TENSORES Y P-FORMAS

CHAPTER 1

TENSORES Y P-FORMAS

1. Tensores

El material de los dos capítulos anteriores es fundamentalmente para estudiar los tensores. La importancia de los tensores en ciencias exáctas e ingeniería, es el hecho de que los tensores son cantidades matemáticas que no dependen del sistema coordenado. El significado de "no depende" del sistema de coordenadas la daremos en este capítulo, pero estas cantidades matemáticas han servido bien para modelar cantidades físicas importantes, como los campos. La idea es que estas cantidades físicas realmente no dependen del observador, es decir, las cantidades físicas no importa si el observador las mide con una vara de un metro o una de un centimetro, o con coordenadas catesianas o esfericas. El objeto físico no se ve afectado por la forma de medirlo o de observarlo. Esta condición la cumplen los tensores, por eso se usan para modelar las cantidades físicas observables. Desde el punto de vista matemático, un tensor es una función multilineal, es decir, una función de varias variables, pero la función es lineal en cada entrada. El dominio es el producto cartesiano de un espacio vectorial varias veces, con su dual, también varias veces. Nosotros vamos a tomar ese espacio vectorial como el espacio tangente a una variedad y su dual como el espacio cotangente a la variedad. Asi, la idea es definir tensores que viven en variedades. Empecemos por la definición formal de un tensor.

Definición 1. *Sea V espacio vectorial y V^* su espacio dual. Un* ***tensor del tipo*** (r,s) *es una transformación multilineal T tal que*

$$\begin{aligned} T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r\ veces} \times \underbrace{V \ \times \cdots \times \ V}_{s\ veces} &\rightarrow \Re, \\ \left(w^1, \cdots, w^r, v_1, \cdots, v_s\right) &\rightarrow T\left(w^1, \cdots, w^r, v_1, \cdots, v_s\right) \end{aligned}$$

Es decir, se tiene que si $v_1, \cdots, v_s \in V$ y $w^1, \cdots, w^r \in V^*$, son transformaciones lineales en el espacio vectorial V, se sigue que

$$\begin{aligned} T\left(w^1, \cdots, w^r, \alpha v + \beta w, v_2, \cdots, v_s\right) &= \alpha T\left(w^1, \cdots, w^r, v, v_2, \cdots, v_s\right) + \\ &\quad \beta T\left(w^1, \cdots, w^r, w, v_2, \cdots, v_s\right) \end{aligned}$$

para cada entrada del tensor.

Notación 1. *Al conjunto de tensores lo denotamos como $T \in V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ y se le llama* ***producto tensorial****.*

Con la suma

$$\begin{aligned} (T + T')\left(w^1, \cdots, w^r, v_1, \cdots, v_s\right) &= T\left(w^1, \cdots, w^r, v_1, \cdots, v_s\right) \\ &+ T'\left(w^1, \cdots, w^r, v_1, \cdots, v_s\right) \end{aligned}$$

y el producto por escalar

$$(\alpha T)\left(w^1,\cdots,w^r,v_1,\cdots,v_s\right)=\alpha T\left(w^1,\cdots,w^r,v_1,\cdots,v_s\right),$$

para todo

$$T,T'\in V\otimes\cdots\otimes V\otimes V^*\otimes\cdots\otimes V^*,\alpha\in\Re,$$

la estructura

$$(\Re,V\otimes\cdots\otimes V\otimes V^*\otimes\cdots\otimes V^*,+,\cdot)$$

es un espacio vectorial. A los elementos del espacio tensorial se les denota por $X_1\otimes\cdots\otimes X_r\otimes\mu^1\otimes\cdots\otimes\mu^s$, este elemento denota el tensor tal que

$$\begin{aligned}&X_1\otimes\cdots\otimes X_r\otimes\mu^1\otimes\cdots\otimes\mu^s\left(w^1,\cdots,w^r,v_1,\cdots,v_s\right)\\&=X_1\left(w^1\right)\cdots X_r\left(w^r\right)\mu^1\left(v_1\right)\cdots\mu^s\left(v_s\right)\\&=\left\langle\mu^1,X_1\right\rangle\cdots\left\langle\mu^r,X_r\right\rangle\left\langle\mu^1,v_1\right\rangle\cdots\left\langle\mu^s,v_s\right\rangle\end{aligned}$$

dados $X_1,\cdots,X_r\in V$ y $\mu^1,\cdots,\mu^s\in V^*$. Al espacio de tensores lo denotamos también por

$$T^r_s=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r\text{ veces}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{s\text{ veces}}.$$

Sean $R\in T^r_s$ y $S\in T^p_q$, el producto entre tensores se define entonces como el tensor T^{r+p}_{s+q} tal que

$$\begin{aligned}R\otimes S\left(\mu^1,\cdots,\mu^{r+p},v_1,\cdots,v_{s+q}\right)=\quad&R\left(\mu^1,\cdots,\mu^r,v_1,\cdots,v_s\right)\cdot\\&S\left(\mu^{r+1},\cdots,\mu^{r+p},v_{s+1},\cdots,v_{s+q}\right)\end{aligned}$$

La estructura $(T^r_s,+,\cdot,\otimes,\Re,\cdot)$ es una álgebra llamada **Álgebra tensorial**.

Sea $\{e_a\}_{a=1,\cdots,n}$ y $\{e^a\}_{a=1,\cdots,n}$ bases de V y V^*, espacios vectoriales de dimensión n y su dual. Entonces podemos escribir tensores $T\in T^r_s$ en términos de esa base como

$$T=\sum_{a_1\cdots a_r,b_1\cdots b_s}^{n}T^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_r}\otimes e^{b_i}\otimes\cdots\otimes e^{b_s},$$

ya que

$$\left\{e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_r}\otimes e^{b_j}\otimes\cdots\otimes e^{b_s}\right\}\subset T^r_s$$

será una base del espacio tensorial y las componentes de T están dadas por

$$T^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}=T\left(e^{a_1},\cdots,e^{a_r},e_{b_1},\cdots e_{b_s}\right).$$

Como se ve, debido a la definición de tensores, la notación es muy extensa. Mas adelante cambiaremos de notación por una mas simple, para reducir la escritura, pero por ahora la mantendremos con el objetivo de que no vaya a haber confusión.

La propiedad importante de los tensores es la de no depender del sistema coordenado. Aquí vamos a ser más generales, vamos a demostrar que los tensores son invariates al cambiar la base.

Proposición 1. *Los tensores son invaraintes bajo cambios de base.*

Dem. 1. *Sean* $\{e_a\}_{a=1,\cdots,n}$ *y* $\{e'_a\}_{a=1,\cdots,n}$ *bases de* V *y* $\{e^a\}_{a=1,\cdots,n}$ *y* $\{e'^a\}_{a=1,\cdots,n}$ *bases de* V^* *tal que* $\{e^a\}_{a=1,\cdots,n}$ *sea dual a* $\{e_a\}_{a=1,\cdots,n}$ *y* $\{e'^a\}_{a=1,\cdots,n}$, *sea dual a* $\{e'_a\}_{a=1,\cdots,n}$. *Se sigue que* $e'_a=\sum_{b=1}^{n}\Lambda^b_a e_b$ *y* $e'^a=\sum_{b=1}^{n}\Lambda^a_b e^b$ *donde* Λ^b_a *y* Λ^a_b *son*

coeficientes de matrices no singulares $n \times n$. Por la dualidad de las bases, se sigue que

$$\delta_a^b = \langle e^b, e_a \rangle = \langle e'^b, e'_a \rangle = \left\langle \sum_{c=1}^{n} \Lambda_c^b e^c, \sum_{d=1}^{n} \Lambda_a^d e_d \right\rangle \sum_{c=1}^{n}\sum_{d=1}^{n} \Lambda_c^b \Lambda_a^d \delta_d^c = \sum_{c=1}^{n} \Lambda_c^b \Lambda_a^c.$$

Es decir $\sum_{c=1}^{n} \Lambda_c^b \Lambda_a^c = \delta_a^b$*, por lo que* Λ_c^b *y* Λ_a^c *son una la inversa de otra como matrices. Ahora escribimos un tensor* T_s^r *en términos de estas bases, esto es*

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{a_1 \cdots b_s = 1}^{n} T'^{a_1 \cdots a_r}_{b_1 \cdots b_s} e'_{a_1} \otimes \cdots \otimes e'_{a_r} \otimes e'^{b_1} \otimes \cdots \otimes e'^{b_s} \\
&= \sum_{a_1 \cdots b_s = 1}^{n} T'^{a_1 \cdots a_r}_{b_1 \cdots b_s} \sum_{c_1=1}^{n} \Lambda_{a_1}^{c_1} e_{c_1} \otimes \cdots \otimes \sum_{c_r=1}^{n} \Lambda_{a_r}^{c_r} e_{c_r} \\
&\quad \otimes \sum_{d_1=1}^{n} \Lambda_{d_1}^{b_1} e^{d_1} \otimes \cdots \otimes \sum_{d_s=1}^{n} \Lambda_{d_s}^{b_s} e^{d_s} \\
&= \sum_{a_1 \cdots b_s = 1}^{n} \sum_{c_1=1}^{n} \cdots \sum_{c_r=1}^{n} \sum_{d_1=1}^{n} \cdots \sum_{d_s=1}^{n} \Lambda_{a_1}^{c_1} \cdots \Lambda_{a_r}^{c_r} \Lambda_{d_1}^{b_1} \cdots \Lambda_{d_s}^{b_s} T'^{a_1 \cdots a_r}_{b_1 \cdots b_s} e_{c_1} \\
&\quad \otimes \cdots \otimes e_{c_r} \otimes e^{d_r} \otimes \cdots \otimes e^{d_s} \\
&= \sum_{c_1 \cdots d_s = 1}^{n} T^{c_1 \cdots c_r}_{d_1 \cdots d_s} e_{c_1} \otimes \cdots \otimes e_{c_r} \otimes e^{d_r} \otimes \cdots \otimes e^{d_s}
\end{aligned}$$

donde hemos llamado

$$T^{c_1 \cdots c_r}_{d_1 \cdots d_s} = \sum_{a_1=1}^{n} \cdots \sum_{a_r=1}^{n} \sum_{b_1=1}^{n} \cdots \sum_{b_s=1}^{n} \Lambda_{a_1}^{c_1} \cdots \Lambda_{a_r}^{c_r} \Lambda_{d_1}^{b_1} \cdots \Lambda_{d_s}^{b_s} T'^{a_1 \cdots a_r}_{b_1 \cdots b_s}. \tag{1.1}$$

■

Comentario 1. *Note que en cada caso se tiene que*

$$T'^{a_1 \cdots a_r}_{b_1 \cdots b_s} = T\left(e'^{a_1}, \cdots, e'^{a_r}, e'_{b_1}, \cdots, e'_{b_s}\right)$$

y

$$T^{c_1 \cdots c_r}_{d_1 \cdots d_s} = T\left(e^{c_1}, \cdots e^{c_r}, e_{d_1}, \cdots, e_{d_s}\right).$$

Es decir, debido al cambio de base las componentes del tensor cambiaron, pero el tensor mismo se quedo inalterado. Es en este sentido que los tensores son invariantes ante cambios de base y por tanto de coordenadas. En ciencias físicas este hecho se usa continuamente. Una operación también muy usada en ciencias físicas es la contracción de tensores. A partir de uno o varios tensores, se construye otro usando la contracción. Vamos a definirla.

Definición 2. *Sea* $T \in T_s^r$ *en un espacio vectorial* V*. La contracción* $C_1^1(T)$ *de un tensor en las bases duales* $\{e_a\}\{e^a\}$ *es un tensor* $(r-1, s-1)$ *tal que las componentes de* $C_1^1(T)$ *son* $\sum_{a=1}^{n} T^{aa_2 \ldots a_r}_{ab_2 \cdots b_s}$*, i.e.* $C_1^1(T) = \sum_{a=1}^{n} \sum_{a_2 \cdots a_r b_2 \cdots b_s = 1}^{n} T^{aa_2 \ldots a_r}_{ab_2 \cdots b_s}$ $e_{a_s} \otimes \cdots \otimes e_{a_r} \otimes e^{b_2} \otimes \cdots \otimes e^{b_s}$

Proposición 2. *La contracción es independiente de las bases.*

Dem. 2. *Sean* $\{e_a\}\{e^a\}$ *y* $\{e'_a\}\{e'^a\}$ *bases duales de* V. *Entonces*

$$\begin{aligned}
C'^1_1(T) &= \sum_{a=1}^{n} \sum_{a_2\cdots a_r b_2\cdots b_s=1}^{n} T'^{aa_2\ldots a_r}_{ab_2\cdots b_s} e'_{a_s} \otimes \cdots \otimes e'_{a_r} \otimes e'^{b_2} \otimes \cdots \otimes e'^{b_s} \\
&= \sum_{a_1=1}^{n} \cdots \sum_{a_r=1}^{n} \sum_{b_1=1}^{n} \cdots \sum_{b_s=1}^{n} \Lambda^{c_2}_{a_2} \cdots \wedge^{c_r}_{a_r} \wedge^{b_2}_{d_2} \cdots \wedge^{b_s}_{d_s} \sum_{a=1}^{n} T'^{a\ldots a_r}_{a\cdots b_s} e_{c_s} \\
&\quad \otimes \cdots \otimes e_{c_r} \otimes e^{d_2} \otimes \cdots \otimes e^{d_s} \\
&= \sum_{c_1=1}^{n} \sum_{d_1=1}^{n} \delta^{c_1}_{d_1} \sum_{c_2\cdots c_r d_2\cdots s_s=1}^{n} T^{c_1c_2\ldots c_r}_{d_1d_2\cdots d_s} e_{c_s} \otimes \cdots \otimes e_{c_r} \otimes e^{d_2} \otimes \cdots \otimes e^{d_s} \\
&= C'^1_1(T)
\end{aligned}$$

■

De la misma forma se pueden definir las contracciones de los demás índices. Suele llamarse a los índices superiores de un tensor **índices covariantes** y a los inferiores, **índices contravariantes**. Así la contracción queda definida entre índices covariantes con indices contravariantes.

Notación 2. *Del mismo modo, se suele llamar a los vectores* e^a ***vectores covariantes*** *o* ***uno-formas*** *y a los* e_a ***vectores contravariantes*** *o simplemente vectores.*

En lo que sigue vamos a estudiar algunos ejemplos simples de tensores usados en física.

