

Series de Laurent

Las series de Laurent son una forma de descomposición que se puede llevar a cabo en cualquier función que incluso no sea analítica en un conjunto finito de punto. Las series de Laurent contienen coeficientes que serán utilizados para la evaluación de integrales de una manera muy sencilla. Vamos a iniciar con el teorema de las series de Laurent.

Teorema 1 (Series de Laurent) Sean γ_1 y γ_2 dos trayectorias circulares concéntricas, con centro en z_0 . Sea z' un punto en γ_1 o γ_2 , tal que $|z' - z_0| = r_1$ o $|z' - z_0| = r_2$, con $r_2 < r_1$. $f(z)$ es analítica sobre γ_1 y γ_2 y en la región entre ellas, como se muestra en la figura 1. Entonces $f(z)$ puede representarse como una serie de potencias de orden positivo y negativo como

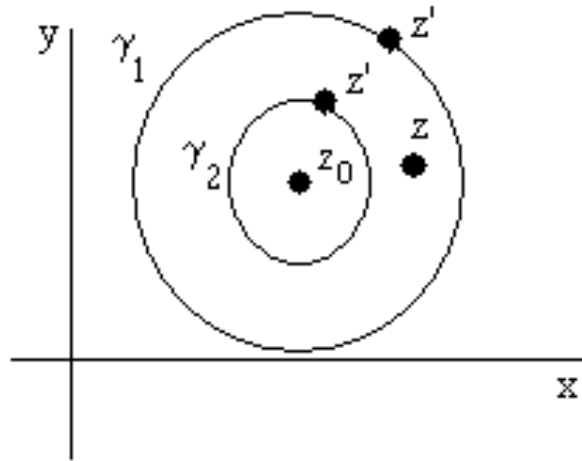


Figure 1: Trayectoria de integración utilizada en el teorema de series de Laurent.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}} \quad n = 0, 1, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{-n+1}} \quad n = 1, 2, \dots$$

Notación 2 A estas series se les llama **series de Laurent**.

Dem. 3 La integral de Cauchy de $f(z)$ es

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z') dz'}{z' - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z') dz'}{z' - z}$$

ya que dentro de esta trayectoria, $f(z)$ es analítica. Si como en el teorema de Taylor usamos la descomposición de $\frac{1}{z'-z}$ pero ahora en cada integral, obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(z') dz' \left(\frac{1}{z' - z_0} + \frac{z - z_0}{(z' - z_0)^2} + \dots + \frac{(z - z_0)^{n-1}}{(z' - z_0)^n} + \frac{(z - z_0)^n}{(z' - z_0)^n (z' - z)} \right) \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(z') dz' \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{z' - z_0}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{(z' - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} + \frac{(z' - z_0)^n}{(z - z_0)^n (z - z')} \right) \end{aligned}$$

donde, de la misma forma que en el teorema de Taylor, el residuo

$$\frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(z') dz' \frac{1}{(z' - z_0)^n (z' - z)}$$

tiende a cero para $n \rightarrow \infty$. Sólo nos falta ver el segundo residuo dado por

$$\frac{1}{2\pi i (z - z_0)^n} \int_{\gamma_2} f(z') dz' \frac{(z' - z_0)^n}{(z - z')}$$

pero por el mismo argumento que para el primer residuo, se puede ver que también tiende a cero para cuando n tiende a infinito. Por lo que se sigue el teorema. □

Ejercicio 4 Demuestre que el residuo de la serie

$$\frac{1}{2\pi i (z - z_0)^n} \int_{\gamma_2} f(z') dz' \frac{(z' - z_0)^n}{(z - z')}$$

tiende a cero para $n \rightarrow \infty$

Para familiarizarnos con las series de Laurent, en lo que sigue vamos a dar algunos casos particulares de ellas así como algunas aplicaciones y ejemplos. Las series de Laurent son muy generales, de hecho contienen a las de Taylor. Vamos a iniciar con una proposición diciendo justamente esto.

Proposición 5 Si la función f es analítica dentro y fuera de una curva $|z - z_0| = r_0$, su serie de Laurent se reduce a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

y converge a $f(z)$ para todos los puntos interiores de la circunferencia $|z - z_0| = r_0$.

Es claro que esta serie es la serie de Taylor de $f(z)$ en potencias de $(z - z_0)$.

Dem. 6 Si f es analítica dentro del círculo $|z - z_0| = r_0$, se sigue que $b_n = 0$ en la serie de Laurent, para todo n . La serie se vuelve un desarrollo en serie para f totalmente análogo como en el caso del teorema de Taylor.

□

Veamos algunos ejemplos representativos.

Ejemplo 7 Tomemos la función

$$f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$$

Esta función es singular para $z = 0$ y $z = \pm i$. Primero vamos a encontrar su serie de Laurent dentro de una trayectoria cerrada con $|z| < 1$. Para este caso, podemos expandir el término $1/(1+z^2)$ en series como sigue

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \frac{1}{1+z^2} \\ &= \frac{1}{z} (1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{2n-1} \text{ para } (0 < |z| < 1) \end{aligned}$$

Sin embargo, si ahora tomamos la región $|z| > 1$ esta expansión ya no es válida. Lo que se acostumbra entonces es buscar que se cumplan las condiciones para que la expansión pueda realizarse. Para esto hagamos lo siguiente, si $|z| > 1$, esto implica que $|1/z| < 1$, así que hagamos la expansión usando este hecho. Por ejemplo, podemos hacer

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1+z^{-2}} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n+3}} \text{ para } |z| > 1$$

ya que $|1/z^2| < 1$. Así, la expresión en series de la función depende de la región en donde queremos obtener la serie.

Ejemplo 8 Vamos a buscar la serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{(1-z^2)^2}$$

dentro de la esfera $0 < |z - 1| < 2$. Para hacer esto utilizaremos la fórmula de las series de Laurent en su forma intergral. Los coeficientes de la serie estan

dados por:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{(1-z'^2)^2} dz'}{(z'-1)^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dz'}{(z'-1)^{n+3} (1+z')^2} \\
 &= \frac{1}{(n+2)!} \left. \frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}} \left[\frac{1}{(1+z)^2} \right] \right|_{z=1} \\
 &= \frac{1}{(n+2)!} \left. \frac{(-1)^n (n+3)!}{(1+z)^{n+4}} \right|_{z=1} \\
 &= \frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}} \quad n = 0, 1, \dots
 \end{aligned}$$

donde γ_1 es una trayectoria alrededor de $z = 1$, y hemos usado la fórmula (??) para las derivadas de la integral de Cauchy. De una manera semejante, vamos a evaluar la integral para los coeficientes b_n , tenemos:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{(1-z'^2)^2} dz'}{(z'-1)^{-n+1}} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dz'}{(z'-1)^{-n+3} (1+z')^2} \quad n = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Para $n = 1, 2$, el resultado es el mismo que para a_n , pero con $n = -2, -1$. Para $n \geq 3$, la función interior de la integral es analítica en $z = 1$ y la integral es cero. Entonces la serie será:

$$\frac{1}{(1-z^2)^2} = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}} (z-1)^n$$

Ejercicio 9 Obtenga con detalle las expresiones de las series de las funciones siguientes

- 1) z^2 , dentro cualquier trayectoria cerrada.
- 2) $\cos(z)/(z+1)^2$, dentro de círculo de radio $1/2$ y centro en cero.
- 3) $\cos(z)/(z+1)^2$, dentro de un círculo de radio 2 y centro en cero.
- 4) $\frac{2z+1}{z+z^2}$, dentro de un círculo de radio 2 y centro en cero.
- 5) $\frac{2z+1}{z+z^2}$, dentro de un círculo de radio $1/2$ y centro en cero.
- 6) $\frac{4z^3+z^2-1}{z(z^2-1)}$, dentro de un círculo de radio 2 y centro en cero.
- 7) $\frac{4z^3+z^2-1}{z(z^2-1)}$, dentro de un círculo de radio $1/2$ y centro en cero.

