle \dot{\phi}_\phi \rangle}{\langle \phi_\phi \rangle} - \frac{\langle \dot{\rho}_\phi \rangle}{\langle \rho_\phi \rangle} \right) = - \left(1 + \frac{\langle \dot{\rho}_\phi \rangle}{\langle \rho_\phi \rangle} \right) \frac{\dot{b}}{2} \quad (47)$$

la solución obvia es entonces

$$\delta_\phi = \delta_{CDM} \quad (48)$$

El modelo presentado reproduce los resultados del modelo cosmológico estándar en lo que respecta a la materia oscura, tanto en lo referente a la evolución cosmológica como al crecimiento lineal de perturbaciones gravitacionales.

Hay una predicción extra de la materia oscura escalar concerniente a la formación de estructura: la formación de estructura hecha de materia oscura en escalas más pequeñas a una galaxia es menor, es decir, hay un corte en la formación de estructura. Esta predicción nos permite determinar que la masa de la partícula escalar de materia oscura es $m_\phi = 10^{-23}$ eV (Matos y Ureña, 2000). Como puede verse, es una partícula extremadamente ligera. Las implicaciones de esto son actualmente investigadas.

III. Soluciones solitónicas, la energía de Planck y condensados de Bose para galaxias

El modelo no está aún completo. Una vez que una fluctuación de materia oscura es suficientemente grande $\delta_\phi \sim 1$, debemos pasar al régimen no lineal de perturbaciones. Ahora, la fluctuación colapsa debido a su propia gravedad y vence localmente a la expansión del Universo. Es esta fluctuación que colapsa la que evolucionaría hasta formar por ejemplo, una galaxia.

El tipo de estructuras que pueden formarse con campos escalares no han sido bien estudiadas dentro del marco de la Teoría General de la Relatividad. Sin embargo, trabajos ya publicados nos pueden proporcionar una respuesta parcial. El resultado más interesante ha surgido del estudio del colapso gravitacional de un campo escalar (Seidel y Suen, 1994). El objeto formado de esta manera resulta ser un solitón no topológico y oscilante en el tiempo, que ha sido llamado oscilón (Seidel y Suen, 1991). Sin embargo, estos estudios previos fueron hechos considerando un potencial escalar cuadrático Φ^2 . Se ha verificado que este tipo de objetos son estables, no singulares y asintóticamente planos.

Parte de la investigación que hacemos actualmente está encaminada a entender el colapso gravitacional de un campo escalar, pero ahora utilizando el potencial (Matos y Guzmán (2001), en prensa; Ureña y Matos (s/f), en prensa y Matos

et al. (s/f), en prensa). Hasta ahora, los resultados confirman la formación y estabilidad de estos oscilones pero aún falta determinar su posible relación con una galaxia.

Las sorpresas no terminan aquí. El uso de los potenciales (1) es justificado exclusivamente de forma fenomenológica. De cualquier manera, el potencial (2) ha sido estudiado ampliamente en teoría de campo *no perturbativa* en 1+1 dimensiones, donde es conocido como el modelo de sinh-Gordon (Saleur, 2000). El modelo sinh-Gordon no tiene soluciones topológicas, a diferencia del modelo sinh-Gordon. Pero nos encontramos con una característica ineludible de nuestro modelo: su carácter no perturbativo. Soluciones no perturbativas dentro del grupo de renormalización son del tipo del potencial (Branchina, 2000). Esto nos ha permitido calcular la sección eficaz de dispersión $\sigma_{2 \rightarrow 2}$ de las partículas escalares. Esta autointeracción y su influencia en la formación galáctica ha sido estudiada dentro del marco de otros modelos de materia oscura. Aplicada a nuestro modelo, parece ineludible la formación de un condensado de Bose en galaxias (Riotto y Tkacher, 2000). Los valores adecuados de la autointeracción sugieren que la escala de renormalización de nuestro modelo es del orden de la escala de Planck, indicando tal vez un origen fundamental de la materia oscura (Matos y Ureña, 2000).

Conclusiones

En este trabajo hemos presentado los principales resultados de un modelo en donde tanto la materia como la energía oscuras son de origen escalar, es decir, son de tipo bosónico. La evolución y expansión del Universo coincide con las observaciones y las predicciones del modelo estándar de cosmología. Las principales diferencias con éste son: un corte en la formación de estructura subgaláctica, la predicción de la existencia de una partícula extremadamente ligera, formación por colapso gravitacional de objetos solitónicos y condensados de Bose, y la posible naturaleza fundamental de la teoría, ya que hay evidencia de que su escala de renormalización es del orden de la energía de Planck. La posible formación de galaxias con estas características es la interrogante que enfrentamos actualmente. 



BIBLIOGRAFÍA

- Bahcall, N.; J. Ostriker; S. Perlmutter y P. Steinhardt (1994). *Science*. 284, 1481-1488.
- Branchina, V. (2000). hep-ph/0002013.
- Chimento, L. y A. Jakubi (1996). *Int. J. Mod. Phys. D*5. 71.

De Bernardis, P. *et al.* (2000). *Nature* (London). 404: 955-959.

De la Macorra, A. y G. Piccinelli (2000). *Phys. Rev. D* 61, 123503.