Exemplo 1. *El tensor de campo electromagnético es un tensor definido como*

$$A = \sum_{\mu=0}^{3} A_\mu dx^\mu + d\Lambda$$

donde Λ *es una función arbitraria que va de los reales a los reales.*

Exemplo 2. *El tensor de energia momento es un tensor definido como*

$$T = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} T_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

en donde las componentes $T_{\mu\nu}$ *son basicamente las presiones y la densidad en la diagonal, y los flujos de energia y momento en las componentes fuera de la diagonal.*

Exemplo 3. *El tensor métrico es un tensor definido como*

$$g = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

el cual define una métrica en la variedad, a traves del producto escalar entre vectores. Mas adelante daremos los detalles de esta tensor, por el momento vamos a discutir dos ejemplos simples. Primero tomemos las componentes $g_{ij} = \delta_{ij}$ $i, j = 1, 2, 3$, *y con las componentes con subindice 0 igual a cero. Lo que se obtiene es una métrica Euclidiana, esta es:*

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

Tomemos el vector $X = 2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$ *y el vector* $Y = -\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial z}$. *El producto interno entre* X *y* Y *esta dado por:*

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= dx(X)\otimes dx(Y) + dy(X)\otimes dy(Y) + dz(X)\otimes dz(Y) \\ &= 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 2 = -2 \end{aligned}$$

Mientras que la norma de los vectores es

$$\begin{aligned} g(X,X) &= dx(X)\otimes dx(X) + dy(X)\otimes dy(X) + dz(X)\otimes dz(X) = 5 = ||X||^2 \\ g(Y,Y) &= dx(Y)\otimes dx(Y) + dy(Y)\otimes dy(Y) + dz(Y)\otimes dz(Y) = 5 = ||Y||^2 \end{aligned}$$

La norma de los vectores siempre va a ser positiva. La distancia entre estos vectores será ($X - Y = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial z}$)

$$\begin{aligned} & g(X-Y,X-Y) = \\ = \;& dx(X-Y)\otimes dx(X-Y) + dy(X-Y)\otimes dy(X-Y) + dz(X-Y)\otimes dz(X-Y) \\ = \;& ||X-Y||^2 = 1+1+4 = 6 \end{aligned}$$

Un ejemplo más interesante es la métrica de Minkowski, esta esta definida por

$$g = dx\otimes dx + dy\otimes dy + dz\otimes dz - dt\otimes dt$$

Tomemos ahora los vectores $X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}$ *y* $Y = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$. *El producto interno entre* X *y* Y *ahora esta dado por:*

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= dx(X)\otimes dx(Y) + dy(X)\otimes dy(Y) + dz(X)\otimes dz(Y) - dt(X)\otimes dt(Y) \\ &= 1+1 = 2 \end{aligned}$$

Pero ahora las normas de los vectores es

$$\begin{aligned} g(X,X) &= dx(X)\otimes dx(X) + dy(X)\otimes dy(X) + dz(X)\otimes dz(X) - dt(X)\otimes dt(X) = 0 \\ g(Y,Y) &= dx(Y)\otimes dx(Y) + dy(Y)\otimes dy(Y) + dz(Y)\otimes dz(Y) - dt(Y)\otimes dt(Y) = 0 \end{aligned}$$

O sea, estos vectores tienen norma nula, sus tamaños son nulos, a pesar de que los vectores no lo son. Esta es la principal caracteristica de la métrica de Minkowsky, en este espacio existe vectores no nulos con norma nula o negativa. Esta métrica podria ser vista como algo exótico, como una invención de algún matemático con demasiada imaginación. Pero no lo es, es el mejor modelo del espacio tiempo que tenemos, es algo muy real.

Vamos a tomar las componentes del ejemplo de la pelota **??**. *Tomemos a la métrica para una pelota como*

$$g = dw^1\otimes dw^1 + dw^2\otimes dw^2 = r^2\left(d\theta\otimes d\theta + \sin^2(\theta)d\varphi\otimes d\varphi\right)$$

Se suele denotar (abusando de la notación) a una métrica también como

$$g = d\Omega^2 = r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2\right)$$

el cual puede ser confuso, pues los elementos $d\theta^2$ *y* $d\varphi^2$ *no son el cuadrado de una diferencial, sino el producto tensorial de dos formas. Hay que tomar esto siempre en cuenta.*

2. p-Formas

En esta sección hablaremos de las p-formas. Las formas son productos tensoriales de uno-formas antisimetrizados. Su importancia también viene de la física y de las ciencias naturales. Con las p-formas es posible hacer oparaciones con mucha mas sincillez y en muchos casos, las cantidades que se estudian adquieren un significado más claro y presiso. En esta sección estudiaremos algunos ejemplos en la física, con aplicaciones directas a la ingeniería. Vamos primero a definir las p-formas.

Definición 3. *Sea V^* el conjunto de uno-formas. Al conjunto de tensores $(0,p)$ antisimétricos en cada entrada se llama* ***p-formas****.*

Vamos a ser más explícitos, sean $w^1, w^2, w^3 \in V^*$, entonces las p-formas se construyen como en los ejemplos siguientes.

Exemplo 4. *Una dos-forma se escribe como* $w = \frac{1}{2}\left(w^1 \otimes w^2 - w^2 \otimes w^1\right)$

Exemplo 5. *Una tres-forma* $w = \frac{1}{6}(w^1 \otimes w^2 \otimes w^3 + w^3 \otimes w^1 \otimes w^2 + w^2 \otimes w^3 \otimes w^1 - w^3 \otimes w^2 \otimes w^1 - w^1 \otimes w^3 \otimes w^2 - w^2 \otimes w^1 \otimes w^3)$, *etc.*

En lo que sigue vamos a construir el álgebra de las p-formas. Primero vamos a construir un producto entre p-formas, llamado el producto wedge. Su definición es como sigue.

Definición 4. *Sean w y μ una p y q-formas respectivamente. El producto $w \wedge \mu$ es una $(p+q)$-forma, donde $\wedge$ es antisimétrico i.e.*

$$w \wedge \mu = (-1)^{pq}\, \mu \wedge w$$

Esto quiere decir, que si $\{e^a\}$ es base de las uno-formas, entonces una 2-forma se escribe como

$$w = \sum_{a_1 a_2 = 1}^{n} w_{a_1 a_2}\; e^{a_1} \wedge e^{a_2} \text{ donde } e^{a_1} \wedge e^{a_2} = \frac{1}{2}\left(e^{a_1} \otimes e^{a_2} - e^{a_2} \otimes e^{a_1}\right)$$

Analogamente, una tres forma se escribe como

$$w = \sum_{a_1 a_2 a_3 = 1}^{n} w_{a_1 a_2 a_3} e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge e^{a_3} \text{donde } e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge e^{a_3} = \frac{1}{6} \sum_{[P]} (-1)^{[P]}\, e^{a_1} \otimes e^{a_2} \otimes e^{a_3}$$

donde $[P]$ significa permutación de (a_1, a_2, a_3). De esta forma, se pueden construir $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ p-formas en un espacio V^* n-dimensional. Al conjunto de las **p-formas** se denota como $\wedge^p$.

Proposición 3. *Toda $(n+k)$-forma en un espacio n-dimensional es idénticamente cero, para $k \geqslant 1$.*

Dem. 3. *Sean V^* un espacio n-dimensional y $\alpha \in V^*$ una $n+1$ forma. Entonces*

$\alpha = \alpha_{a_i \cdots a_j a_k \cdots a_{n+1}} e^{a_i} \wedge \cdots \wedge e^{a_j} \wedge e^{a_k} \wedge \cdots \wedge e^{a_{n+1}}$ pero algún kj se repite. Así que intercambiándolos $\alpha = -\alpha_{a_i \cdots a_j a_k \cdots a_{n+1}} e^{a_i} \wedge \cdots \wedge e^{a_k} \wedge e^{a_j} \wedge \cdots \wedge e^{a_{n+1}} = -\alpha$ por lo tanto $\alpha = 0$. ■

Así como construimos el campo de las uno-formas y de los vectores, se puede construir el campo de los tensores, simplemente definiendo los tensores en cada punto de la variedad. Formalmente se tiene:

DEFINICIÓN 5. *Un tensor T del tipo (r,s) sobre una variedad M^n, es un tensor construido sobre el espacio tangente TM^n y el espacio cotangente T^*M^n de M^n.*

3. Diferenciación e integración en variedades

Para evitar un poco la notación de los indices con sumandos y factores extensos, a partir de esta sección usaremos la convención de suma sobre índices repetidos de Einstein, es decir, si dos indices se repiten en un tensor, es que estos indices se estan sumando, a menos que se especifique lo contrario. En esta sección vamos a definir la diferencial y la integral de p-formas y tensores sobre la variedad. Vamos a definir tres tipos de operadores diferenciales y la integración de estos, en especial veremos el teorema de Stokes. Para iniciar vamos a introducir la notación sobre las diferenciales, así todo sera más compacto.

NOTACIÓN 3. *En esta sección denotaremos la derivada por una coma, es decir*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^k} &= f_{,k} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} &= f_{,kl} \end{aligned}$$

etc.

Primero vamos a definir la diferencial de p-formas, la cual es la mas usada y la más simple de los operadores diferenciales que veremos.

DEFINICIÓN 6. *Sea M^n variedad y w una p-forma sobre M^n. La* ***diferencial exterior*** *d es un mapeo $d : \wedge^p \to \wedge^{p+1}$ tal que a*

$$\begin{aligned} w &= w_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \to dw \\ &= d\left(w_{i_1 \cdots i_p}\right) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \end{aligned}$$

para $\left\{dx^i\right\}_{i=1,\cdots,n}$ base coordenada de $T^*M^n = \wedge^1$. Se tiene que

$$dw = w_{i_1 \cdots i_p, k} dx^k \wedge dx^{i_j} \wedge \cdots \wedge dx^{ip}.$$

La primera propiedad importante de este operador es que la diferencial de la diferencial de una p-forma, es cero. Como veremos esta propiedad es muy importante.

PROPOSICIÓN 4. *$d(dw) = 0$ para toda p-forma $w \in \wedge^p$, y para toda $p \in \mathcal{Z}^+$.*

DEM. 4. *Tenemos $dw = w_{i_1 \cdots i_p, k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{ip}$, entonces*

$$d(dw) = w_{i_1 \cdots i_p, k\ell} dx^\ell \wedge dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{ip}$$

donde se están sumando índices simétricos k, ℓ, con índices antisimétricos $dx^\ell \wedge dx^k$, por tanto $d(dw) = 0$. ■

Para calcular la diferencial de p-formas se aplica la siguiente fórmula.

PROPOSICIÓN 5. *Sean w y μ una p y q-formas respectivamente. Se sigue que $d(w \wedge \mu) = dw \wedge \mu + (-1)^p w \wedge d\mu$.*

Dem. 5. *Sean* $w = w_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ *y* $\mu = \mu_{j_i\cdots j_q} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}$ *Entonces*

$$\begin{aligned} & d\left(w_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \wedge \mu_{j_1\cdots j_q} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}\right) \\ = \; & w_{i_1\cdots i_p,k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{ip} \wedge \mu_{j_1\cdots j_q} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} + \\ & + w_{i_1\cdots i_p} \mu_{j_1\cdots j_q,\ell} dx^{\ell} \wedge dx^{i_1} \cdots \wedge dx^{ip} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} \\ = \; & dw \wedge \mu + (-1)^p w \wedge d\mu \end{aligned}$$

■

Ejercicio 1. *Muestre que* $dw(X,Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w([X,Y])$

En el capítulo anterior introdujimos el concepto de full-back. Ahora vamos a introducir un concepto similar, pero no hay que confudirlos, con el que podemos trasladar formas o tensores covarientas de una variedad a otra. Vamos a escribir la definición y luego daremos una breve explicación.

Definición 7. *Sea* $\phi : M^m \to N^n$, *y* M^m, N^n *variedades. Entonces:*
· *El* ***pull-back de tensores covariantes*** *se define como*

$$\phi^* T(v_1, \cdots, v_s)|_p = T(\phi_* v_1, \cdots, \phi_* v_s)|_{\phi(p)} ,$$

$v_1, \cdots, v_s \in TM^m, p \in M^m$ *donde y* $T \in T^0_s$.
· *Análogamente para tensores* ***contravariantes*** *se tiene*

$$\phi_* T\left(w^1, \cdots, w^r\right)|_{\phi(p)} = T\left(\phi^* w^1, \cdots, \phi^* w^r\right)|_p$$

para $T \in T^r_0$ *y* $w^1, \cdots, w^r \in T^*N^n$

Vamos a ver primero el pull-back de una uno-forma.

Exemplo 6. *Sea* $w \in T^*N^n$ *y* $v \in TM^m$. *Y sea* $\varphi : M^m \to N^n$. *Entonces el pull-back de* w *esta dado por*

$$\begin{aligned} \varphi^* w : TM^m &\to \Re \quad \textit{tal que} \\ v &\to w(\varphi_* v) = w(d\varphi(v)). \end{aligned}$$

Esto quiere decir que φ^* *es una función tal que*

$$\varphi^* : T^*N^n \to T^*M^m,$$

ya que $\phi^* w \in T^*M^m$ *y* $w \in T^*N^n$. *Recordemos que* $d\varphi = \varphi_* : TM \to TN$, *vean la figura 1.*

Con el ejemplo anterior ya se puede proceder a encontrar el pull-back de un tensor covariante en general. Y con este el de un tensor contravariante. Vamos a demostrar ahora que el pull-back y la diferencial conmutan.