8) $\frac{z^2-2z-1}{z+z^2}$, donde γ es un círculo de radio $1/2$ y centro en 1 .

En algunas ocasiones conviene realizar algunos cambios a las funciones analíticas para poder encontrar su serie de Laurent. Por ejemplo, cuando una función analítica se puede descomponer en el producto de dos o más funciones analíticas más simples. En este caso es posible encontrar sus series utilizando la siguiente proposición.

Proposición 10 *La serie del producto de dos funciones analíticas converge hacia el producto de sus series para todo los puntos interiores a las dos circunferencias de convergencia.*

Dem. 11 Sean

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ y } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

analíticas en una región R . Entonces, como $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en esa región, su serie de Maclaurin existe en la región. Se sigue que $f(z)g(z)$ es analítica ahí y

$$\begin{aligned} f(z)g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n && \text{con} \\ &= a_0 b_0 + && c_0 = f(0)g(0) = a_0 b_0 \\ &(a_0 b_1 + a_1 b_0)z + && c_1 = f(0)g'(0) + f'(0)g(0) = a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ &(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)z^2 + && c_2 = \frac{1}{2!}[f(0)g''(0) + 2f'(0)g'(0) + f''(0)g(0)] \\ &\vdots && = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \text{ etc.} \end{aligned}$$

□

Polos y Residuos

(Funciones analíticas y Singularidades)

Cuando una función compleja no es analítica en un punto determinado, se dice que la función es singular en este punto. Al punto mismo se le llama singularidad o polo. Formalmente se define:

Definición 12 *Si la función compleja $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es analítica en cada punto de una vecindad abierta de z_0 , pero no lo es en el punto z_0 , se dice que z_0 es un punto singular de f o que f es singular en z_0 .*

Veamos un ejemplo de singularidad.

Ejemplo 13 *Consideremos la función compleja $f(z) = 1/z$. Su derivada es $f' = -1/z^2$. Esta función se puede escribir como*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{x+iy} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{iy}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

por lo que las funciones correspondientes reales u y v son como sigue: $u = x/(x^2 + y^2)$, $v = -y/(x^2 + y^2)$. Entonces las condiciones de Cauchy-Riemann se ven como

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

Estas condiciones no están definidas en el punto $z = 0$. En consecuencia, la función es analítica para cualquier $z \neq 0$, pero no para $z = 0$, entonces $z = 0$ es un punto singular de f .

Comentario 14 Todo polinomio en una variable compleja z , $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ es una función compleja analítica, ya que sus derivadas existen para toda $z \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 15 Señale los puntos singulares de las funciones del ejercicio ??.

Ya estamos listos para introducir el teorema más importante para resolver integrales complicadas. Como ya conocemos la serie de Laurent de una función, se pueden entonces conocer los coeficientes de la serie y con esto es posible conocer los polos y también los residuos, como veremos más adelante. La idea es muy simple, los coeficientes de la serie son de hecho integrales de funciones, pero la serie se puede encontrar por otros métodos. Entonces, conocidos los coeficientes, podemos igualarlos a las integrales correspondientes. Estos coeficientes son los que se necesita para poder evaluar integrales. Vamos a iniciar esta sección con la siguiente definición.

Definición 16 Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en todos los puntos de la región R , excepto en $z_0 \in R$. Entonces z_0 se llama **punto singular aislado** de f en R .

Notación 17 Otra manera de enunciar esta definición es diciendo que z_0 es un punto singular aislado, si en toda la región alrededor de $R_{z_0} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| \leq r_1\}$, f es analítica.

Otra concepto que usaremos mucho en lo que sigue es el concepto de residuo, que es simplemente el coeficiente principal de la serie de Laurent de una función, formalmente tenemos.

Definición 18 Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en R con el punto singular aislado z_0 y sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots$$

la serie de Laurent de f alrededor de z_0 . Al coeficiente b_1 de la serie se le llama **residuo**.

Comentario 19 Observemos que b_1 tiene la forma

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z') dz',$$

donde γ es cualquier curva cerrada que envuelva solo al punto singular aislado z_0 de f , pero no a otro más.

Comentario 20 Para calcular los residuos en ocasiones es muy útil la fórmula

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad (1)$$

Para comprender mejor estas definiciones, vamos a ver algunos ejemplos.

Ejemplo 21 Sea

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z^3}$$

Alrededor de $z_0 = 0$, la serie de Laurent de esta función es

$$\frac{\cos(z)}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{z} + \frac{1}{4!} z - \frac{1}{6!} z^3 + \dots \quad \text{para } |z| < 0$$

El residuo será $b_1 = -1/2$. Esto quiere decir que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\cos(z)}{z^3} dz = -\frac{1}{2}$$

donde γ es cualquier trayectoria cerrada que rodee a $z_0 = 0$.

Ejemplo 22 Vamos a encontrar los residuos de la función

$$f(z) = \frac{5z - 2}{z(z - 1)},$$

alrededor de $|z| = 2$. Dentro de $|z| = 2$ están las dos singularidades aisladas $z = 0$ y $z = 1$. Primero encontremos la serie de Laurent alrededor de $z = 0$, pero con $|z| < 1$. Para esto, simplemente separemos las series

$$\begin{aligned} \frac{5z - 2}{z(z - 1)} &= \frac{5}{z - 1} - \frac{2}{z(z - 1)} \\ &= \left(5 - \frac{2}{z}\right) \frac{1}{z - 1} \\ &= \left(-5 + \frac{2}{z}\right) (1 + z + z^2 + \dots) \\ &= \frac{2}{z} - 3 - 3z - 3z^2 - \dots \end{aligned}$$

Así, el residuo para $0 < |z| < 1$ es $K_1 = 2$. Ahora vamos a buscar la serie alrededor del otro polo $z = 1$. Para hacer esto, busquemos una descomposición

de la función de tal forma que podamos expandirla en series alrededor de $z = 1$. Podemos hacer

$$\begin{aligned} \frac{5z-2}{z(z-1)} &= \left(\frac{5z-5+3}{z-1} \right) \frac{1}{z} = \left(5 + \frac{3}{z-1} \right) \frac{1}{z} \\ &= \left(5 + \frac{3}{z-1} \right) [1 - (z-1) + (z-1)^2 - \dots] \\ &= 5 - 5(z-1) + 5(z-1)^2 + \frac{3}{z-1} - 3 + 3(z-1) - 3(z-1)^2 + \dots \\ &= \frac{3}{z-1} + 2 - 2(z-1) + 2(z-1)^2 - \dots \end{aligned}$$

para $0 < |z-1| < 1$, por lo que el residuo es $K_2 = 3$.

Ejercicio 23 Obtenga los residuos de las funciones del ejercicio 9.

El cálculo anterior es genérico en funciones analíticas y es otro de los resultados más importantes de la variable compleja. Con este resultado ya podemos demostrar el teorema de los residuos.