Goodman, J. (2000). *astro-ph/0003018*.

Ferreira, P. y M. Joyce (1998). *Phys. Rev. D* 58, 023503.

Ford, L. (1987). *Phys. Rev. D* 35, 2955

Hanany, S. *et al.* (2000). *Astro-ph/0005123*. Preprint.

Ma, C. P. y E. Berthshinger (1995). *Astrophys. J.* 455, 7.

Matos, T. y L. Ureña (2000). *Class. Quantum Grav.* 17, L71-L75.

_____ (2001). *Phys. Rev. D*, 63506.

_____ (2000). *Astro-ph/0001026*.

Matos, T. y F. Guzmán (2001). "On the Space-time of a Galaxy", *Class. Quantum Grav.* 18, en prensa.

Matos, T.; F. Guzmán y L. Ureña (2000). *Class. Quantum Grav.* 17, 1707-1712.

Matos, T.; F. Guzmán; L. Ureña y D. Núñez (2000). *Astro-ph/0102419*. Preprint.

Matos, T.; M. Alcubierre y D. Núñez (s/f). *The Galactic Collapse of Scalar Field Dark Matter*. a publicarse.

Padmanabhan, T. (1993). *Structure Formation in the Universe*. Cambridge University Press.

Peebles, P. y A. Vilenkin (1999). *Phys. Rev. D* 60, 103506.

Perlmutter S. *et al.* (1998). *Astrophys. J.* 517, 565

Riess, A. *et al.* (1999). *Astron. J.* 116, 1009-1038.

Riotto, A. e I. Tkachev (2000). *Phys. Lett. B* 484, 177.

Sahni, V. y L. Wang (2000). *Phys. Rev. D* 62, 103517. También en *Astro-ph/9910097*.

Saleur, H. (2000). *Cond-mat/0007309*.

Seidel, E. y W. Suen (1994). *Phys. Rev. Lett.* 72, 2516.

_____ (1991). *Phys. Rev. Lett.* 66, 1659.

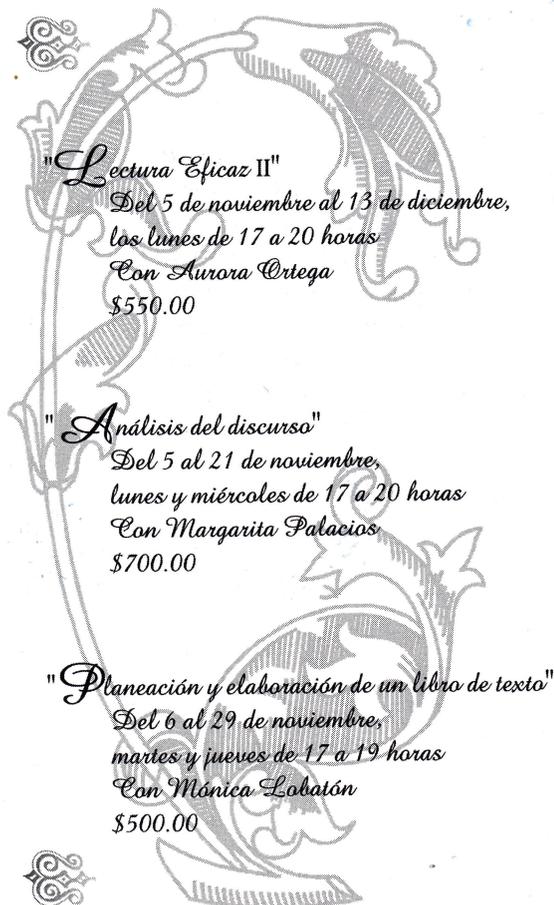
Turner, M. (1983). *Phys. Rev. D* 28, 1253.

Ureña, L. y T. Matos (2000). *Phys. Rev. D* 62, 081302.

Ureña, L. (s/f). "Oscillatons Revisited", en prensa.

WEB

"11 key questions about the Universe" at <http://physicsweb.org/article/news/5/1/7/1>. (18 de enero de 2001)



"*Lectura Eficaz II*"
Del 5 de noviembre al 13 de diciembre,
los lunes de 17 a 20 horas
Con Aurora Ortega
\$550.00

"*Análisis del discurso*"
Del 5 al 21 de noviembre,
lunes y miércoles de 17 a 20 horas
Con Margarita Palacios
\$700.00

"*Planeación y elaboración de un libro de texto*"
Del 6 al 29 de noviembre,
martes y jueves de 17 a 19 horas
Con Mónica Lobatón
\$500.00



"*Fotografía II*"
Del 7 de noviembre al 12 de diciembre,
miércoles de 17 a 19 horas
Con Patricia Mendoza
\$400.00

"*El compromiso profesional
y social del editor*"
Del 3 al 7 de diciembre
de 17 a 19 horas
Con Pedro Larios
\$350.00

"*Prosa poética*"
Del 9 de noviembre al 7 de diciembre
Con Mónica Sánchez Escuer
Entrada libre



CASA
universitaria
DEL LIBRO

Orizaba y Puebla, Col. Roma
Informes e inscripciones:
(5) 207 93 90 y (6) 20798 71

2º semestre 2001