Proposición 6. *Sea* M^m *y* N^n *variedades y* $\phi : M^m \to N^n$ *y* ϕ^* *el pull-back. La diferencial exterior conmuta con el pull-bak.*

Dem. 6. *Sea* $w \in \wedge^p$ *y* $f : M^n \to \Re$ *suave. Entonces, por la regla de la cadena*

$$\begin{aligned} d(f \circ \phi) &= d(\phi^* f) = df \circ d\phi \\ &= df \circ \phi_* = \phi^*(df) \;\; \textit{i.e.} \\ d(\phi^* f) &= \phi^*(df) \end{aligned}$$

De la misma manera para 1-formas:

$$d(\phi^* w) = d(w \circ \phi_*) = d(w \circ d\phi) = dw \circ \phi_* = \phi^*(dw)$$

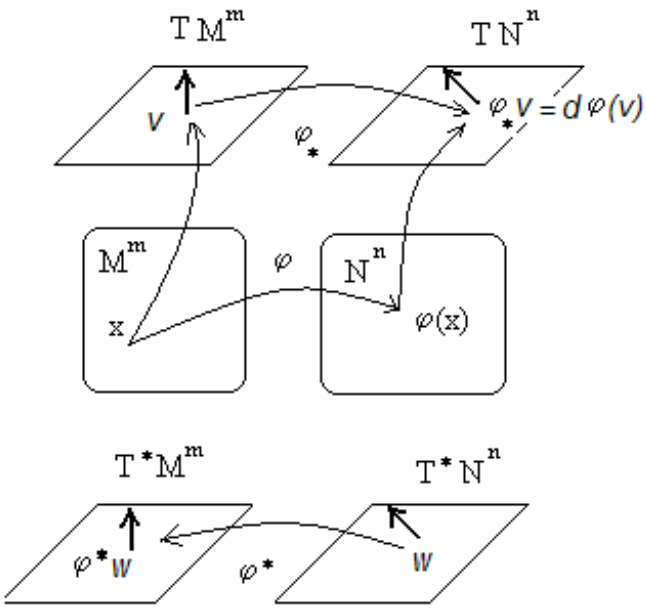

FIGURE 1. Representación de la función φ, del pull-back φ^* y de la diferencial de la función φ , $d\varphi = \varphi_*$.

y análogamente para p -formas. ■

El rotacional de un vector es un concepto matemático muy utilizado en ciencias exactas. En si es definido como la diferencial totalmente antisimétrica de un vector. Vamos a introducir el tensor de Levi-Civita, que nos va a servir para trabajar con la antisimetrización de vectores y tensores. Es de hecho la generalización de la antisimetrización que se usa en algabra de vectores. Aqui lo podemos introducir para cualquier variedad de dimensión arbitraria.

DEFINICIÓN 8. *El* ***tensor*** *totalmente antisimétrico* ***de Levi-Civita*** $\epsilon_{i_1,\cdots,i_n}$ *se define como*

$$\epsilon_{i_1,\cdots,i_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1,\cdots,i_n \quad \text{es permutación par de } (1,2,\cdots,n) \\ -1 & \text{si } i_1,\cdots,i_n \quad \text{es permutación impar de } (1,2,\cdots,n) \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

Con el tensor de Levi-Civita podemos definir el operador de Hodge. Este operador es muy usado para poder simplificar la notación. Vamos a escribir su definición y luego estudiaremos algunos ejemplos de su uso.

DEFINICIÓN 9. *El* ***operador * de Hodge*** *o* ***transformación de dualidad*** *es una función que mapea* $* : \wedge^p \to \wedge^{n-p}$ *tal que*

$$*\left(dx^{i_j} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right) = \frac{1}{(n-p)!}\epsilon_{i_1\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_n} dx^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}$$

donde $\epsilon_{i_1,\cdots,i_n}$ *es el tensor de Levi-Civita*

Esta definición es posible gracias a la dualidad que existe entre los espacios vectoriales de uno-formas $\wedge^p$ y $\wedge^{n-p}$, ambas son de la misma dimensión. Es por eso que la aplicación del operador de Hodge dos veces a una p-forma, es proporcional a la p-forma, es decir, se regresa al lugar de origen.

PROPOSICIÓN 7. $**w_p = (-1)^{p(n-p)}\, w_p$ *donde* $w_p \in \wedge^p$

DEM. 7. *Por substitución directa.* ■

Veamos algunos ejemplos simples.

EXEMPLO 7. *Sea* $w = f dx \wedge dy + g\ dy \wedge dz$ *donde* $g, f : \Re^3 \to \Re$ *en* $\Re^3$. *Entoncees,* $n = 3$ *y* $w \in \wedge^2$

$$\begin{aligned} dw &= f_{,z} dz \wedge dx \wedge dy + g_{,x} dx \wedge dy \wedge dz = (f_{,z} + g_{,x})\, dx \wedge dy \wedge dz \\ *w &= f * dx \wedge dy + g * dy \wedge dz \\ &= f \frac{1}{1!} \epsilon_{123} dz + g \frac{1}{1!} \epsilon_{231} dx \\ &= f dz + g dx \\ *dw &= f_{,z} + g_{,x} \end{aligned}$$

Es decir, la aplicación del operador de Hodge a una p-forma, consiste en quitar todos los elementos de la base que tiene la p-forma y poner todos los restantes, los que no se usan, en el orden que nos da el tensor de Levi-Civita. Las funciones que van enfrente de la base no son afectadas por el operador de Hodge. Con este operador se define otro operador diferencial muy importante, llamado la codiferencial.

DEFINICIÓN 10. *La* ***codiferencial exterior*** *ó* ***derivada exterior adjunta*** *se define por* $\delta = (-1)^{np+n+1} * d*$ *para espacios n-dimensionales y para p-formas. Se tiene que* $\delta = - * d*$ *en espacios de dimensión par y* $\delta = (-1)^p * d*$ *en espacios de dimensión impar.*

Como en el caso de la diferencial, la doble aplicación de la codiferencial también es cero.

PROPOSICIÓN 8. $\delta\,(\delta w_p) = 0$

DEM. 8. $\delta\,(-1)^{np+n+1} * d * w_p = (-1)^{2(np+n+1)} * d * *d* = (-1)^{2(np+n+1)} * (-1)^{p(n-p)}\, dd * w_p$ ■

COMENTARIO 2. *Se tiene entonces que*

$$\begin{aligned} d &: \wedge^p \to \wedge^{p+1} \\ \delta &: \wedge^p \to \wedge^{p-1} \end{aligned}$$

Utilizando la definición de la diferencial y la codiferencial se puede definir otro operador diferencial que llamaremos Laplaciano. En ciertos casos este operador es el Laplaciano que se conoce en álgebra vectorial, pero de hecho es una generalización de este para cualquier variedad de cualquier dimensión.

DEFINICIÓN 11. *El* ***Laplaciano*** Δ *sobre una variedad, es una función* $\Delta : \wedge^p \to \wedge^p$ *definida por* $\Delta = d\delta + \delta d$

Vamos a mostrar algunos ejemplos con todos los operadores diferenciales que hemos definido, por facilidad lo haremos en $\Re^2$, que es donde el cálculo nos es más familiar, con ellos estas definiciones adquiriran más sentido.

Exemplo 8. *Sea $M = \Re^2$. Entonces una base para $\wedge^0 \supset \{1\}$. Analogamente para $\wedge^1 \supset \{dx, dy\}$, y para $\wedge^2 \supset \{dx \wedge dy\}$. También podemos obtener la aplicación $*$, esta nos da:*

$$*1 = dx \wedge dy; \qquad *dx = dy; \qquad *dy = -dx; \qquad *dx \wedge dy = 1.$$

Para las diferenciales obtenemos:

$$\begin{aligned} df(x,y) &= f_{,x}\, dx + f_{,y}\, dy \\ ddf &= f_{,xy}\, dy \wedge dx + f_{,yx}\, dx \wedge dy = 0 \\ d(udx + vdy) &= (v_{,x} - u_{,y})\, dx \wedge dy \end{aligned}$$

Analogamente, para las codiferenciales se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta f(x,y) &= -*d*f(x,y) = -*d(f(x,y)\, dx \wedge dy) = 0 \\ \delta(udx + vdy) &= -*d*(udx + vdy) = -*d(udy - vdx) \\ &= -*(u_{,x}\, dx \wedge dy - v_{,y}\, dy \wedge dx) = \\ &= -*((u_{,x} + v_{,y})\, dx \wedge dy) = -(u_{,x} + v_{,y}) \\ \delta(\phi dx \wedge dy) &= -*d*(\phi dx \wedge dy) = -*d(\phi) = -*(\phi_{,x}\, dx + \phi_{,y}\, dy) = \\ &= -(\phi_{,x}\, dy - \phi_{,y}\, dx) = -\phi_{,x}\, dy + \phi_{,y}\, dx \end{aligned}$$

Y para los Laplacianos obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta f &= (d\delta + \delta d) f = d(0) + \delta(f_{,x}\, dx + f_{,y}\, dy) = -(f_{,xx} + f_{,yy}) \\ \Delta(udx + vdy) &= d[-(u_{,x} + v_{,y})] + \delta[(v_{,x} - u_{,y})\, dx \wedge dy] \\ &= -[u_{,xx}\, dx + v_{,xy}\, dx + u_{,yx}\, dy + v_{,yy}\, dy] - *[(v_{,xx} - u_{,yx})dx + (v_{,xy} - u_{,yy})dy] \\ &= -[(u_{,xx} + v_{,xy})dx + (v_{,yy} + u_{,xy})dy] - [(v_{,xx} - u_{,yx})dy - (v_{,xy} - u_{,yy})dx] \\ &= -[(u_{,xx} + u_{,yy})dx + (v_{,xx} + v_{,yy})dy] \end{aligned}$$

Estos últimos ejemplos justifican el nombre del operador Δ como Laplaciano.

Para el caso de $M = \Re^3$ las bases respectivamente estan dadas como $\wedge^0 \supset \{1\}$, $\wedge^1 \supset \{dx, dy, dz\}$, para $\wedge^2 \supset \{dx \wedge dy, dx \wedge dz, dy \wedge dz\}$ y para $\wedge^3 \supset \{dx \wedge dy \wedge dz\}$. Igualmente podemos obtener la aplicación $*$, esta nos da:

$$\begin{aligned} *1 &= dx \wedge dy \wedge dz; \quad *dx = dy \wedge dz; \quad *dy = -dx \wedge dz; \quad *dz = dx \wedge dy; \\ *dx \wedge dy &= dz; \quad *dy \wedge dz = dx; \quad *dz \wedge dx = dy; \quad *dx \wedge dy \wedge dz = 1. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. *Muestren que*

$$*d(v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz) = -\nabla \times \underset{\rightarrow}{v} \cdot d\overrightarrow{x},$$

donde $\underset{\rightarrow}{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *y* $d\overrightarrow{x} = (dx, dy, dz)$ *es el radio vector.*

Ejercicio 3. *Muestren que*

$$\delta(v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz) = -\nabla \cdot \underset{\rightarrow}{v},$$

donde $\underset{\rightarrow}{v} = (v_1, v_2, v_3)$

Ejercicio 4. *Muestren que*

$$\Delta(v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz) = -\frac{\partial^2 \underset{\rightarrow}{v}}{\partial x^k \partial x^k} \cdot d\overrightarrow{x} = -\nabla^2 \underset{\rightarrow}{v} \cdot d\overrightarrow{x}$$

donde $\underset{\rightarrow}{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

El espacio tiempo se modela generalmente como una variedad 4-dimensional. Los ejemplos en física son hechos en esta dimensión, aunque hay teorías modernas de unificación que utilizan dimensiones más altas. Por eso para trabajar en el espacio tiempo debemos trabajar en el espacio $M = \Re^4$, donde las bases respectivamente estan dadas por

$$\begin{aligned}
&\text{para } \wedge^0 \supset \{1\} \\
&\text{para } \wedge^1 \supset \{dx, dy, dz, dt\}, \\
&\text{para } \wedge^2 \supset \{dx \wedge dy, dx \wedge dz, dy \wedge dz, dx \wedge dt, dy \wedge dt, dz \wedge dt\} \\
&\text{para } \wedge^3 \supset \{dx \wedge dy \wedge dz, dx \wedge dy \wedge dt, dx \wedge dz \wedge dt, dy \wedge dz \wedge dt\} \\
&\text{para } \wedge^4 \supset \{dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt\}
\end{aligned}$$

Igualmente podemos obtener la aplicación $*$, esta nos da:

$$\begin{aligned}
&*1 = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt \\
&*dx = dy \wedge dz \wedge dt \quad * dy = -dx \wedge dz \wedge dt \quad * dz = -dx \wedge dy \wedge dt \quad * dt = dx \wedge dy \wedge dz \\
&*dx \wedge dy = dz \wedge dt \quad * dy \wedge dz = dx \wedge dt \quad dz \wedge dx = dy \wedge dt \\
&*dx \wedge dt = dy \wedge dz \quad * dy \wedge dt = dx \wedge dz \quad * dz \wedge dt = dx \wedge dy \\
&*dy \wedge dz \wedge dt = dx \quad * dx \wedge dz \wedge dt = -dy \quad * dx \wedge dy \wedge dt = dz \quad * dx \wedge dy \wedge dz = dt \\
&*dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt = 1
\end{aligned}$$

Exemplo 9. *Sea* $F = F_i dx^i \wedge dt - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} H^i dx^j \wedge dx^k = F_x dx \wedge dt + F_y dy \wedge dt + F_z dz \wedge dt - H_x dy \wedge dz + H_y dx \wedge dz - H_z dx \wedge dy$, *donde* ϵ_{ijk} *es el tensor de Levi-Civita y* $H^i = H_i$ *para* $i = 1, 2, 3$. *Podemos calcular su diferencial*

$$\begin{aligned}
dF &= [(F_{z,y} - F_{y,z})\, dy \wedge dz + (F_{z,x} - F_{x,z})\, dx \wedge dz + (F_{y,x} - F_{x,y})\, dx \wedge dy] \wedge dt \\
&- (H_{x,x} + H_{y,y} + H_{z,z})\, dx \wedge dy \wedge dz \\
&- [H_{x,t} dy \wedge dz - H_{y,t} dx \wedge dz + H_{z,t} dx \wedge dy] \wedge dt
\end{aligned}$$

Usando las expresiones anteriores, podemos calcular $*dF$

$$\begin{aligned}
*dF &= [(F_{z,y} - F_{y,z})\, dx - (F_{z,x} - F_{x,z})\, dy + (F_{y,x} - F_{x,y})\, dz] \\
&- (H_{x,x} + H_{y,y} + H_{z,z})\, dt \\
&- [H_{x,t} dx + H_{y,t} dy + H_{z,t} dz]
\end{aligned}$$

Si ahora definimos los vectores $\underrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z)$ *y* $\underrightarrow{H} = (H_x, H_y, H_z)$ *obtenemos* $*dF$ *en representación vectorial como*

$$*dF = -\nabla \times \underrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{x} - \nabla \cdot \underrightarrow{H} dt - \frac{\partial}{\partial t} \underrightarrow{H} \cdot d\overrightarrow{x}$$

la cual es una expresión vectorial muy interesante que usaremos mas adelante.

En función de la acción de los operadores sobre las p-formas, podemos clasificar las p-formas de la siguiente forma.