Teorema 24 (del Residuo) Sea $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ analítica en una región R , excepto en un número finito de puntos singulares aislados, sea γ una curva cerrada que rodea un número finito de esos puntos. Sean K_1, \dots, K_n los residuos de f alrededor de estos puntos. Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (K_1 + K_2 + \dots + K_n)$$

Dem. 25 Tomemos la curva γ y la descomponemos en secciones que rodeen a los polos, como se muestra en la figura 2. Entonces se tiene

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz = 2\pi i (K_1 + K_2 + \dots + K_n)$$

□

Ejemplo 26 Vamos a evaluar la integral

$$\int \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$$

alrededor de $|z| = 2$. Como vimos en el ejemplo 24, la serie de Laurent alrededor de $z = 0$ es

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{2}{z} - 3 - 3z - 3z^2 \dots$$

y el residuo por $0 < |z| < 1$ es $K_1 = 2$. Para el otro residuo teníamos

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{3}{z-1} + 2 - 2(z-1) + 2(z-1)^2$$

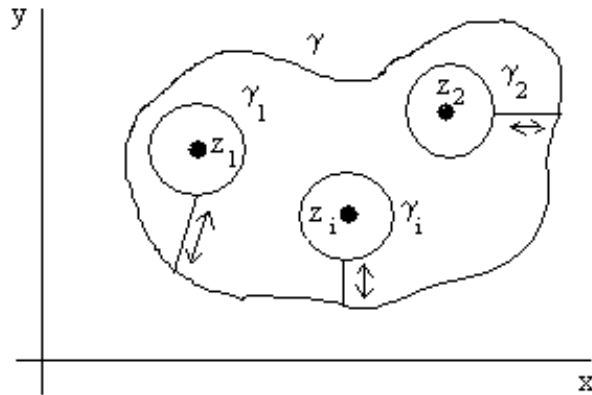


Figure 2: Trayectoria de integración utilizada en el teorema del residuo.

para $0 < |z - 1| < 1$, por lo que el residuo es $K_2 = 3$. Entonces la integral sera

$$\int_{\gamma} \frac{5z - 2}{z(z - 1)} dz = 2\pi i(2 + 3) = 10\pi i$$

Para comprobar que esto es cierto, evaluemos la integral directamente

$$\int_{\gamma} \frac{5z - 2}{z(z - 1)} dz = \int_{\gamma} \frac{2}{z} dz + \int_{\gamma} \frac{3}{z - 1} dz = 2\pi i(2 + 3)$$

O hagamos el desarrollo en series de otra forma alternativa que abarque los dos polos, por ejemplo, para $|z| > 1$ podemos hacer

$$\frac{5z - 2}{z(z - 1)} = \frac{5z - 2}{z^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = (5z - 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+2}}$$

por lo que el residuo aqui es 5, así que al final, con cualquiera de las formás de calcular la integral, obtenemos el mismo resultado, como debe ser.

Ejercicio 27 Usando el teorema del residuo, calcular las integrales siguientes

1) $\int_{\gamma} \frac{\cos(z)}{(z+1)^2} dz$

2) $\int_{\gamma} \frac{2z+1}{z+z^2} dz$

3) $\int_{\gamma} \frac{4z^3+z^2-1}{z(z^2-1)} dz$

$$4) \int_{\gamma} \frac{z^2 - 2z - 1}{z + z^2} dz$$

$$5) \int_{\gamma} \frac{e^z}{(z^2 + 1)^5} dz$$

$$6) \int_{\gamma} \frac{\cos(z)}{(z-1)^5} dz$$

$$7) \int_{\gamma} \frac{3z^3 - z^2 + 5z + 1}{(z^2 - 1)^2} dz$$

En ocasiones hay funciones que tienen muchos polos en el mismo punto, o de otra manera, algún polo es múltiple, es decir, el polo está elevado a alguna potencia. Estos polos múltiples reciben un nombre especial.

Definición 28 Sea $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ analítica alrededor de z y sea.

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_a}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

la serie de Laurent de $f(z)$ alrededor de z_0 , tal que $b_m \neq 0$ pero $b_{m+1}, b_{m+2}, \dots = 0$. Entonces se dice que z_0 es un **polo de orden** m . Si $m = 1$, se dice que z_0 es un **polo simple**.

Podemos construir una fórmula análoga a la fórmula (1) para calcular los residuos de polos de orden arbitrario. Esta fórmula está dada en la siguiente proposición.

Proposición 29 Sea $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ univaluada, tal que, para algún m entero y positivo

$$F(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

es analítica en z_0 y $F(z_0) \neq 0$. Entonces $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 . El residuo será $F^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!$

Dem. 30 Supongamos que $f(z)$ tiene un polo de orden m , por lo que $b_m \neq 0$, pero todos los $b_{m+k} = 0$, con $k > 1$. Vamos a construir la función $F(z) = (z - z_0)^m f(z)$, se tiene

$$F(z) = b_1 (z - z_0)^{m-1} + b_a (z - z_0)^{m-2} + \dots + b_m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m}$$

Claramente $F(z_0) = b_m \neq 0$. Si tomamos la $m-1$ derivada de $F(z)$, se obtiene que

$$\frac{d^{m-1} F(z)}{dz^{m-1}} = (m-1)! b_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+m-1)! a_n (z - z_0)^{n+1}$$

Por lo que $b_1 = 1/(m-1)! F^{(m-1)}(z_0)$

□

Comentario 31 Para calcular los polos de orden m en general es conveniente utilizar la fórmula

$$b_m = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)}}{(m-1)!} \quad (2)$$

Usemos esta fórmula en un ejemplo sencillo.

Ejemplo 32 Tomemos

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2}$$

es claro que esta función se puede descomponer como

$$\frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2} = \frac{3}{z - 2} + z$$

Entonces esta expresión tiene un residuo $K_1 = 3$ y un polo simple en $z_0 = 2$. Para llegar al mismo resultado, ahora calculemos $F(z)$, obtenemos

$$F(z = 2) = (z - 2)f(z)|_{z=2} = z^2 - 2z + 3|_{z=2} = 3$$

como antes.

Ejemplo 33 Encontramos los residuos de la función

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 9)(z^2 + 4)^2}$$

Esta función tiene 2 polos simples en $\pm 3i$ y dos dobles en $\pm 2i$. Para calcular los residuos usemos la fórmula (1)

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{z^2}{(z + 3i)(z^2 + 4)^2} = -\frac{3}{50i}$$

y

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow -3i} \frac{z^2}{(z - 3i)(z^2 + 4)^2} = \frac{3}{50i}$$

Los polos dobles los calculamos usando la fórmula (2)

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow 2i} ((z - 2i)^2 f(z))' \\ &= \left(\frac{z^2}{(z^2 + 9)(z + 2i)} \right)' = -\frac{13i}{200} \end{aligned}$$

análogamente

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow -2i} ((z - 2i)^2 f(z))' \\ &= \left(\frac{z^2}{(z^2 + 9)(z - 2i)} \right)' = \frac{13i}{200} \end{aligned}$$

La fórmula para obtener el residuo también puede ser usada para otros fines. Por ejemplo, vamos a usarla para evaluar el límite de la función

$$g(z) = 2\frac{\cosh(z)}{z^2} - 2\frac{\sinh(z)}{z^3}$$

en cero.

Ejemplo 34 *Tomemos la serie*

$$f(z) = \frac{\sinh(z)}{z^4}$$

Su función $F(z)$ correspondiente debe ser

$$F(z) = z^m \frac{\sinh(z)}{z^4}$$

Si $m \geq 4$, $F(0) = 0$. Pero si $m = 3$,

$$F(z=0) = \left. \frac{\sinh(z)}{z} \right|_{z=0} = 1$$

Entonces

$$\frac{1}{2!} \frac{d^2 F(z=0)}{dz^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh(z)}{z} - 2\frac{\cosh(z)}{z^2} + 2\frac{\sinh(z)}{z^3} \right) \Big|_{z=0}$$

Que es justamente $1/2!F''(0) = 1/2 \lim_{z \rightarrow 0} (\sinh(z)/z - g(z))$, que es el límite que buscamos. Para saber cual es su valor, vamos a evaluar la serie de Laurent de la función $f(z)$. Se obtiene

$$f(z) = \frac{\sinh(z)}{z^4} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \frac{1}{5!} z + \frac{1}{7!} z^3 + \dots$$

Por lo que $\sinh(z)/z^4$ tiene un residuo igual a $1/6$ y un polo triple en $z = 0$. Usando este resultado podemos evaluar la función

$$\frac{1}{2!} F''(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh(z)}{z} - 2\frac{\cosh(z)}{z^2} + 2\frac{\sinh(z)}{z^3} \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{6}$$

Como $\lim_{z \rightarrow 0} \sinh(z)/z - g(z) = 1/3$ y $\lim_{z \rightarrow 0} \sinh(z)/z = 1$, se tiene que $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = 2/3$

Como ya habrán notado, las singularidades de algunas funciones tienen la característica de poder ser eliminadas transformando la función original en otra que se convierte en analítica. A estas singularidades se les llama removibles, porque de hecho se pueden evitar, por ejemplo, multiplicando la función por algún factor, como es el caso de la definición de la función F . Formalmente estas singularidades se definen como sigue.