Definición 12. *Una p-**forma*** $w_p \in \wedge^p$ *se dice:*
· ***Armónica*** *si* $\Delta w_p = 0$
· ***Cerrada*** *si* $dw_p = 0$
· ***Cocerrada*** *si* $\delta w_p = 0$
· ***Exacta*** *si* $w_p = d\alpha_{p-1} \quad \alpha_{p-1} \in \wedge^{p-1}$
· ***Coexacta*** *si* $w_p = \delta\alpha_{p+1} \quad \alpha_{p+1} \in \wedge^{p+1}$

La integración de p-formas tiene dos teoremas que hacen de las p-formas objetos fácil de manipular. Vamos a presentar dos teoremas sin demostración, el teorema de Hodge, que dice que cualquier p-forma es la superposición de una p-forma exácta, una más coexáta o otra amónica. Así es posible escribir las p-formas en términos de estas p-formas con caracteristicas muy especiales. Este teorema es de gran ayuda como veremos. Y el segundo teorema es el teorema de Stokes, que como veremos en los ejemplos, es la generalización de una gran cantidad de teoremas matemáticos sobre integración puestos todos en el mismo contexto. Empecemos por el teorema de Hodge, el cual estudiaremos sin demostrarlo.

Teorema 9 (Hodge). *Sea M^n variedad compacta y sin frontera y $\wedge^p$ el conjunto de p-formas sobre M^n. Entonces*

$$w_p = d\alpha_{p-1} + \delta\beta_{p+1} + \gamma_p$$

para toda $w_p \in \wedge^p$, con $\alpha_{p-1} \in \wedge^{p-1}, \beta_{p+1} \in \wedge^{p+1}$ y $\gamma_p \in \wedge^p$ armónica.

Y el teorema de Stokes, que tampoco demostraremos aquí.

Teorema 10 (Stokes). *Sea M^n variedad con frontera no vacía. Sea $w_{p-1} \in \wedge^{p-1}$ una $p-1$-forma sobre M^n. Entonces*

$$\int_M dw_{p-1} = \int_{\partial M} w_{p-1}$$

Para ver este teorema, es mejor ver la manera de trabajar con él. Para familiarizarnos con el teorema de Stokes vamos a estudiar algunos ejemplos en varios espacios.

Exemplo 10. *En $\Re$, $n = 1$, solo hay dos espacio de formas, las 0- y las 1-formas, es decir $\wedge^0$ y $\wedge^1$. Sea $f \in \wedge^0$ y $df \in \wedge^1$. Entonces se tiene*

$$\int_M df = \int_{\partial M} f.$$

Sea $M = (a, b)$, entonces el teorema de Stokes es simplemente

$$\int_a^b df = f|_a^b = f(b) - f(a)$$

que es el teorema fundamental del cálculo.

Exemplo 11. *En $\Re^2$ hay tres espacios de formas, las 0-, 1-, y 2-formas, es decir, $\wedge^0, \wedge^1$ y $\wedge^2$. Sea $w = w_1 dx + w_2 dy$ una 1-forma en $\Re^2$. Entonces $dw = w_{1,y} dy \wedge dx + w_{2,x} dx \wedge dy$. La aplicación del teorema de Stokes en este espacio nos da*

$$\int_M dw = \int_{\partial M} w.$$

Sea M una superficie, su frontera es una curva

$$\int_M (w_{2,x} - w_{1,y})\, dx \wedge dy = \oint_\ell (w_1 dx + w_2 dy)\,,$$

Que es el teorema de Stokes en el plano, vean la figura 2

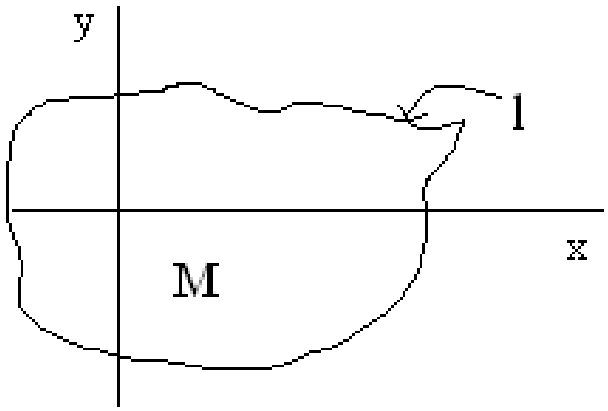

FIGURE 2. Región de integración. M es una superficie y l es su contorno.

EXEMPLO 12. *En $\Re^3$ podemos definir 0-, 1-, 2- y 3-formas. Sea w una 1-forma en $\Re^3$, su diferencial esta dada por $dw = d\left(w_1 dx + w_2 dy + w_3 dz\right)$. Vamos a escribir esta diferencial explicitamente, veamos*

$$\begin{aligned} dw &= w_{1,y} dy \wedge dx + w_{1,z} dz \wedge dx \\ &\quad + w_{2,x} dx \wedge dy + w_{2,z} dz \wedge dy \\ &\quad + w_{3,x} dx \wedge dy + w_{3,y} dy \wedge dz \\ &= \left(w_{2,x} - w_{1,y}\right) dx \wedge dy \\ &+ \left(w_{3,x} - w_{1,z}\right) dx \wedge dz \\ &+ \left(w_{3,y} - w_{2,z}\right) dy \wedge dz \\ &= \frac{1}{2}\left(w_{i,j} - w_{j,i}\right) dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} B_k dx^i \wedge dx^j \end{aligned}$$

Si denotamos $\underset{\rightarrow}{w} = (w_1, w_2, w_3)$, obtenemos que $\underset{\rightarrow}{B} = rot\ \underset{\rightarrow}{w}$, siendo $\underset{\rightarrow}{B} = (B_1, B_2, B_3)$.

La aplicación del teorema de Stokes $\int\limits_M dw = \int\limits_{\partial M} w$ implica que

$$\int\limits_M rot\ \underset{\rightarrow}{w} \cdot d\underset{\rightarrow}{S} = \int\limits_M \underset{\rightarrow}{B} \cdot d\underset{\rightarrow}{S} = \int\limits_{\partial M} \underset{\rightarrow}{w} \cdot d\underset{\rightarrow}{x} = \oint \underset{\rightarrow}{w} \cdot d\underset{\rightarrow}{x}$$

donde hemos usado el vector $d\underset{\rightarrow}{S} = (dy \wedge dz, -dx \wedge dz, dx \wedge dy)$. Esta es la fórmula del flujo magnético sobre una superficie o ley de Gauss.

Vamos a estudiar algunos ejemplos utilizando parte del material desarrollado hasta ahora.

EXEMPLO 13. *Vamos a iniciar de nuevo con el tensor electromagnético del ejemplo 1. Sea de nuevo el tensor $A = A_\mu dx^\mu + d\Lambda$. Tomemos su diferencial $F = dA = A_{\mu,\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu$, ya que $dd\Lambda = 0$. Debido a la antisimetria del operador $\wedge$, el nuevo tensor F es antisimétrico, es el tensor de Faraday. En componentes*

este tensor se escribe como $F = F_{\mu\nu} dx^{\nu} \wedge dx^{\mu}$, *donde las componentes* $F_{\mu\nu}$ *estan dadas por*

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & A_{x,t} - A_{t,x} & A_{y,t} - A_{t,y} & A_{z,t} - A_{t,z} \\ -(A_{x,t} - A_{t,x}) & 0 & A_{y,x} - A_{x,y} & A_{z,x} - A_{x,z} \\ -(A_{y,t} - A_{t,y}) & -(A_{y,x} - A_{x,y}) & 0 & A_{z,y} - A_{y,z} \\ -(A_{z,t} - A_{t,z}) & -(A_{z,x} - A_{x,z}) & -(A_{z,y} - A_{y,z}) & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo general también se escriben las componentes del tensor de Faraday en términos de las componentes del campo eléctrico y magnético como

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Así que

$$\begin{aligned} F &= -E_i dx^i \wedge dt + \epsilon_{ijk} B^i dx^j \wedge dx^k \\ &= -(E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt) \\ &+ B_x dy \wedge dz - B_y dx \wedge dz + B_z dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Comparando las componentes de las matrices, se puede ver que

$$\begin{aligned} -\underset{\rightarrow}{E} &= \frac{\partial \underset{\rightarrow}{A}}{\partial t} + \nabla \Phi \\ \underset{\rightarrow}{B} &= \nabla \times \underset{\rightarrow}{A} \end{aligned}$$

donde claramente se ha definido el vector $\underset{\rightarrow}{A} = (A_x, A_y, A_z)$, *y dos vectores mas, el vector eléctrico* $\underset{\rightarrow}{E} = (E_x, E_y, E_z)$ *y el vector magnético* $\underset{\rightarrow}{B} = (B_x, B_y, B_z)$, *de tal forma que las componentes del tensor electromagnético son* $A_\mu = \left(-\Phi, \underset{\rightarrow}{A}\right)$. *Como se sigue que* $dF = ddA = 0$, *esto implica que* $*dF = 0$. *Usando el resultado del ejercicio 9 se tiene que*

$$*dF = \nabla \times \underset{\rightarrow}{E} \cdot d\overrightarrow{x} + \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{B} dt + \frac{\partial}{\partial t} \underset{\rightarrow}{B} \cdot d\overrightarrow{x} = 0$$

Esta identidad implica que

$$\begin{aligned} \nabla \times \underset{\rightarrow}{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underset{\rightarrow}{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{B} &= 0 \end{aligned}$$

las cuales son la ecuación de Faraday y la ecuación de Gauss para el campo magnético, respectivamente. Análogamente, se puede obtener una expresión para δF. *Para esto, vamos a obtener primero* $*F$

$$*F = B_x dx \wedge dt + B_y dy \wedge dt + B_z dz \wedge dt - (E_x dy \wedge dz - E_y dx \wedge dz + E_z dx \wedge dy)$$

Si ahora usamos el resultado del ejercicio 9 obtenemos que

$$*d*F = -\nabla \times \underset{\rightarrow}{B} \cdot d\overrightarrow{x} + \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{E} dt + \frac{\partial}{\partial t} \underset{\rightarrow}{E} \cdot d\overrightarrow{x}$$

de donde claramente se ven la ley de Ampere y la ley de Gauss para el campo eléctrico, es decir

$$\begin{aligned} \nabla \times \underset{\rightarrow}{B} - \frac{\partial}{\partial t}\underset{\rightarrow}{E} &= 4\pi \underset{\rightarrow}{j} \\ \nabla \cdot \underset{\rightarrow}{E} &= 4\pi\rho \end{aligned}$$

de donde concluimos que las ecuaciones de Maxwell en términos de formas son

$$\begin{aligned} dF &= 0 \\ \delta F &= -4\pi J \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $J = \rho dt + \underset{\rightarrow}{j} \cdot d\overrightarrow{x}$

Ejercicio 5. *Muestre que la norma de Lorentz se puede representar como* $\delta A = 0$

Exemplo 14 (Monopolo de Dirac). *Ahora vamos a ver un ejemplo ya no en un espacio plano, sino en una variedad no trivial, por ejemplo sobre la pelota. Dada la generalidad de las formas, podemo incluso resolver las ecuaciones de Maxwell 3.1 sobre la pelota. Sea* $M = S^2$*, y ya sabemos que unas bases de* T^*S^2 *estan dadas por*

$$\begin{aligned} dx^1_\pm &= \frac{dx}{1 \mp z} + \frac{xdz}{(1 \mp z)^2} \\ dx^2_\pm &= \frac{dy}{1 \mp z} + \frac{ydz}{(1 \mp z)^2} \end{aligned}$$

Cualquier 1-forma en T^*S^2 *se escribe entonces como* $A_\pm = A_{1\pm}dx^1_\pm + A_{2\pm}dx^2_\pm$ *y su diferencial se obtiene como* $dA_\pm = (A_{2\pm,2} - A_{1\pm,1})\, dx^1_\pm \wedge dx^2_\pm$*. Una expresión equivalente para este resultado es que* $F = ddA = 0$*. Análogamente, la aplicación del operador de Hodge a la 1-forma* $A_\pm$ *nos da* $*A_\pm = A_{1\pm}dx^2_\pm - A_{2\pm}dx^1_\pm$*. De aqui podemos obtener la diferencial de esta última forma, obtenemos* $d * A_\pm = (A_{1\pm,1} + A_{2\pm,2})\, dx^1_\pm \wedge dx^2_\pm$*. Para obtener la segunda ecuación de Maxwell, vamos a obtener la aplicación del operador* δ *se obtiene entonces*

$$\begin{aligned} dA_\pm &= (A_{1\pm,2} - A_{2\pm,1})\, dx^1_\pm \wedge dx^2_\pm \\ \delta A_\pm &= A_{1\pm,1} + A_{2\pm,2}\,. \end{aligned}$$

Si ahora usamos la Norma de Lorentz $\delta A = 0$*, podemos reducir las ecuaciones electromagnéticas sobre la esféra sustancialmente. Vamos a escribir la segunda ecuación de Maxwell. Se tiene que*

$$\begin{aligned} \delta F &= - * d * F = - * d\,(A_{1\pm,2} - A_{2\pm,1}) \\ &= - * \left(A_{1\pm,21}\, dx^1_\pm + A_{1\pm,22}\, dx^2_\pm - A_{2\pm,11}\, dx^1_\pm - A_{2\pm,12}\, dx^2_\pm\right) \\ &= - * \left[-(A_{2\pm,22} + A_{2\pm,11})\, dx^1_\pm + (A_{1\pm,22} + A_{1\pm,11})\, dx^2_\pm\right] \\ &= (A_{1\pm,11} + A_{1\pm,22})\, dx^1_\pm + (A_{2\pm,11} + A_{2\pm,22})\, dx^2_\pm \end{aligned}$$

donde ya hemos usado la norma de Lorentz para simplificar las ecuaciones. Una solución de las ecuaciones de Maxwell en el vacio $\delta F = 0$ *sobre la esfera es:*

$$A_{1\pm} = A_0 x^2_\pm, \qquad A_{2\pm} = -A_0 x^1_\pm$$

donde A_0 es una constante. Observe que $x^1_\pm = r^1 \circ \sigma_\pm(p) = x/(1 \mp z)$ and $x^2_\pm = r^2 \circ \sigma_\pm(p) = y/(1 \mp z)$. La solución entoces es

$$A_\pm = A_0 \left(x^2_\pm dx^1_\pm - x^1_\pm dx^2_\pm\right) = \frac{A_0}{(1 \mp z)^2}(ydx - xdy) \mp \frac{A_0}{(1 \mp z)^3}(xy - yx)\, dz$$

Si ahora cambiamos las coordenadas a coordenadas esféricas **??**, *las cuales son más convenientes para analizar este caso, se obtiene:*

$$\begin{aligned} A_\pm &= \frac{A_0}{(1 \mp z)^2}(ydx - xdy) = A_0 \frac{(\mp 1 - \cos(\theta))}{(\pm 1 - \cos(\theta))} d\varphi \\ A_+ &= -A_0 \frac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)} d\varphi \\ A_- &= -A_0 \frac{1 + \cos(\theta)}{1 - \cos(\theta)} d\varphi \end{aligned}$$

la cual es una solución a las ecuaciones de Maxwell en el vacio sobre la pelota.