Definición 35 Sea $F_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ analítica en una región R , excepto para $z = z_0 \in \mathcal{C}$. Sea $F(z) = F_1(z)$ para toda $z \neq z_0$ y $F(z_0) = k$, con $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. Si $F(z)$ es analítica, se dice que z_0 es una **singularidad removible o evitable**.

Para aclarar esta definición, veamos algunos ejemplos y ejercicios.

Ejemplo 36 Sea $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ analítica en R pero con un polo $z = z_0$ de orden m . Si definimos $F = (z - z_0)^m f(z)$, esta nueva función es analítica y tiene una singularidad en $z = z_0$ que es removible.

Ejemplo 37 Sea

$$f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots}$$

Esta función es singular en $z = 0$ y tiene un polo doble. De hecho

$$\frac{1}{z(e^z - 1)} = \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{1}{2}z + \dots\right)$$

El residuo de $f(z)$ es $K_1 = -\frac{1}{2}$. Sin embargo, la función $F = z^2 f(z)$ es analítica en $z = 0$, por lo que $z = 0$ es un polo removible de F .

Ejercicio 38 Encontrar los polos y residuos de las siguientes funciones.

1) $\frac{\cos(z)}{(z+1)^2}$

2) $\frac{2z+1}{z+z^2}$

3) $\frac{4z^3+z^2-1}{z(z^2-1)}$

4) $\frac{z^2-2z-1}{z+z^2}$

5) $\frac{e^z}{(z^2+1)^5}$

6) $\frac{\cos(z)}{(z-1)^5}$

7) $\frac{3z^3-z^2+5z+1}{(z^2-1)^2}$

Evaluación de Integrales

Una de las aplicaciones directas de los resultados anteriores es la posibilidad de desarrollar algunos métodos para evaluar integrales que son muy complicadas. Para explicar estos métodos, lo más conveniente es dar ejemplos de como se utilizan éstos. En esta sección veremos algunos ejemplos de evaluación de integrales usando los resultados de variable compleja.

0.1 Integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

Ejemplo 39 Vamos a encontrar la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$$

Tomemos la función $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$, tienen dos polos simples en $+i$ y $-i$. Sea γ una curva cerrada, pasando por el eje real y haciendo un semicírculo, como en la figura 3. Se tiene

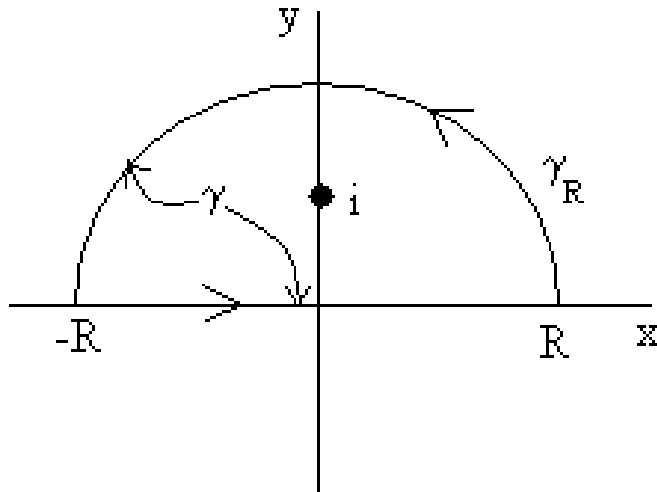


Figure 3: Curva cerrada, pasando por el eje real y haciendo un semicírculo que contiene al polo simple $+i$.

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^R \frac{dx}{x^2+1} + \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2+1} &= \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1} \\
&= \int_{\gamma} \frac{i dz}{2(z+i)} - \int_{\gamma} \frac{i dz}{2(z-i)} \\
&= 2\pi i \left(0 - \frac{1}{2}i\right) = \pi
\end{aligned}$$

donde γ_R es el semicírculo superior. γ_R es tal que $|z| = R$ y como $|z^2 + 1| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1$ se tiene

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \int_{\gamma_R} \frac{|dz|}{R^2-1} = \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

así que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$$

Ejemplo 40 Evaluar

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$$

Consideremos a la función

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$$

Como vimos en el ejercicio 35, esta función tiene 2 polos simples en $\pm 3i$ y dos dobles en $\pm 2i$, cuyos residuos están dados por $K_{3i} = \frac{3i}{50}$, $K_{-3i} = -\frac{3i}{50}$, $K_{2i} = -\frac{13i}{200}$ y $K_{-2i} = \frac{13i}{200}$. Entonces la integral sobre el contorno se toma como en el ejemplo anterior, será

$$\begin{aligned}
&\int_{-R}^R \frac{dz}{(z^2+9)(z^2+4)^2} + \int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+9)(z^2+4)^2} \\
&= \int_{\gamma} \frac{dz}{(z^2+9)(z^2+4)^2} \\
&= 2\pi i (K_1 + K_3) = 2\pi i \left(\frac{3i}{50} - \frac{13i}{200} \right) = \frac{\pi}{100}
\end{aligned}$$

Usando los mismos argumentos del ejemplo anterior, se llega a

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{200}$$

En general, si $f(z)$ es de la forma

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

donde $p(z)$ y $q(z)$ son ambas analíticas, pero $f(z)$ tiene un polo simple en $z = z_0$, con $f(z_0) \neq 0$, esto implica que $q(z_0) = 0$, pero $q'(z_0) \neq 0$. Podemos escribir.

$$f(z) = \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z - z_0) + p''(z_0)(z - z_0)^2/2! + \dots}{q(z_0) + q'(z_0)(z - z_0) + q''(z_0)(z - z_0)^2/2! + \dots}$$

de donde se sigue que

$$F(z) = (z - z_0)f(z) = \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z - z_0) + \dots}{q'(z_0) + q''(z_0)(z - z_0)/2! + \dots}$$

es analítica. Del polo simple podemos calcular el residuo. Si observamos que

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Análogamente, si el polo es doble $q(z_0) = q'(z_0) = 0$ pero $q''(z_0) \neq 0$ y

$$b_2 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{((z - z_0)^2 f(z))'}{2!} = \frac{2}{3q''(z_0)^2} (3p'(z_0)q''(z_0) - p(z_0)q'''(z_0))$$

Ejercicio 41 Evalúen las siguientes integrales

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3}{8}\pi$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4x+13)^2} = \frac{13}{54}\pi$$

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{2}{3}\pi$$

$$4) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\pi$$

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x) dx}{1+x^6} = 0$$

0.2 Integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(ixh) dx$$

Estas integrales son de suma importancia porque son las transformadas de Fourier de la función $f(x)$. Estas se pueden resolver de la siguiente forma

Lema 42 Sea $f(x)$ una función tal que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ y $h > 0$. Entonces la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(ixh) dx = 2\pi i [\text{residuos del plano medio superior}]$$