Exemplo 15. *Vamos a tomar alguna solución con fuentes. Supongamos que tenemos un tensor de corrientes dado por*

$$J = \frac{x^1}{({x^1}^2 + {x^2}^2 + 1)^3} dx^1 + \frac{x^2}{({x^1}^2 + {x^2}^2 + 1)^3} dx^2$$

(vamos a quitar en este ejemplo los subindices $\pm$ por comodidad). Igualando la ecualción $\delta F = -4\pi J$ se llega a un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A_{1,11} + A_{1,22} &= \frac{-4\pi x^1}{({x^1}^2 + {x^2}^2 + 1)^3} \\ A_{2,11} + A_{2,22} &= \frac{-4\pi x^2}{({x^1}^2 + {x^2}^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

Este sistema tiene una solución dada por

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\pi x^1}{2({x^1}^2 + {x^2}^2 + 1)} \\ A_2 &= \frac{\pi x^2}{2({x^1}^2 + {x^2}^2 + 1)} \end{aligned}$$

En términos de las coordenadas de $\Re^3$, la solución (regresando a la notación con $\pm$) es

$$\begin{aligned} A_\pm &= \frac{A_0}{(1 \mp z)}(ydx - xdy) = A_0 (\mp 1 - \cos(\theta))\, d\varphi \\ A_+ &= A_0 (-1 - \cos(\theta))\, d\varphi \\ A_- &= A_0 (1 - \cos(\theta))\, d\varphi \end{aligned}$$

Es decir $A_+ = A_- - 2A_0 d\varphi$. Por lo tanto $A_\pm$ es solamente un ***campo de norma****. $A_\pm$ se llama el* ***monopolo de Dirac***

En la siguiente sección vamos a introducir otros dos operadores diferenciales, uno es llamado derivada de Lie y el otro la derivada covariante. Ambos tienen su esfera de interes y se utilizan para diferentes objetivos. La derivada de Lie es muy importante para encontrar simetrias en alguna variedad. Con ella es posible encontrar los vectores de Killing, que son asociados a simetrias del espacio. Con la

derivada covariante se construye el tensor de curvatura, que es un tensor con el que podemos medir ésta en todo punto del espacio. Para poder introducir la derivada de Lie es necesario introducir algunos conceptos previos. Para esto necesitamos primero algunas definiciones.

DEFINICIÓN 13. *Sea M^n variedad, $U \subset M^n$ y $(-\epsilon, \epsilon) \subset \Re$. Un* ***grupo uniparamétrico de transformación*** *es una función suave $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M^n$ tal que*

1) $\varphi(0, x) = x$
2) $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ para toda $t, s \in \Re$, $x \in M^n$

COMENTARIO 3. *Observe que $\varphi(t + s, x) = \varphi(s + t, x) = \varphi(s, \varphi(t, x))$*

El nombre de grupo es porque con esta función efectivamente se puede formar un grupo, de un solo parámetro, esto se hace en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 9. *Sea $\varphi : \Re \times M^n \to M^n$ un grupo uniparamétrico de transformaciones y*

$$\Psi = \{\varphi_t : M^n \to M^n, x \to \varphi_t(x) = \varphi(t, x)\}.$$

Entonces $(\Psi, \circ)$ es un subgrupo del grupo de difeomorfismos.

DEM. 11. *Se tiene que*

$$\varphi_t \circ \varphi_s(x) = \varphi_{t+s}(x) = \varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi_t(\varphi_s(x)).$$

Entonces φ es cerrado. $\varphi_{t+s} = \varphi_{s+t}$ implica que Ψ es abeliano, φ_0 es la identidad y $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$, ya que $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_0$ ■

Como el grupo uniparamétrico de transformaciones es una función de los reales a la variedad, se puede construir una curva. Entonces con la curva se puede construir la tangente a esta curva que a su vez define un vector. Entonce se dice que esta curva es la curva integral del vector tangente a la curva. Vamos a hacer esto formalmente.

DEFINICIÓN 14. *Sea M^n variedad. Una* ***curva integral de*** *$X \in TM^n$ es un camino suave $\gamma : (a, b) \to M^n$ tal que $\dot{\gamma}(s) = X_{\gamma(s)}$, $s \in (a, b)$ vean la figura 3.*

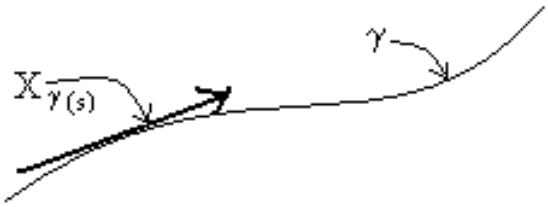

FIGURE 3. La curva integral del vector X, es el camino suave representado en la figura.

Vamos a aclarar esta definición un poco. Sea $c = (U, \psi, v)$ una carta y $X \in TU$. Entonces la función $\gamma : (a, b) \to U$ es una curva que cumple con la propiedad

$$d\gamma : T_s\Re \to T_{\gamma(s)}M^n$$

tal que explicitamente se cumple la siguiente igualdad

$$d\gamma\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right) = X_{\gamma(s)} := \dot{\gamma}(s) = \frac{d}{dt}\circ\gamma^*.$$

donde hemos definido la función $\dot{\gamma}(s)$. Esto es, para una función cualquiera de la variedad a los reales $f : M^n \to \Re$ se tiene que esta función cumple con las siguientes igualdades

$$\dot{\gamma}\left(f\right) = d\gamma\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right)(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_s (f\circ\gamma) = X_{\gamma(s)}\left(f\right).$$

Vamos a tomar una función muy particular, sea $f = x^i$, entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}\left(x^i\right) &= d\gamma\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right)\left(x^i\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_s \left(x^i\circ\gamma\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(x^i\circ\gamma\right)(s) = X^j_{\gamma(s)}\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{\gamma(s)}\left(x^i\right) \\
&= X_{\gamma(s)}\left(x^i\right) = X\left(x^j\right)\left(\gamma\left(s\right)\right).
\end{aligned}$$

Así es que se cumple $\frac{d}{dt}\left(x^i\circ\gamma\right) = X\left(x^j\right)\circ\gamma$. Esto quiere decir que, dado un vector X en la variedad, para encontrar una curva integral, hay que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt}\left(x^i\circ\gamma\right) = X\left(x^i\right)\circ\gamma \tag{3.2}$$

Exemplo 16. *Vamos a encontra la curva integral del vector*

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial}{\partial x^2}$$

Entonces, de la ecuación (3.2), las ecuaciones a resolver son (recuerden que $r^1 = x^1\circ\gamma,\ r^2 = x^2\circ\gamma$*)*

$$\begin{aligned}
\frac{dr^1}{dt} &= X(x^1)\circ\gamma = r^2 \\
\frac{dr^2}{dt} &= X(x^2)\circ\gamma = -r^1
\end{aligned}$$

Una solución a este sistema es $r^1 = r\sin(t),\ r^2 = r\cos(t)$*. Es fácil ver que la curva integral es un círculo de radio* r*, ya que* ${r^1}^2 + {r^2}^2 = r^2$

Exemplo 17. *Veamos ahora la curva integral del vector del ejemplo* **??**

$$X = (\cos(\theta) - 1)\left(\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

Entonces, de la ecuación (3.2), las ecuaciones a resolver son

$$\begin{aligned}
\frac{dr^1}{dt} &= X(\theta)\circ\gamma = \left(\cos(r^1) - 1\right)\cos(r^2) \\
\frac{dr^2}{dt} &= X(\varphi)\circ\gamma = \left(\cos(r^1) - 1\right)\frac{\sin(r^2)}{\sin(r^1)}
\end{aligned}$$

Si dividimos la primera ecuación entre la segunda y separamos las variables, podemos integrar este sistema de ecuaciones. El resultado es que $(\csc(r^1) - \cot(r^1)) =$

$c\sin(r^2)$. *Una parametrización de esta curva esta dada por* $r^1 = \lambda$, $r^2 = 1/c\arcsin(\csc(\lambda) - \cot(\lambda))$. *La curva es graficada en la figura 4*

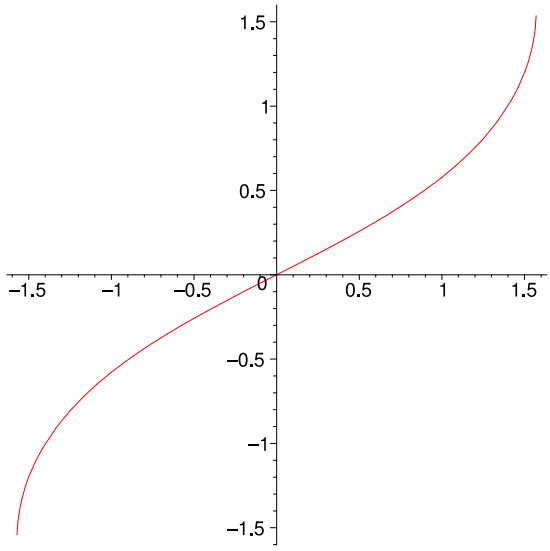

FIGURE 4. Curva integral del vector del ejemplo 17. Como este vector corresponde a uno de los vectores base de la pelota, esta curva esta sobre la pelota y hay que imaginarsela dando vuelta alrededor de ella y con los extremos que se juntan.

EJERCICIO 6. *Encuetre la curva integral de los vectores*

$$\begin{aligned} 1)\ X &= \frac{\partial}{\partial x^1} + m\frac{\partial}{\partial x^2} \quad \textit{sobre} \ \ \Re^2 \\ 2)\ X &= \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \textit{sobre} \ \ S^2 \end{aligned}$$

Otra propiedad importente del grupo unimaramétrico de transformaciones es que induce dos importantes funciones. Con ellas vamos a poder construir la derivada de Lie. Vamos a definir estas funciones.

Definición 15. *Sea $\varphi : \Re \times M^n \to M^n$ un grupo uniparamétrico de transformaciones sobre M^n variedad. φ induce dos funciones*

$$\begin{aligned} \varphi_t : M^n &\to M^n \\ x &\to \varphi_t(x) = \varphi(t,x) \\ \varphi_x : \Re &\to M^n \\ t &\to \varphi_x(t) = \varphi(t,x). \end{aligned}$$

Entonces $\{\varphi_t\}$ es un subgrupo abeliano del grupo de difeomorfismos y φ_x induce el vector $X = \dot{\varphi}_x$.

Observe que el conjunto $\{\varphi_x | \varphi_x(t) = \varphi(t,x)\}$ cumple que $\varphi_x \circ \varphi_y \neq \varphi_y \circ \varphi_x$ en general, por lo que

$$\begin{aligned} d(\varphi_x \circ \varphi_y)\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right) &= d\varphi_x \circ d\varphi_y\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right) \\ &= X \circ Y \neq Y \circ X \\ &= d(\varphi_y \circ \varphi_x)\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right). \end{aligned}$$

Esto es, la función φ_x induce un producto que en general es un producto no conmutativo entre los vectores de la variedad.

4. Derivada de Lie y Derivada Covariante

Debido a la rica estructura que tienen los tensores, es posible definir varios operadores diferenciales. En esta sección vamos a introducir dos operadores diferenciales muy importantes y utilizados en física, son operadores que generalizan la derivada normal. La derivada de Lie es conveniente para espacios que tinen isometrias o simetrias especiales. Con la derivada de Lie, como veremos, es posible encontrar estas simetrias. La derivada covariante es un operador que convierte a un tensor en otro tensor, por eso su importancia como operador diferencial. A la derivada de Lie la vamos a introducir sin demostraciones, pero para la derivada covariante daremos las demostraciones mas importantes. Ahora estamos listos para definir la derivada de Lie.

Definición 16. *Sea M^n variedad y $T \in T^r_s$ tensor sobre M^n. Sea φ en grupo uniparamétrico de transformaciones sobre M^n, $X = \dot{\varphi}_x$. La* ***derivada de Lie*** *de T a lo largo de X se define como*

$$L_X T\mid_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(T\mid_p - \varphi_{t^*} T\mid_p\right)$$

donde φ_x y φ_t son las funciones inducidas por φ.

La derivada de Lie tiene varias propiedades, que aquí vamos a poner sin demostración, y que podemos resumir en la siguiente proposición.

Proposición 10. *Sea L_X derivada de Lie del vector X, entonces se cumple:*
1) L_X preserva el tipo de tensor, es decir mapea $L_X : T^r_s \to T^r_s$
2) L_X es lineal y preserva la contracción
3) Si S y T son tensores arbitarios, se cumple $L_X(S \otimes T) = (L_X S) \otimes T + S \otimes (L_X T)$
4) $L_X f = X(f)$ para $f : M^n \to \Re$

5) $L_X Y = -L_Y X = [X, Y]$ *para toda* $X, Y \in TM^n$
6) $d\,(L_X w) = L_X(dw)$

Finalmente, como dijimos, vamos a introducir otro operador diferencial, la derivada covariante. Para esto necesitamos introducir una nueva estructura llamada la conexión, y que vamos a denotar por ∇. La idea de la conexón es dar una forma de conectar un vector que es trasladado paralelamente a traves de la variedad. Así, si el vector base e_a es traslado paralelamente a lo largo de la curva γ, que tiene como vector tangente al vector e_b, el vector final trasladado paralelamente sera $\nabla_{e_b} e_a$, vean la figura 5. Vamos a desarrolar esta idea con cuidado. Formalmente la definición de conexión es:

Definición 17. *Una* ***conexión*** ∇ *para algún* $p \in M^n$*, variedad, es un mapeo que le asocia a cada tensor del tipo* $T \in T^r_s$ *un tensor del tipo* T^r_{s+1} $\nabla : T^r_s \to T^r_{s+1}$ *tal que*
1) ∇ *es una derivación en el álgebra tensorial, i.e.*
$\nabla\,(\alpha T + \beta T') = \alpha \nabla T + \beta \nabla T'$ *y*
$\nabla\,(S \otimes T) = \nabla S \otimes T + S \otimes \nabla T$
2) $\nabla f = df$ *para toda* $f : M^n \to \Re$
3) $\nabla = e^a \nabla_{e_b}$ *donde* $\{e^a\}_{a=1,\cdots,n}$ *y* $\{e_b\}_{b=1,\cdots,n}$ *son bases duales de* $T^* M^n$ *y* TM^n *respectivamente.*
4) ∇_X *es lineal, i.e.* $\nabla_{\alpha X + \beta Y} = \alpha \nabla_X + \beta \nabla_Y$.