Dem. 43 Consideremos la integral a lo largo de la curva γ dada en la figura 3. Claramente

$$\int_{\gamma} f(z) \exp(iz) dz = \int_{-R}^R f(z) \exp(iz) dz + \int_{\gamma_R} f(z) \exp(iz) dz$$

Vamos a demostrar que la segunda integral del lado derecho de la identidad se anula cuando $R \rightarrow \infty$. Ahora bien, como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, esto implica que para $R \gg 1$ existe siempre un número real $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$. Si hacemos $z = Re^{i\theta} = R[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$, se tiene que para $R \gg 1$

$$\begin{aligned} I_n &= \left| \int_{\gamma_R} f(z) \exp(iz) dz \right| \leq M \left| \int_0^{\pi} \exp(hR[i \cos(\theta) - \sin(\theta)]) iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq MR \left| \int_0^{\pi} \exp(hR i [\cos(\theta) + \theta]) \exp(-hR \sin(\theta)) d\theta \right| \end{aligned}$$

La primera es la integral de una función periódica y por tanto es finita y positiva, digamos igual a I_0 , entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} I_n &= MR \left| I_0 \int_0^{\pi} \exp(-hR \sin(\theta)) d\theta \right| \\ &\leq 2MRI_0 \int_0^{\pi/2} \exp(-hR \sin(\theta)) d\theta \end{aligned}$$

donde hemos usado la simetría de $\sin(\theta)$ entre $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Pero en este intervalo, la función $\sin(\theta) \geq 2\theta/\pi$, entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} I_n &\leq 2MRI_0 \int_0^{\pi/2} \exp\left(-2hR \frac{\theta}{\pi}\right) d\theta \\ &= -MI_0 \pi \frac{e^{-hR} - 1}{h} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (3)$$

dado que $h > 0$ y que $M \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$. □

Ejemplo 44 Vamos a evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ixT)}{k^2 - x^2} dx$$

Consideremos la integral

$$\int_{\gamma} \frac{\exp(izT)}{k^2 - z^2} dz$$

Para $T > 0$, γ es la trayectoria de la figura 4. Se tiene que

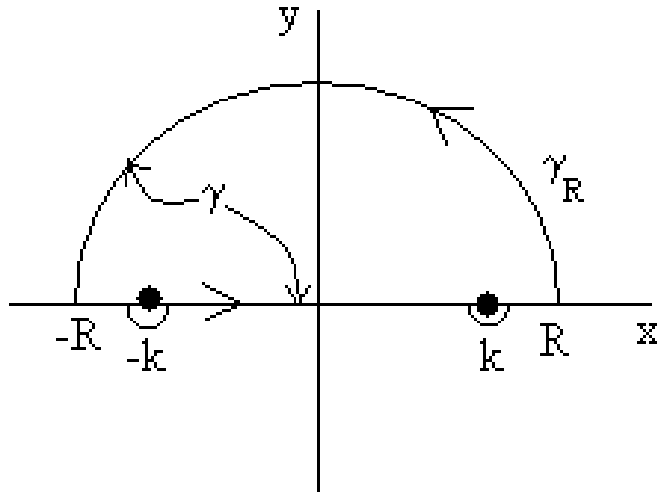


Figure 4: Curva cerrada, pasando por el eje real y haciendo un semicírculo que contienen los dos polos simples en $+k$ y $-k$.

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \frac{\exp(izT)}{k^2 - z^2} dz &= \frac{1}{2k} \int_{\gamma} \frac{\exp(izT)}{z + k} dz - \frac{1}{2k} \int_{\gamma} \frac{\exp(izT)}{z - k} dz \\
 &= \frac{1}{2k} [\exp(-ikT) - \exp(ikT)] \\
 &= -\frac{i}{k} \sin(kT)
 \end{aligned}$$

Para $T < 0$, tomemos la misma trayectoria pero ahora con el semicírculo hacia abajo, para que la integral (3) se integre de 0 a $-\pi/2$. Solo que en este caso los polos quedan fuera de la trayectoria y por tanto la integral se anula, por lo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ixT)}{k^2 - x^2} dx = \begin{cases} -\frac{i}{k} \sin(kT) & \text{para } T > 0 \\ 0 & \text{para } T < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 45 Vamos a evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i(xR + yT))}{y - ix_0 x^2} dx dy$$

Podemos llevar a cabo la integración parte por parte. Primero integremos con respecto a y . La integral que vamos a resolver se ve entonces como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ixR) dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iyT)}{y - z_0} dy$$

donde $z_0 = ix_0x^2$. Observemos que esta integral se puede llevar a cabo usando una trayectoria como la del ejercicio anterior, donde solo se tiene el polo $y = z_0$. Ahora bien, si $T > 0$, la trayectoria cubre el polo z_0 , pero si $T < 0$ no lo cubre. Por lo que se obtiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ixR) dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iyT)}{y - z_0} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ixR - x_0x^2T) dx$$

para $T > 0$, y la integral es cero para $T < 0$. Queda resolver la integral anterior, llamada la **integral de Gauss**. Para evaluarla, primero completamos el cuadrado en la exponencial, se obtiene

$$e^{-R^2/4b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bz^2} dz$$

donde hemos llamado $b = x_0T$ y $a z = x - R/2b$. Esta integral puede evaluarse usando el siguiente método. Si llamamos la integral I_p , lo que vamos a hacer es integrar $\sqrt{I_p^2}$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I_p &= e^{-R^2/4b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bz^2} dz = e^{-R^2/4b} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-by^2} dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{-R^2/4b} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(x^2+y^2)} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{-R^2/4b} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-br^2} r dr d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{-R^2/4b} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp\left(\frac{-R^2}{4x_0T}\right) \sqrt{\frac{\pi}{x_0T}} \end{aligned}$$

si $T > 0$, y cero si $T < 0$. Obsérvese que aquí no utilizamos el teorema del residuo. Para evaluar la última integral, claramente se utilizaron coordenadas polares.

Encontrar los polos y residuos de las siguientes funciones.

Ejercicio 46 Evalúen las siguientes integrales

- 1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x+1)^2} e^{iTx} dx$
- 2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(x^2+1)^5} e^{iTx} dx$
- 3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 5x + 1}{(x^2 - 1)^2} e^{iTx} dx$
- 4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x-1)^5} e^{iTx} dx$

0.3 Integrales de la forma

$$\int_0^{2\pi} F(\sin(\theta), \cos(\theta)) d\theta$$

Para este tipo de integrales, la transformación $z = e^{i\theta}$, $dz = iz d\theta$ es siempre muy útil, ya que $\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$ y $\cos(\theta) = \frac{1}{2i}(z + z^{-1})$. Este método es genérico y nosotros lo vamos a mostrar con un ejemplo.

Ejemplo 47 *Vamos a evaluar la integral*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \sin(\theta)} \quad (4)$$

efectuando la transformación para este tipo de integrales, se obtiene:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma} \frac{dz}{iz \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2i}(z - z^{-1}) \right)} \\ &= \int_{\gamma} \frac{4dz}{2z^2 + 5iz - 2} \\ &= \int_{\gamma} \frac{2dz}{(z + 2i)(z + \frac{1}{2}i)} \\ &= \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

donde la integración se hizo a lo largo de la curva γ dada por $|z| = 1$, como en la figura 5.

Ejercicio 48 *Evalúen las integrales*

1.- $\int_0^{2\pi} (\cos(\theta) \sin(\theta))^2 d\theta$

2.- $\int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin^2(\theta) d\theta$

3.- $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+2\sin^2(\theta)}$

4.- $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3\cos^2(\theta)+2\sin^2(\theta)}$

5.- $\int_0^{2\pi} \frac{i \cos(\theta) d\theta}{(\cos^2(\theta)+2i \sin(\theta) \cos(\theta)-\sin^2(\theta)+1)^3} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta) d\theta}{(\cos^2(\theta)+2i \sin(\theta) \cos(\theta)-\sin^2(\theta)+1)^3}$

GEOMETRIA DEL PLANO COMPLEJO

En este capítulo veremos brevemente una parte de la geometría del plano complejo. Nos concentraremos únicamente a dos aspectos, las transformaciones conformes y las superficies de Riemann. Vamos a iniciar con las transformaciones conformes.

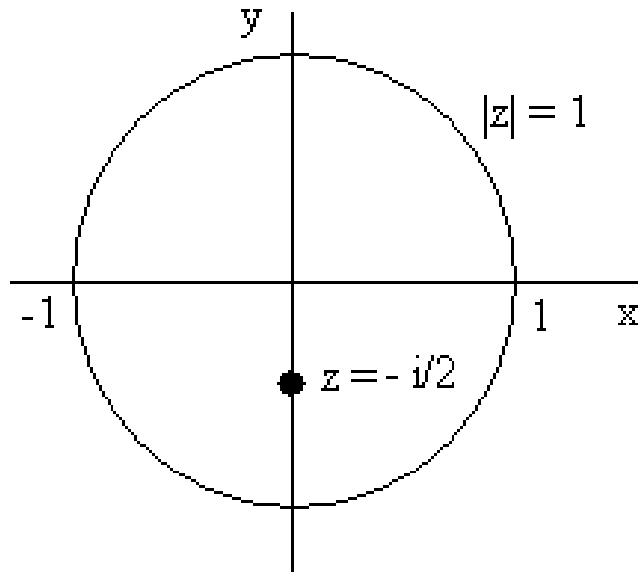


Figure 5: Curva cerrada, pasando por el eje real y haciendo un círculo que contienen al polo simple $z = -i/2$.

Transformaciones Conformes

Las transformaciones conformes se llevan a cabo para poder simplificar un problema. Son muy útiles en la solución de ecuaciones diferenciales, para resolver problemas de física, química, ingeniería y matemáticas en general, entre otros. Su definición es la siguiente:

Definición 49 Una **transformación conforme** en una región $R \subset \mathcal{C}$ es una función $Z : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que Z es analítica y

$$\frac{dZ}{dz} \neq 0$$

en R .

Lo interesante de la función Z es que transforma una región del dominio de ella, en otro región diferente, es decir, a cada punto $z = x + iy$ del plano complejo (x, y) , le asocia otro punto $Z = u(x, y) + iv(x, y)$ del plano complejo (u, v) . Para ver esto, vamos algunos ejemplos.

Ejemplo 50 *Traslaciones.* El ejemplo más simple es sin duda una **traslación conforme**. Sea $Z(z) = Z(x, y) = z + z_0 = x + x_0 + i(y + y_0)$. Entonces, un punto $x + iy$ en el plano complejo, se ve como otro punto $x + x_0 + i(y + y_0)$ en el plano conforme, como en la figura 6

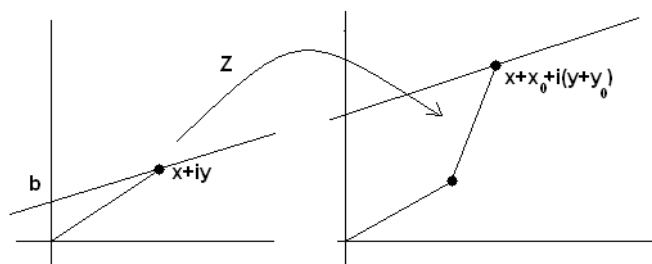


Figure 6: La transformación conforme $Z(z) = z + z_0$, la cual corresponde a una traslación.

A cada punto $z = x + iy$ se le asocia un punto $u = x + x_0$ y $v = y + y_0$. Por ejemplo, una línea en el plano complejo $y = mx + b$, se transforma en $v - y_0 = m(u - x_0) + b$, la cual es una línea paralela a la anterior desplazada, como en la figura 6

Ejemplo 51 Rotaciones. Otro ejemplo interesante es la **rotación conforme**. Ésta está definida como $Z(z) = z z_0$. Para visualizar la transformación, es conveniente escribir ésta en su forma polar. Si $z = r e^{i\theta}$, entonces $Z(z) = r r_0 e^{i(\theta + \theta_0)}$. Es decir, el punto $z = r e^{i\theta}$ fue trasladado una distancia $r \rightarrow r r_0$ y rotado de $\theta \rightarrow \theta + \theta_0$. Vean la figura 7. Por ejemplo, la rotación $z_0 = e^{i\theta_0}$ de

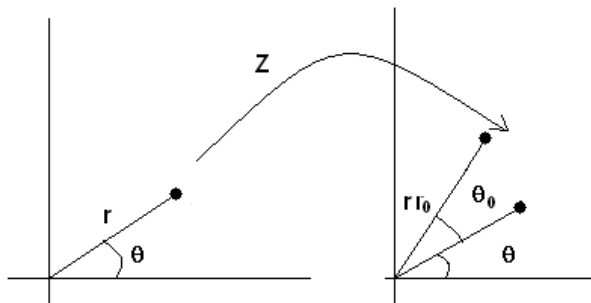


Figure 7: La transformación conforme $Z(z) = z z_0$, la cual corresponde a una rotación del punto z .

un círculo $x^2 + y^2 = z\bar{z} = r^2$ en el plano complejo, deja al círculo invariante, ya que si lo vemos en la representación polar, este queda como $Z\bar{Z} = z z_0 \bar{z} \bar{z}_0 = r^2$.

Ejemplo 52 Inversiones. Tal vez el ejemplo más interesante sea el de la **inversión conforme**. La inversión está definida como $Z(z) = 1/z$ y para visualizarla primero conviene escribir el número z en su forma polar $z = r e^{i\theta}$.

Entonces, la inversión se ve como $Z(z) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$, es decir, la inversión lleva al número z al lado opuesto del plano complejo. Otra forma conveniente de visualizar una inversión es utilizando su forma $Z(x, y) = 1/(x + iy) = (x - iy)/(x^2 + y^2)$. De aquí se ve que una inversión nos lleva al complejo conjugado del número, dividido entre el módulo al cuadrado. Vamos a escribir la forma explícita de la inversión como

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad (5)$$

De donde podemos escribir

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$$

Por ejemplo, una línea recta que pasa por el origen $y = mx$, tras una inversión se vería como esa línea recta pero con la pendiente invertida $-\frac{v}{u^2+v^2} = m\frac{u}{u^2+v^2}$, es decir $v = -mu$. Una línea paralela al eje x , $y = c$, se vería como:

$$\frac{v}{c} + u^2 + v^2 = 0$$

que se puede escribir de otra forma como

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{(2c)^2}$$

el cual es un círculo centrado en $(0, -1/(2c))$, de radio $1/(2c)$. Es decir, una recta paralela al eje x , bajo una inversión es un círculo. En la figura 8 se puede ver el círculo $u^2 + (v + 1/2)^2 = 1/4$, el cual es la inversión de la recta $y = 1$. En general, una recta $y = mx + b$ se vería tras una inversión como:

$$v = -mu - b(u^2 + v^2)$$

Esta última expresión se puede reescribir como

$$\left(v + \frac{1}{2b}\right)^2 + \left(u + \frac{m}{2b}\right)^2 = \frac{1 + m^2}{4b^2} \quad (6)$$

para $b \neq 0$, el cual es claramente un círculo con centro en $-1/(2b)(m, 1)$ y con radio $\sqrt{1 + m^2}/(2b)$, en el plano (u, v) . En la figura 8 se puede ver el círculo $(u + 1/2)^2 + (v + 1/2)^2 = 1/2$, el cual es la inversión de la recta $y = x + 1$. Concluimos que la inversión de una recta que pasa por el origen es siempre otra recta con pendiente invertida o un círculo, si la recta no pasa por el origen.