No hay una manera única de definir la conexión en una variedad. La más común es la conexión que hace que la derivada covariante haga cero al tensor métrico, la cual introduciremos mas adelante. Pero en general, la forma de definir la conexión es usando la siguiente regla.

Sea $\{e_a\}_{a=1,\ldots,n}$ una base de TM^n no necesariamente coordinada, es decir $e_a = e^i_a \frac{\partial}{\partial x^i}$. Entonces

$$\nabla_{e_b} e_a = \Gamma^c_{ab} e_c \in TM^n$$

donde los coeficientes Γ^c_{ab} son funciones suaves, vean la figura 5, que se obtienen del producto $\Gamma^c_{ab} = \langle e^c, \nabla_{e_b} e_a \rangle$, donde $\left\{e^b\right\}_{b=1,\cdots,n}$ es la base dual a $\{e_a\}_{a=1,\cdots,n}$, es decir $e^b = e^b_j dx^j$ y se cumple que

$$\left\langle e^b, e_a \right\rangle = e^b_j e^j_a \left\langle dx^j, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \delta^b_a. \tag{4.1}$$

De hecho, definir la conexión es equivalente a dar los valores de las funciones Γ^c_{ab} sobre la variedad. Para una base coordenada, los coeficientes de la conexión son

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

nosotros vamos a tomar siempre conexiones simétricas, es decir, para las bases coordenadas se cumple que

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$$

Ejercicio 7. *Estudien como se comportan los coeficientes* Γ^c_{ab} *bajo un cambio de base (de coordenadas).*

Conociendo la conexión en la variedad, se puede conocer la derivada covariante de un vector. La forma de hacerlos se ve en la siguiente proposición.

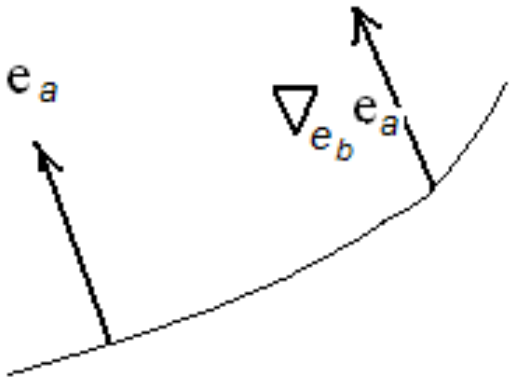

FIGURE 5. El desplazamiento paralelo de un vector. Este desplazamiento en una variedad define los coeficientes de la derivada covariante entre bases dadas.

PROPOSICIÓN 11. *Las componentes de la derivada covariante del vector Y a lo largo del vector X, se ven como*

$$\nabla_X Y = \left(Y^a_{|b} X^b\right) e_a$$

donde $\{e_a\}_{a=1,\cdots,n}$ *es una base de* TM^n *y* $Y^a_{|b} = e_b(Y^a) + \Gamma^a_{cb} X^c$

DEM. 12. *Tomemos* $X = X^b e_b \;\; Y = Y^a e_a$, *entonces*

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_b} Y &= \nabla_{e_b}\left(Y^a e_a\right) \\
&= \left(\nabla_{e_b} Y^a\right) e_a + Y^a \left(\nabla_{e_b} e_a\right) \\
&= e_b\left(Y^a\right) e_a + \Gamma^c_{ab} e_c Y^a \\
&= \left(e_b\left(Y^a\right) + \Gamma^a_{cb} Y^c\right) e_a \\
&= Y^a_{|b} e_a
\end{aligned}$$

por la linearidad del operador ∇_{e_a} *se obtiene el resultado deseado.* ■

NOTACIÓN 4. *En el caso que la base sea una base coordenada* $\{dx^i\}$, *se acostumbra denotar a la derivada covariante no por el simbolo* $|$, *sino por* ; *entonces:*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} Y = \left(Y^i{}_{,j} + \Gamma^i_{kj} Y^k\right) \frac{\partial}{\partial x^i} = Y^i_{;j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Por supuesto $\nabla Y = dx^j Y^i_{;j} \frac{\partial}{\partial x^i}$ no depende de las bases.

De hecho, la definición de la conexión o del transporte paralelo es equivalente. Si se define una, se puede definir la otra. En este caso hemos definido a la conexión, entonces el trasporte paralelo se define como:

DEFINICIÓN 18. *Sea* γ *un camino en la variedad* M, *y sea* $X = \dot{\gamma}$ *el vector tangente a lo largo de* γ. *Se dice que el vector* Y *ha sido trasladado paralelamente a traves de* X, *si*

$$\nabla_X Y = 0$$

Supongamos por facilidad que $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, y que $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Si desarrollamos la fórmula de la definición 18, se tiene

$$0 = \nabla_X Y = \nabla_{X^j \frac{\partial}{\partial x^j}} Y = X^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} Y = \left(X^j Y^i{}_{,j} + \Gamma^i_{kj} X^j Y^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

que puede escribirse de la forma equivalente

$$\left(X(Y^i) + \Gamma^i_{kj} X^j Y^k \right) \circ \gamma = \frac{d\left(Y^i \circ \gamma\right)}{dt} + \Gamma^i_{kj} X^j Y^k \circ \gamma = 0$$

donde hemos usado la fórmula de la cuarva integral de la ecuación (3.2) de X en la igualdad.

Exemplo 18. *Vamos a discutir un ejemplo simple, para iniciar, vamos a suponer que la conexión es cero. Supongamos que tenemos el vector* $Y = Y^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + Y^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$ *el cual queremos desplazar paralelamente a lo largo de una curva. Ahora veamos la ecuación del desplazamiento paralelo, se tiene*

$$\frac{dY^1 \circ \gamma}{dt} = 0, \qquad \frac{dY^2 \circ \gamma}{dt} = 0$$

cuya solución es $Y^1 = Y^1_0$, $Y^2 = Y^2_0$, *donde ya hemos puesto las condiciones iniciales a la solución, es decir, el valor del vector* $Y|_{t=t_0}$ *en el punto donde se inicia el desplazamiento. Este vector será siempre* $Y|_{t=t_0}$, *es decir, si la conexión es cero, un vector se desplaza paralelamente sin cambiar.*

Exemplo 19. *Ahora vamos a estudiar un ejemplo donde la conexión no es cero. Sea la variedad* M *2-dimensional, con coordenadas* θ, φ *y con la conexión*

$$\Gamma^\theta_{\theta\theta} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) - 1} \qquad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = \sin(\theta) \qquad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = -\frac{1}{\sin(\theta)}$$

y vamos a transportar paralelamente un vector sobre esta variedad a lo largo del vector X *dado por*

$$X = \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

cuya curva integral es un desplazamiento sólo en la dirección φ *y esta dada por la parametrización* $\theta = \theta_0$ *constante y* $\varphi = \theta_0 t$. *Entonces encontremos el desplazamiento paralelo de un vector en* M *a lo largo de este vector, obtenemos*

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\left(Y^\theta \circ \gamma\right)}{dt} + \Gamma^\theta_{\theta\theta} X^\theta Y^\theta \circ \gamma + \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} X^\varphi Y^\varphi \circ \gamma \\ &= \frac{dy^1}{dt} + \sin^2(\theta_0) y^2 \\ 0 &= \frac{d\left(Y^\varphi \circ \gamma\right)}{dt} + \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} X^\theta Y^\varphi \circ \gamma + \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} X^\varphi Y^\theta \circ \gamma \\ &= \frac{dy^2}{dt} - y^1 \end{aligned}$$

Para obtener el desplazamiento paralelo de Y, *hay que resolver este sistema de ecuaciones con las condiciones iniciales correspondientes al punto inicial. La solución del sistema esta dada por*

$$\begin{aligned} y^1(t) &= C1 \sin\left(\sin\left(\theta_0\right) t\right) + C2 \cos\left(\sin\left(\theta_0\right) t\right) \\ y^2(t) &= \frac{C2}{\sin\left(\theta_0\right)} \sin\left(\sin\left(\theta_0\right) t\right) - \frac{C1}{\sin\left(\theta_0\right)} \cos\left(\sin\left(\theta_0\right) t\right) \end{aligned}$$

Dado el valor inicial de y^1 y y^2, se fijan las constantes y se puede encontrar el vector desplazado paralelamente en otro punto, para algún valor de t.

De la misma forma podemos calcular la derivada covariante de una 1-forma, dado que ya conocemos la conexión en la variedad. Esto se ve en la proposición siguiente.

PROPOSICIÓN 12. *Sea ∇ conexión en M^n. Si $\nabla_{e_b} e_a = \Gamma^c_{ab} e_c$ entonces $\nabla_{e_b} e^a = -\Gamma^a_{cb} e^c$.*

DEM. 13. *Sea $Y = Y^a e_a \in TM^n$ y $w = w_c e^c \in T^*M^n$. Usemos el hecho que ∇ y por lo tanto ∇_{e_b} son derivaciones, entonces*

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_b}(w_c Y^c) &= w_{c|b} Y^c + w_c Y^c_{|b} \qquad \textit{Y como } w_c Y^c \textit{ es una función, se tiene:} \\
&= e_b(w_c) Y^c + w_c e_b(Y^c) \qquad \textit{Por otro lado, se sigue que:} \\
&= (e_b(w_c) - \Gamma^a_{cb} w_a) Y^c + w_a (e_b(Y^a) + \Gamma^a_{cb} Y^c)
\end{aligned}$$

Por lo que entonces $\nabla_{e_b} w = w_{c|b} e^c = (e_b(w_c) - \Gamma^a_{cb} w_a) e^c$ ■

EJERCICIO 8. *Demuestre que las componentes de la derivada covariante $\nabla_{e_b} T$, aplicada a un tensor $T = T^{b_1 \cdots b_r}_{a_1 \cdots a_s} e_{b_1} \otimes \cdots \otimes e_{b_r} \otimes e^{a_1} \otimes \cdots \otimes e^{a_s}$ estan dadas por*

$$T^{b_1 \cdots b_r}_{a_1 \cdots a_s|b} = e_b(T^{b_1 \cdots b_r}_{a_1 \cdots a_s}) + \sum_{i=1}^{r} \Gamma^{b_i}_{cb}\, T^{b_1 \cdots c \cdots b_r}_{a_1 \cdots a_s} - \sum_{j=1}^{s} \Gamma^c_{a_j b}\, T^{b_1 \cdots b_r}_{a_1 \cdots c \cdots a_s}$$

Existe una relación entre todas los operadores diferenciales que hemos definido, la diferencial de p-formas, la derivada de Lie y la derivada covariante. Entre la diferencial de p-formas y la derivada covariante la relación es que la diferencial se puede facilmente generalizar a espacios con conexión ∇. La diferencial exterior, definición 6, en espacios con conexión es

$$dw = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^J}} \left(w_{i_1, \cdots, i_p} \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p},$$

que, por ejemplo, para una 1-forma $w = w_i\, dx^i$ se obtiene

$$dw = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} (w_i) dx^i = (w_{i,j} - \Gamma^k_{ij} w_k) dx^i \wedge dx^j.$$

Todas las proposiciones y teoremas que se aplican a la derivada exterior se siguen igualmente con la definición extendida. Por lo general, los coeficientes de conexón en un sistema coordenado $\{dx^i\}$ son simétricos, es decir $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, en tal caso la definición anterior es exactamente la definición 6.

La relación entre la derivada de Lie y la derivada covariante, la cual veremos sin demostración, se sigue de la siguiente proposicón.

PROPOSICIÓN 13. *Sea*

$$T = T^{b_1 \cdots b_r}_{a_1 \cdots a_s} e_{b_1} \otimes \cdots \otimes e_{b_r} \otimes e^{a_1} \otimes \cdots \otimes e^{a_s}$$

tensor. Entonces la derivada de Lie a lo largo del vector $X = X^c\, e_c$ de este tensor esta dada por

$$L_X T^{b_1 \cdots b_r}_{a_1 \cdots a_s} = X^c T^{b_1 \cdots b_r}_{a_1 \cdots a_s|c} - \sum_{n=1}^{r} T^{b_1 \cdots c \cdots b_r}_{a_1 \cdots a_s} X^{b_n}_{|c} + \sum_{m=1}^{s} T^{b_1 \cdots b_r}_{a_1 \cdots c \cdots a_s} X^c_{|a_m} \tag{4.2}$$

Vamos a ver algunos ejemplos de como usar la fórmula (4.2).

Exemplo 20. *Vamos a encontrar la derivada de Lie de un vector* $Y = Y^b e_b$ *a lo largo del vector* $X = X^c e_c$. *Usando la fórmula (4.2) se tiene*

$$L_X Y^b = X^c Y^b_{|c} - Y^c X^b_{|c} = [X, Y]^b - D^b_{cd} X^c Y^d$$

donde $D^b_{cd} = \Gamma^b_{dc} - \Gamma^b_{cd}$. *Si las componentes de la conexión son simétricas* $D^b_{cd} = 0$, *la última igualdad fué dada en la proposción 10 sobre las propiedades de la derivada de Lie. Vamos a encontrar ahora la derivada de Lie de una uno forma* $w = w_a e^a$ *a lo largo del mismo vector* $X = X^c e_c$. *Usando la fórmula (4.2) se tiene*

$$L_X w_a = X^c w_{a|c} + w_c X^c_{|a}$$

Si $\{e_j\} = \{\frac{\partial}{\partial x^j}\}$, $\{e^i\} = \{dx^i\}$ *son bases coordenadas, entoces solo hay que cambiar el simbolo* $|$ *por* ; *y* $D^i_{jk} = 0$ *generalmente.*

Exemplo 21. *Ahora vamos a buscar la derivada de Lie a lo largo del vector* $X = X^c e_c$ *de un tensor* $T = T_{ab} e^a \otimes e^b$. *De nuevo, usando la fórmula (4.2) se tiene*

$$L_X T_{ab} = X^c T_{ab|c} + T_{cb} X^c_{|a} + T_{ac} X^c_{|b}$$

Este resultado lo usaremos más adelante.