De la misma manera podemos visualizar un círculo después de una inversión. Sea el círculo $z\bar{z} = x^2 + y^2 = r^2$, con r constante. Usando las expresiones anteriores, el círculo se ve como:

$$x^2 + y^2 = \frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2} = r^2$$

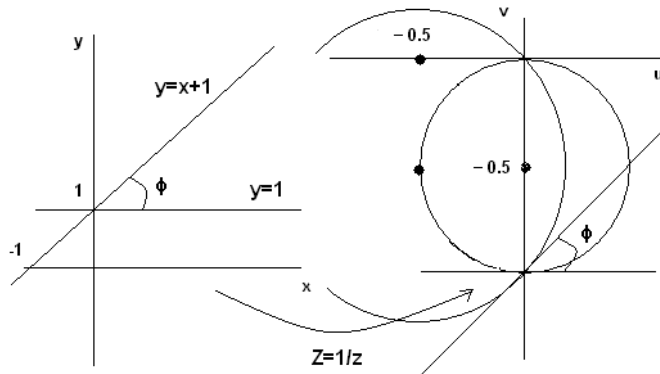


Figure 8: La transformación conforme $Z(z) = 1/z$, de la recta $y = x + 1$, en el plano (u, v) .

de donde se sigue que:

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{r^2}$$

Es decir, se obtiene el mismo círculo, pero con un radio invertido.

Vamos a observar una característica muy interesante de las transformaciones conformes. Veamos primero el ejemplo 52 de las traslaciones conformes. Al trasladar una recta del plano (x, y) al plano (u, v) , la pendiente de las rectas no se altera, así que si dos curvas en el plano (x, y) se cruzan en un punto, el ángulo que forman entre ellas se conservará en el plano (u, v) . Esta afirmación no es tan evidente en el ejemplo 54 de las inversiones conformes. Sin embargo, sean dos rectas que se cruzan en el plano (x, y) , por ejemplo $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$ y supongamos que se cruzan en el punto (x_0, y_0) . En este punto se tiene que:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \\ y_0 &= \frac{m_1 b_2 - m_2 b_1}{m_1 - m_2} \end{aligned} \quad (7)$$

Tomemos la inversión conforme de las rectas como en el ejemplo 54. Con estos valores, también podemos escribir el punto de cruce (u_0, v_0) de los círculos correspondientes en el plano (u, v) , usando la fórmula (5) y los valores (7). En el plano (u, v) , la pendiente M de la recta tangente en cualquier punto (u, v) de los círculos correspondientes a las rectas en (x, y) se obtiene derivando (6), es decir:

$$M = \frac{dv}{du} = -\frac{u + \frac{m}{2b}}{v + \frac{1}{2b}} \quad (8)$$

En el punto (u_0, v_0) , el círculo 1 tendrá una recta tangente con pendiente M_1 y el círculo 2, una recta tangente con pendiente M_2 , dadas por (8), con sus valores correspondientes de m_1, b_1, m_2 y b_2 . Ahora calculemos los ángulos que forman dichas rectas. Lo más simple es calcular la tangente de su diferencia, es decir:

$$\tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{M_2 - M_1}{1 + M_1 M_2} \quad (9)$$

donde θ_1 es el ángulo que forma la recta tangente al círculo 1 en el punto (u_0, v_0) con el eje u y θ_2 es el correspondiente para el círculo 2. Ahora sustituimos los valores de M_1 y M_2 en términos de las constantes de las rectas y (después de mucha álgebra) se obtiene:

$$\tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$$

donde ahora α_1 es el ángulo que forma la recta 1 con el eje x y α_2 , el que forma la recta 2. Es decir, de nuevo la diferencia entre los ángulos se conserva. En la figura 8 se puede ver como las rectas $y = x + 1$ y $y = 1$ se cruzan en $(0, 1)$. Los círculos correspondientes se cruzan en el plano (u, v) en el punto $(0, -1)$. En este punto las rectas tangentes a cada círculo forman un ángulo igual que las rectas correspondientes en el plano (x, y) . Lo que vamos a probar ahora es que esta propiedad es general en las transformaciones conformes.

Teorema 53 Sean α_1 y α_2 los ángulos de las rectas tangentes a dos curvas C_1 y C_2 respectivamente en un punto (x_0, y_0) donde estas curvas se cruzan. Sean $Z : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ una transformación conforme y C'_1 y C'_2 las curvas transformadas bajo Z de C_1 y C_2 , respectivamente. Sea θ_1 el ángulo con respecto a u de la curva tangente de C'_1 en el punto $Z(x_0, y_0) = (u_0, v_0)$ y θ_2 el ángulo de la curva tangente de C'_2 . Entonces se cumple que

$$\theta_1 - \theta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$$

Dem. 54 Por definición, la transformación conforme Z cumple con que

$$\left. \frac{dZ}{dz} \right|_{z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left. \frac{\Delta Z}{\Delta z} \right|_{z_0} = r e^{i\phi} \Big|_{z_0} \neq 0$$

Por supuesto el ángulo ϕ depende de z , pero para un punto fijo z_0 éste ángulo es una constante. En su forma polar, para que dos números complejos sean iguales, su módulo y sus argumentos deben coincidir. Entonces, los argumentos de la ecuación anterior son:

$$\begin{aligned} \phi &= \arg \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta Z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta Z}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta Z - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z \\ &= \theta - \alpha \end{aligned}$$

como se muestra en la figura 9. Supongamos que tenemos las dos curvas, C_1 y C_2 en el plano (x, y) y se cruzan en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$. En el plano (u, v)

estas curvas son C'_1 y C'_2 . Para la curva 1 se tiene que $\phi = \theta_1 - \alpha_1$ y para la curva 2 $\phi = \theta_2 - \alpha_2$, de tal forma que:

$$\theta_1 - \theta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$$

□

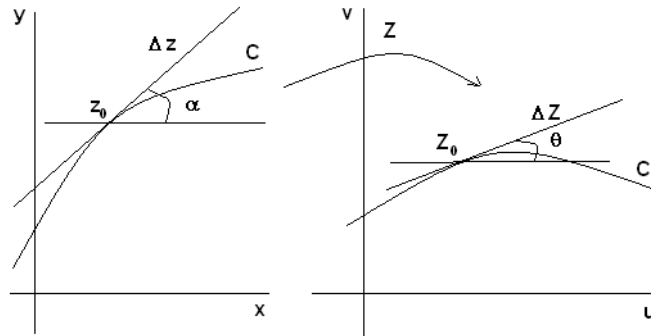


Figure 9: Los argumentos de la transformación conforme Z , en el límite cuando Δz va a cero.

Un ejemplo muy interesante de una transformación conforme no lineal es el siguiente:

Ejemplo 55 Sea $Z = z^2$ una transformación conforme. Esta transformación está dada por:

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

A esta transformación se le conoce como **coordenadas hiperbólicas**, ya que las líneas $u = x^2 - y^2 = \text{constante}$ y $v = 2xy = \text{constante}$, forman hipérbolas en el plano (x, y) . Lo interesante del teorema anterior es que como la transformación lleva hipérbolas del plano (x, y) a líneas perpendiculares al plano (u, v) , como se ve en la figura 10, las hipérbolas en el plano (x, y) forman un sistema ortogonal de coordenadas, por eso el nombre de coordenadas hiperbólicas.

Existen muchos más ejemplos de este tipo de transformaciones, pero es mejor que el lector las estudie en forma de ejercicios.