El interes de la derivada de Lie radica en lo siguiente. Supongamos que φ es una isometria (ver capítulo 9 definición **??**). Es decir, esta función deja invariate la métrica $\rho \circ \varphi(X, Y) = \rho(\varphi(X), \varphi(Y)) = \rho(X, Y)$. La presencia de isometrias es común en problemas reales, por ejemplo, si un prblema tiene simetria axial, la métrica del problema permanece inalterada alrededor del eje z, o si el prblema a tratar es periodico, la métrica (Lorentziana) del problema tiene una isometria en el tiempo. Ahora bien, si φ es una isometria, la derivada de Lie de la métrica a lo largo de su vector tangente $\dot{\varphi} = X$ es cero, lo cual se ve de la definición 16. Es decir, las simetrias de un problema conducen siempre a derivadas de Lie de la métrica a lo largo del vector de la isometria igual a cero. A los vectores tangente generados por una isometria se les llama vectores de Killing. Su definición formal es la siguiente.

Definición 19. *Sea* φ *un grupo uniparametrico de trasformaciones que a su vez es una isomentria* $\varphi^*_t g = g$. *Entonces el vector generado por* $\dot{\varphi}_x = X$ *se llama* ***vector de Killing***

La manera de encontrar los vectores de Killing de una variedad M, es utilizando el ejmplo 21. Para esto, supongamos que se tiene una métrica como la definida en el ejemplo 3. Entonces se sigue que

Proposición 14. *Un vector de Killing* $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ *cumple con la ecuación diferencial*

$$L_X g_{ij} = X^k g_{ij;k} + g_{kj} X^k_{;i} + g_{ik} X^k_{;j} = 0$$

donde la míetrica esta dada como $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$.

Dem. 14. *Por sustitución directa en el ejercicio 21* ■

Comentario 4. *Mas adelante veremos que una métrica es compatible con la conexión si su derivada covariante es cero, es decir,* $\nabla g = 0$. *Para estas métricas, las que más nos interesan a nosotros, la ecuación anterior se reduce a*

$$X_{j;i} + X_{i;j} = 0$$

donde hemos definido $X_{k;i} = g_{kj}X^k_{;i}$. *A esta ecuación se le llama la* ***ecuación de Killing***

Existen varias propiedades de los tensores cuando se les aplican los operadores diferenciales que hemos visto. En lo que sigue, vamos a deducir solo algunas de las propiedades más importantes. Vamos a iniciar con la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 15. *Sean* $\{e^a = e^a_i dx^i\}$ *1-formas base del espacio cotangente* T^*M *y* ∇ *la derivada covariante en* M, *tal que* Γ^a_{bc} *es su conexión asociada. Entonces se sigue que*

$$de^a = \Gamma^a_{bc} e^b \wedge e^c$$

DEM. 15. *Sea* $\{e_b = e^k_b \frac{\partial}{\partial x^k}\}$ *la base dual a* $\{e^a = e^a_i dx^i\}$ *en* TM. *De la definición de la conexión* Γ^a_{bc}, *se sigue que*

$$\Gamma^a_{bc} = \langle e^a, \nabla_c e_b\rangle = \langle e^a_i dx^i, e^k_{b;j} e^j_c \frac{\partial}{\partial x^k}\rangle = e^a_k e^j_c e^k_{b;j}$$

De una forma análoga se puede ver que

$$-\Gamma^a_{bc} = \langle \nabla_c e^a, e_b\rangle = \langle e^a_{i;j} e^j_c dx^i, e^k_b \frac{\partial}{\partial x^k}\rangle = e^a_{k;j} e^j_c e^k_b$$

Donde hemos usado para simplificar, la notación $\nabla_{e_c} = \nabla_c$. *Si juntamos los dos resultados anteriores se tiene*

$$\Gamma^a_{bc} = e^a_k e^j_c e^k_{b;j} = -e^a_{k;j} e^j_c e^k_b$$

De la definición de diferencial exterior se sigue que

$$\begin{aligned} de^a &= e^a_{k;i} dx^i \wedge dx^k \\ &= e^a_{k;i} \delta^i_j \delta^k_l dx^j \wedge dx^l \\ &= e^a_{k;i} e^b_j e^i_b e^c_l e^k_c dx^j \wedge dx^l \\ &= -e^a_{k;i} e^i_c e^k_b e^b \wedge e^c \\ &= \Gamma^a_{bc} e^b \wedge e^c \end{aligned}$$

Esta es la llamada ***primera forma fundamental de Cartan***. ■

NOTACIÓN 5. *Es conveniente definir la 1-forma de conexón por*

$$\Gamma^a_b = \Gamma^a_{bc} e^c$$

de tal forma que

$$de^a + \Gamma^a_b \wedge e^b = 0$$

Para terminar esta sección, vamos a definir las curvas geodésicas. Una curva geodésica es aquella que transporta paralelamente su vector tangente. Es decir:

DEFINICIÓN 20. *Sea* γ *una trayectoria en una variedad* M *y* X *su vector tangente,* $\dot{\gamma} = X$. *Se dice que la curva descrita por esta trayectoria es una geodésica si*

$$\nabla_X X = 0$$

Comentario 5. *La ecuación geodésica también puede escribirse usando la fórmula (3.2) de la curva integral del vector X.*

$$\frac{dX^i \circ \gamma}{dt} + \Gamma^i_{jk} X^j X^k \circ \gamma = \frac{d^2 r^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dr^j}{dt}\frac{dr^k}{dt} = 0 \tag{4.3}$$

donde hemos usado la fórmula $dr^i/dt = X^i \circ \gamma$ de la curva integral de X.

Vamos a estudiar un ejemplo sencillo.

Exemplo 22. *Vamos a estudiar un ejemplo donde la conexión es de la variedad M 2-dimensional, con coordenadas θ, φ del ejemplo 19. Recordando las ecuaciones del desplazamiento paralelo, podemos escribir las ecuaciones para las geodésicas en este espacio como*

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r^\theta}{dt^2} + \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) - 1}\left(\frac{dr^\theta}{dt}\right)^2 + \sin(\theta)\left(\frac{dr^\varphi}{dt}\right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 r^\varphi}{dt^2} - \frac{2}{\sin(\theta)}\frac{dr^\theta}{dt}\frac{dr^\varphi}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

La resolución de este sistema no es simple y en algunos casos se pueden dar soluciones parciales o se resuelven estos sistemas numericamente.

5. El Tensor Métrico y el Tensor de Curvatura

La definición de la conexión es, en general totalmente independiente de la métrica de la variedad. En esta sección vamos a definir al tensor de curvatura en terminos de la conexión. Eso quiere decir que la curvatura de la variedad es, en general, totalmente independiente de la métrica. El transporte paralelo, equivalente a la conexión, asi como la curvatura, son cantidades que no dependen, en general, de la métrica de la variedad. Estrictamente hablando, no hay forma de fijar la conexión de una manera universal. En física, y mas concretamente en relatividad general, la conexión se fija utilizando las ecuaciones de Einstein. La razón por la que introducimos al tensor métrico y al tensor de curvatura en la misma sección, es porque hay una manera particular de fijar la conexón conociendo el tensor métrico, que es la manera canónica utilzada en física para relacionar a los dos tensores. Así, las ecuaciones de Einstein son ecuaciones diferenciales para las componentes del tensor métrico, que a la vez fija la conexión y con ello a la curvatura. Esta conexión es la que más nos va a interesar aquí. Sin embargo, empezaremos introduciendo al tensor de curvatura sin relación con el tensor métrico, y despues discutiremos el caso especial en el que si estan relacionados. Este último caso es de mucho interes porque la métrica fija la conexión y la curvatura de manera única y nos limitaremos a estudiar las propiedades del tensor de curvatura solo para este caso. Vamos a iniciar introduciendo el tensor métrico.

Definición 21. *Sea M^n una variedad n-dimensional y $\{w^a\}_{a=1,\cdots,n}$ una base de T^*M. Un tensor del tipo $(0,2)$ simétrico tal que*

$$g = \eta_{ab} w^a \otimes w^b$$

*donde $(\eta)_{ab} = \eta_{ab} = diag(\pm 1, \cdots, \pm 1)$, es un **tensor métrico** de M.*

Notación 6. *A la matriz η_{ab} se le llama la **signatura de la variedad**. Si η es la matriz identidad, se dice que la **variedad** es **Euclidiana**. Si hay solo un uno con signo diferente a los demas, se dice que la **variedad** es **Riemanniana**.*

Sin embargo, en algunos libros (de matemáticas) lo que aquí llamamos variedad Euclidiana lo llaman variedad Riemanniana y lo que aqui llamamos Riemanniana lo llaman ***variedad Pseudoriemanniana*** *o* ***variedad Lorenziana****.*

Con el tensor métrico, la variedad y su espacio tangente adquieren varias estructuras. Si M^n es una variedad con métrica, entonces g es un producto interno entre vectores $g(X,Y)$. El espacio (TM,g) es un espacio Euclidiano y g su producto interno. Con este producto se define una norma tal que la norma del vector X es $||X|| = \sqrt{g(X,X)}$. Entoces $(TM, ||\cdot||)$ es un espacio normado. Con la norma definimos la métrica sobre TM como

$$\rho(X,Y) = ||X-Y|| = \sqrt{g(X-Y,X-Y)},$$

entoces (TM,ρ) es un espacio métrico (vea el capítulo 9). Sin embargo, debe quedar claro que solo si la sigatura corresponde a una variedad Euclidiana (y sólo en este caso), este tensor define un espacio Euclidiano. En el caso de la signatura Lorenziana, el espacio (TM,g) se llama **espacio pseudoeuclidiano**, $(TM, ||\cdot||)$, $||X|| = g(X,X)$ es un **espacio pseudonormado** y (TM,ρ), $\rho(X,Y) = ||X-Y||$ es un **espacio pseudométrico** o Riemanniano en la variedad. Claramente, si tomamos una base $\{e_b\}$ dual a $\{w^a\}$, se tiene que $\eta_{ab} = g(e_a,e_b)$. El caso mas interesante en física es el de signatura Lorenziana, ya que corresponde al modelo del espacio tiempo. El espacio tiempo es una variedad Riemanniana 4-dimensional, en este caso a los 4 vectores base del espacio cotangente se le llama **tetrada**. En espacios con signatura Lorenziana entonces los vectores pueden tener normas no positivas. Se clasifica a los vectores segun su norma, si la norma es positiva se dice que el **vector** es **tipo tiempo**, si su norma es nula, el **vector** es **tipo nulo** y si tiene norma negativa, se dice que el **vector** es **tipo espacio**. Para signaturas Lorenzianas podemos usar la signatura $\eta = diag(1,1,1-1)$. Sin embargo, es posible usar signaturas no diagonales, como

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta signatura define una base del espacio muy particular llamada **tetrada nula**, ya que $g(e_a,e_a) = 0$ (no sumatoria!) para todo $a = 1,2,3,4$. Esto es, los vectores base del espacio tangente tienen norma (magnitud) nula. Es mas, el producto interno de los vectores e_1 y e_2 es $g(e_1,e_2) = 1$, y de los vectores e_3 y e_4 es $g(e_3,e_4) = -1$. Claramente, en este caso la norma y por tanto la distancia, no cumplen con el axioma de ser definidas positivas. Esta signatura es de gran interes en relatividad general.

En una base arbitraria, $\{w^a = w^a_i dx^i\}$, el tensor métrico se escribe como

$$g = g_{ab} w^a \otimes w^b = g_{ab} w^a_i w^b_j dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

donde hemos definido la cantidad $g_{ij} = g_{ab} w^a_i w^b_j$. En ocaciones se acostumba designar por el simbolo ds^2 a la métrica, es decir $ds^2 = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. Ahora vamos a definir la métrica compatible con la conexión.

Definición 22. *Sea M variedad con conexión ∇ y métrica g. Se dice que g es una métrica compatible con la conexión ∇ si*

$$\nabla_c g = 0, \quad \Leftrightarrow \quad e_c(g_{ab}) - \Gamma_{bac} - \Gamma_{abc}$$

para todo vector e_c, donde hemos utilizado el resultado del ejercicio 8 y hemos definido la cantidad $\Gamma_{abc} = g_{ad}\Gamma^d_{bc}$.

De aqui se desprende inmediatamente que si la conexión ∇ y la métrica g son compatibles, se sigue entonces una relación para las componentes de la métrica dada por

$$dg_{ab} = \Gamma_{ba} + \Gamma_{ab} \tag{5.1}$$

ya que si multiplicamos la relación de la definición 22 por los duales e^c de los vectores base e_c, se llega a la relación anterior, recordemos que $\Gamma^c_b = \Gamma^c_{bd}e^d$.

Esta definición también trae como consecuencia que un tensor métrico compatible con la conexión, define la univocamente la conexión en la variedad. Esto se ve en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 16. *Sea M^n variedad n-dimensional con conexión ∇ y métrica g compatible con la conexión. Entonces las componentes de la conexión son determinadas univocamente por las componentes del tensor métrico.*

DEM. 16. *Sea $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1,\cdots,n}$ una base coordenada de la variedad M^n. De la definición de compatibilidad para esta base coordenada entre la métrica y la conexión, se tiene que*

$$\begin{aligned} -g_{ij,k} + \Gamma_{jik} + \Gamma_{ijk} &= 0 \\ g_{ki,j} - \Gamma_{ikj} - \Gamma_{kij} &= 0 \\ g_{kj,i} - \Gamma_{jki} - \Gamma_{kji} &= 0 \end{aligned}$$

Si sumamos estas tres ecuaciones, obtenemos

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}\left(g_{ki,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}\right)$$

ya que Γ_{kij} es simétrica en los indices ij. Asi mismo podemos definir análogamente los coeficientes de conexión

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(g_{li,j} + g_{lj,i} - g_{ij,l}\right)$$

donde g^{kl} es la matriz inversa a g_{ij}, es decir $g^{kl}g_{lj} = \delta^k_j$. ■

NOTACIÓN 7. *A los coeficientes de conexión Γ^k_{ij} de una base coordenada se les llama* ***simbolos de Christoffel****.*

Para poder obtener los coeficiente de conexión en otra base, observemos que $e_a\Gamma^a_{bc}e^b \otimes e^c$ no depende de las bases, asi que

$$\Gamma^a_{bc}e_a \otimes e^b \otimes e^c = \Gamma^a_{bc}e^i_a\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes e^b_j e^c_k dx^j \otimes dx^k = \Gamma^i_{jk}\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k$$

donde se ha definido la cantidad

$$\Gamma^i_{jk} = e^i_a\Gamma^a_{bc}e^b_j e^c_k$$

Claramente hemos usado las bases duales $\{e_a\}$ y $\{e^b\}$. Para escribir los coeficientes Γ^a_{bc} en terminos de los Γ^i_{jk}, se usan las relaciones de dualidad $e^i_a e^b_i = \delta^a_b$ y $e^i_b e^b_j = \delta^i_j$, de donde obtenemos

$$\Gamma^a_{bc} = e^a_i\Gamma^i_{jk}e^j_b e^k_c$$

Ahora vamos a introducir la dos forma de curvatura. La curvatura se define en un espacio con conexión, no necesariamente con métrica. Formalmente su definición es