Ejercicio 56 Consideremos las sucesión de transformaciones conformes

- 1.- $z_1 = z + \frac{d}{c}$
- 2.- $z_2 = c^2 z_1$
- 3.- $z_3 = \frac{1}{z_2}$
- 4.- $z_4 = (bc - ad)z_3$
- 5.- $z_5 = \frac{a}{c} + z_4$

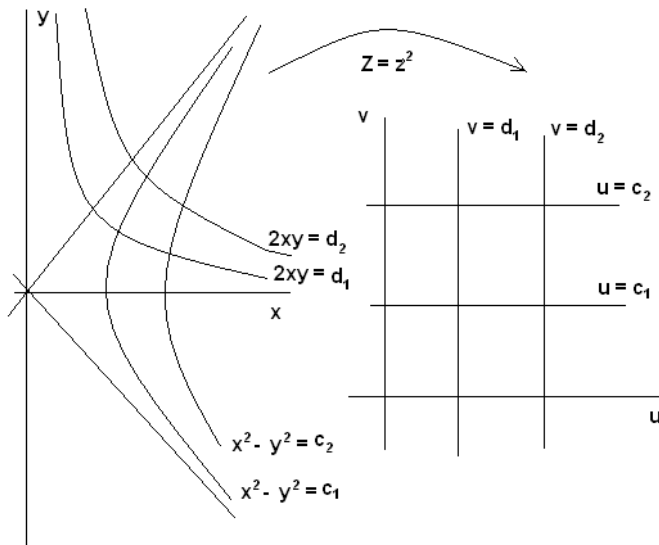


Figure 10: La transformación conforme $Z = z^2$, la cual transforma coordenadas hiperbólicas en coordenadas castesianas.

Tomen sucesivamente estas transformaciones y encuentren el resultado final y la condición para que esta última sea una transformación conforme. Sean el círculo $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ y la recta $y = x + 1$. Encuentren las curvas resultantes despues de la quinta transformación sucesiva de estas dos curvas. A esta transformación se le llama la **transformación homográfica**.

Ejercicio 57 Examinen la transformación conforme

$$Z = 2 \arctan(ia z)$$

Den sus transformaciones del plano (x, y) al plano (u, v) y viceversa explícitamente. Encuentren la transformación del círculo $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ y de la recta $y = x + 1$ bajo esta transformación.

Superficies de Riemann

En la sección anterior vimos como la función $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, tal que $f(z) = z^2$ transforma puntos de un plano complejo a otro. En su forma polar, esta función también se puede escribir como $f(z = re^{i\theta}) = r^2 e^{2i\theta}$. En particular, podemos tomar un círculo en el dominio de la función y ver como este se mapea en el codominio. Claramente, una vuelta en el dominio implicará una doble vuelta en el círculo del codominio, alrededor de un círculo que tiene el cuadrado del

radio del correspondiente en el dominio. En la sección ?? vimos que el inverso de esta función en el plano real, no es una función porque no es univaluada, es decir $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, tal que $f(x) = \sqrt{x}$ tiene dos valores para cada x en el dominio. En esta sección veremos de una manera intuitiva como en variable compleja es posible hacer que este tipo de mapeos se puedan ver como funciones, definiendo un dominio adecuado llamado **superficie de Riemann**. En realidad, una superficie de Riemann es una variedad compleja, pero nosotros veremos variedades hasta la sección ?. Por ahora lo que haremos es ver la idea funcional de lo que es una superficie de Riemann. Para hacer esto veremos un par de ejemplos.

Ejemplo 58 Vamos a iniciar con la función (relación) $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, tal que $f(z) = \sqrt{z}$. En su forma polar, esta función $f(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{\frac{1}{2}\theta}$ recorre la mitad de un círculo en el plano (u, v) , como se ve en la figura 11. Vamos a identificar

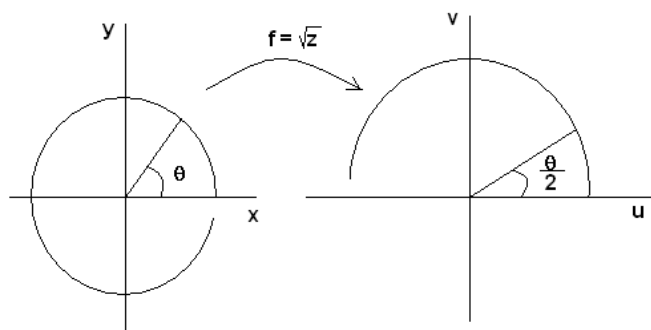


Figure 11: La transformación conforme $Z = \sqrt{z}$, recorre solo la mitad del plano (u, v) .

el eje positivo de los reales \mathfrak{R}^+ con otro eje positivo de la parte real de otro plano complejo, como se ve en la figura 12, de tal forma que un círculo iniciando en el punto 0, continúa hasta el punto 1 de ese plano, después sigue en el punto 1 del otro plano y sigue hasta el punto 2 de ese plano y de ahí pasa al punto 2 del primer plano complejo, hasta completar una vuelta en los dos planos. A estos dos planos juntos se le llama una superficie de Riemann \mathcal{R} , de tal forma que la función $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}$, con $f(z) = \sqrt{z}$ ahora es una función univaluada y biyectiva.

Ejemplo 59 Otro ejemplo similar es la función $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ donde $f(z) = z^{1/3}$. En este caso dos planos identificados como en el caso anterior no serán suficientes. Para esta función se necesitan tres planos, como los de la figura 13. En esta superficie de Riemann iniciamos en el punto 0, continuamos hasta el punto 1 de este plano y de ahí pasamos al punto 1 del segundo plano, seguimos en este plano hasta el punto dos y continuamos en el punto dos del tercer plano hasta al punto tres, que nos conduce de nuevo al punto 3 del primer plano

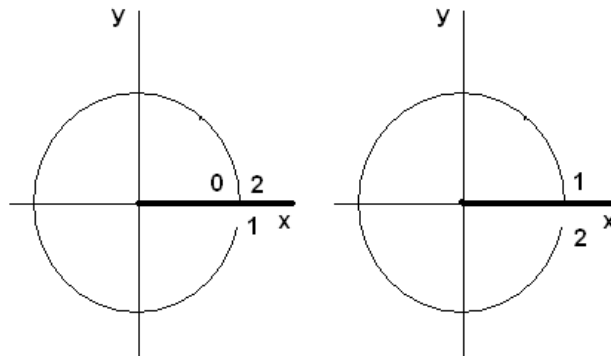


Figure 12: Dos planos complejos (x, y) , en donde identificamos sus partes reales positivas. Esta unión de espacios forma una superficie de Riemann.

complejo. Si el dominio de la función f es esta superficie de Riemann \mathcal{R} , es decir, $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$, la función $f(z) = z^{1/3}$ es biyectiva.

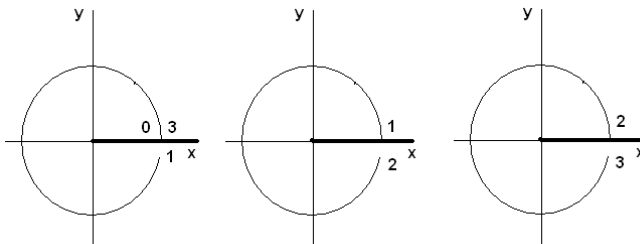


Figure 13: Lo mismo que en la figura 12, pero ahora con tres planos.

Ejemplo 60 Finalmente vamos a analizar la función $\ln(z)$. En este caso tenemos que $\ln(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta$. Esta función (relación) tiene un número infinito de puntos de multivaluación, ya que todos los valores de $\theta = \theta + 2k\pi$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, corresponden al mismo punto $z = re^{i\theta} = re^{i\theta + i2k\pi}$. Para este caso vamos a necesitar una superficie de Riemann con un número infinito de planos identificados como en los casos anteriores.