Definición 23. *Sea M^n variedad y ∇ una conexión en M^n. Entonces la* ***dos forma de curvatura*** *o* ***segunda forma fundamental de Cartan****, se define como*

$$\Theta^a_b = d\Gamma^a_b + \Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_b$$

En término de sus componentes, podemos escribir a la dos forma de curvatura como ciertos coeficientes por la base de las 2-formas, es decir

$$\Theta^a_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd} e^c \wedge e^d$$

donde claramente $\{e^a\}$ es una base de T^*M^n. A las componentes R^a_{bcd} se les conoce como **tensor de curvatura**, ya que a su vez son las componentes de un tensor que se puede escribir como $\mathbf{R} = R^a_{bcd} e_a \otimes e^b \otimes e^c \otimes e^d$. También podemos obtener las componentes de la dos forma de curvatura en términos de las componentes de la conexión. Observemos que de su definición se sigue

$$\begin{aligned}
\Theta^a_b &= \left(\Gamma^a_{bc|d} - \Gamma^e_{cd}\Gamma^a_{be}\right) e^d \wedge e^c + \Gamma^a_{ec}\Gamma^e_{bd} e^c \wedge e^d \\
&= \frac{1}{2}\left(\Gamma^a_{bc|d} - \Gamma^a_{bd|c}\right) e^d \wedge e^c + \frac{1}{2}\left(\Gamma^a_{ec}\Gamma^e_{bd} - \Gamma^a_{ed}\Gamma^e_{bc}\right) e^c \wedge e^d \\
&+ \frac{1}{2}\left(-\Gamma^e_{cd}\Gamma^a_{be} + \Gamma^e_{dc}\Gamma^a_{be}\right) e^d \wedge e^c \\
&= \frac{1}{2}\left(\Gamma^a_{bd|c} - \Gamma^a_{bc|d} + \Gamma^a_{ec}\Gamma^e_{bd} - \Gamma^a_{ed}\Gamma^e_{bc} + D^e_{cd}\Gamma^a_{be}\right) e^c \wedge e^d
\end{aligned}$$

de donde obtenemos que las componentes estan dadas por

$$R^a_{bcd} = \Gamma^a_{bd|c} - \Gamma^a_{bc|d} + \Gamma^a_{ec}\Gamma^e_{bd} - \Gamma^a_{ed}\Gamma^e_{bc} + D^e_{cd}\Gamma^a_{be}$$

En un sistema coordenado, las componentes del tensor de curvatura estan dadas por una expresión un poco más simple

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^i_{nk}\Gamma^n_{jl} - \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{jk}$$

El tensor de curvatura tiene una interpretación geométrica doble. Por un lado, es una medida de la diferencia que existe entre un vector y el mismo al ser transportado paralelamente a lo largo de una curva cerrada. El tensor de curvatura nos da una medida de cuanto se diferencia el vector inicial y el final, despues de ser transportado. Si la curvatura es cero, esa diferencia también es cero. Y también nos da la separación que experimentan dos geodésicas al propagarse paralelamente. Si se trata de un espacio de curvatura cero, las geodésicas no se separan o se juntan, se propagan paralelamente. Pero si la curvatura no es cero, estas suelen separarse o juntarse. El tensor de curvatura es una medida de esta separación.

El tensor de curvatura cumple con varias identidades y relaciones que sirven para simplificar su cálculo. Vamos a derivar las mas importantes, empecemos por una relación que aplica a la segunda derivada de un vector y al tensor de curvatura.

Proposición 17. *Sea M^n variedad y ∇ la conexión en la variedad. Sea $w = w_i dx^i$ una 1-forma en M^n. Entonces se sigue que*

$$w_{i;j;k} - w_{i;k;j} = R^l_{ijk} w_l$$

Dem. 17. *La demostración es por cálculo directo, se tiene que* $w_{i;j} = w_{i,j} - \Gamma^l_{ij} w_l$, *entonces se sigue*

$$w_{i;j;k} = \left(w_{i,j} - \Gamma^l_{ij} w_l\right)_{,k} - \Gamma^n_{ik}\left(w_{n,j} - \Gamma^l_{nj} w_l\right) - \Gamma^n_{jk}\left(w_{i,n} - \Gamma^l_{in} w_l\right)$$

Recordemos que las componentes de la conexión en un sistema coordenado son simétricas, asi que

$$\begin{aligned}
w_{i;j;k} &= w_{i,jk} - \Gamma^l_{ij,k} w_l - \Gamma^l_{ij} w_{l,k} - \Gamma^l_{ik} w_{l,j} - \Gamma^n_{ik}\Gamma^l_{nj} w_l - \Gamma^n_{jk}\left(w_{i,n} - \Gamma^l_{in} w_l\right) \\
w_{i;k;j} &= w_{i,jk} - \Gamma^l_{ik,j} w_l - \Gamma^l_{ik} w_{l,j} - \Gamma^l_{ij} w_{l,k} - \Gamma^n_{ij}\Gamma^l_{nk} w_l - \Gamma^n_{jk}\left(w_{i,n} - \Gamma^l_{in} w_l\right) \\
\Rightarrow \quad w_{i;j;k} &- w_{i;k;j} = \Gamma^l_{ik,j} w_l - \Gamma^l_{ij,k} w_l + \Gamma^n_{ij}\Gamma^l_{nk} w_l - \Gamma^n_{ik}\Gamma^l_{nj} w_l = R^l_{ijk} w_l
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 9. *Sea* M^n *variedad y* $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. *Demuestre que*

$$X^i_{;j;k} - X^i_{;k;j} = -R^i_{ljk} X^l$$

Ejercicio 10. *Sea* M^n *variedad y* $T = T^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_s} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \otimes dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_s}$ *un tensor en* M^n. *Demuestre por inducción que*

$$T^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_s;j;k} - T^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_s;k;j} = \sum_{l=1}^{s} R^n_{ljk} T^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots n\cdots i_s} - \sum_{l=1}^{r} R^{j_l}_{njk} T^{j_1\cdots n\cdots j_r}_{i_1\cdots i_s}$$

Observen que de la proposición 17 y del ejercicio 9 se desprenden la relación para las componentes del tensor de curvatura $R^i_{jkl} = -R^i_{jlk}$. Si aplicamos la relación del ejercicio 8 al tensor de curvatura, obtenemos

$$g_{nm;j;k} - g_{nm;k;j} = R^l_{njk} g_{lm} + R^l_{mjk} g_{nl}$$

de donde se desprende que para una conexión compatible con la métrica g, se sigue que $R_{mnjk} = -R_{nmjk}$, donde $R_{mnjk} = R^l_{njk} g_{lm}$.

Otra relación que debemos explorar es las consecuencias sobre la curvatura de la realción $ddw = 0$ para una 1-forma w. Dado que $dw = w_{i;j} dx^j \wedge dx^i$, se sugue que

$$\begin{aligned}
ddw &= \left(w_{i,j} - \Gamma^n_{ij} w_n\right)_{;k} dx^k \wedge dx^j \wedge dx^i \\
&= \left(\left(w_{i,j} - \Gamma^n_{ij} w_n\right)_{,k} - \Gamma^l_{ik}\left(w_{l,j} - \Gamma^n_{lj} w_n\right) - \Gamma^l_{jk}\left(w_{i,l} - \Gamma^n_{il} w_n\right)\right) dx^k \wedge dx^j \wedge dx^i \\
&= \left(-\Gamma^n_{ij,k} w_n - \Gamma^n_{ij} w_{n,k} - \Gamma^l_{ik} w_{l,j} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^n_{lj} w_n\right) dx^k \wedge dx^j \wedge dx^i \\
&= \left(-\Gamma^n_{ij,k} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^n_{lj}\right) w_n dx^k \wedge dx^j \wedge dx^i \\
&= R^n_{ijk} w_n dx^k \wedge dx^j \wedge dx^i = 0
\end{aligned}$$

de donde se sigue la relación

$$R^n_{ijk} + R^n_{kij} + R^n_{jki} = 0. \tag{5.2}$$

Una relación que es muy importante para entender la teoría general de la relatividad, son las identidades de Bianchi. Estas identidades se obtienen en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 18 (Identidades de Bianchi). *Sea M^n variedad con conexión ∇ y tensor de curvatura R^n_{ijk}. Entonces se sigue que*

$$R^n_{ijk;l} + R^n_{ikl:j} + R^n_{ilj;k} = 0$$

DEM. 18. *Sea $w = w_l dx^l$ una 1-forma en M^n. Si usamos la fórmula del ejercicio 10 para el tensor $w_{i;l}$, se obtiene*

$$w_{i;l;j;k} - w_{i;l;k;j} = R^n_{ijk} w_{n;l} + R^n_{ljk} w_{i;n}$$

Ahora aplicamos la derivada covariante al resultado de la proposición 17, se obtiene

$$w_{i;j;k;l} - w_{i;k;j;l} = R^n_{ijk;l} w_n + R^n_{ijk} w_{n;l}$$

Ahora usamos el mismo procedimiento anterior, sumamos ambos resultados anteriores cambiando los indices j, k, l circularmente. Se obtiene

$$\begin{aligned}
w_{i;l;j;k} - w_{i;l;k;j} &= R^n_{ijk} w_{n;l} + R^n_{ljk} w_{i;n} \\
w_{i;k;l;j} - w_{i;k;j;l} &= R^n_{ilj} w_{n;k} + R^n_{klj} w_{i;n} \\
w_{i;j;k;l} - w_{i;j;l;k} &= R^n_{ikl} w_{n;j} + R^n_{jkl} w_{i;n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{i;j;k;l} - w_{i;k;j;l} &= R^n_{ijk;l} w_n + R^n_{ijk} w_{n;l} \\
w_{i;k;l;j} - w_{i;l;k;j} &= R^n_{ikl;j} w_n + R^n_{ikl} w_{n;j} \\
w_{i;l;j;k} - w_{i;j;l;k} &= R^n_{ilj;k} w_n + R^n_{ilj} w_{n;k}
\end{aligned}$$

y restamos las 3 identidades de arriba menos los 3 identidades de abajo, se obtiene

$$0 = \left(R^n_{ljk} + R^n_{klj} + R^n_{jkl}\right) w_{i;n} - \left(R^n_{ijk;l} + R^n_{ikl;j} + R^n_{ilj;k}\right) w_n$$

pero lo que esta entre el primer paréntesis es cero, por la relación (5.2) que encotramos anteriormente, asi que se sigue lo que buscamos. ■

NOTACIÓN 8. *A las relaciones anteriores se les llama las* ***Identidades de Bianchi****.*

RESUMEN 1. *Vamos a resumir las identidades salidas del tensor de curvatura.*

1.– $R^i_{jkl} = -R^i_{jlk}$
2.– $R^n_{ljk} + R^n_{klj} + R^n_{jkl} = 0$
3.– $R^n_{ijk;l} + R^n_{ikl;j} + R^n_{ilj;k}$ *Identidades de Bianchi*
4.– $R_{mnjk} = -R_{nmjk}$ *Conexiones Compatibles con la métrica*

En lo que sigue veremos algunos ejemplos de curvatura, por supuesto, si conocemos la conexión, es sencillo calcular la curvartura usando su definición o la segunda forma fundamental de Cartan. Pero nosotros vamos a utilizar solo conexiones que son compatibles con la métrica. Asi que para calcular la conexión conociendo la métrica, puede usarse la definición de los simbolos de Christoffel o la primera forma fundamental de Cartan. Vamos a resumir todas estas definciones en este espacio.

Resumen 2. *Sea M^n variedad con métrica $g = \eta_{ab} dw^a \otimes dw^b = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, donde $\{w = w_i dx^i\}$ es una base y $\{dx^i\}$ es una base coordenada del espacio contangente T^*M^n. Entonces, la conexión y la curvatura estan determinadas por*

1.– $dw^a + \Gamma^a_b \wedge w^b = 0$

2.– $\Theta^a_b = d\Gamma^a_b + \Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_b$ *Para una base no coordenada*

3.– $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l} \right)$

4.– $R^i_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^i_{nk}\Gamma^n_{jl} - \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{jk}$ *Para una base coordenada*

Exemplo 23. *En este ejemplo vamos a utilizar la notación convencional $dw \otimes dw \to dw^2$. Vamos a buscar la métrica de la pelota S^2. Como la pelota esta inmersa en $\Re^3$, la forma mas simple de encotrar la métrica de la pelota es substituyendo la ecuación de la pelota de radio a, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, en la métrica euclidiana de $\Re^3$, $dl^2_{\Re^3} = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Si substituimos*

$$dz^2 = \frac{(xdx + ydy)^2}{a^2 - (x^2 + y^2)}$$

obtenemos

$$dl^2_{S^2} = dx^2 + dy^2 + \frac{(xdx + ydy)^2}{a^2 - (x^2 + y^2)}$$

Ahora bien, podemos usar coordenadas polares $x = R\cos(\theta)$, $y = R\sin(\theta)$ en la métrica, para obtener

$$dl^2_{S^2} = R^2 d\theta^2 + \frac{a^2 dR^2}{a^2 - R^2}$$

Conviene escribir la métrica de la pelota en términos del cociente $r = R/a$, entonces la métrica se ve como

$$dl^2_{S^2} = a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\theta^2 \right]$$

Para finalizar este ejemplo, vamos a escribir la métrica del espacio $\Re^3$ en términos de las coordenadas esféricas **??** *(vamos a cambiar la r de la definición* **??** *por a, para denotar el radio de la esfera), se obtiene*

$$dl^2_{\Re^3} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = da^2 + a^2 \left(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2 \right)$$

la cual es la métrica euclidiana, pero ahora escrita en coordenadas esféricas. Si limitamos esta métrica a la pelota, es decir, si hacemos $a =$constante, obtenemos

$$dl^2_{S^2} = a^2 \left(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2 \right) = a^2 d\Omega^2$$

que es la métrica de la pelota pero en coordenadas esféricas. Hay que comparala con la anterior forma que esta en coordenadas polares y con la métrica que se obtiene si $g = dw^1 \otimes dw^1 + dw^2 \otimes dw^2$, usando las formas de la pelota definidas en **??** *en el ejemplo* **??**. *Esta comparación es la que justifica el uso de la notación de este ejemplo.*

Ahora vamos a calcular la conexión y la curvatura. Primero lo haremos usando la base coordenada. Usando las formulas del resumen 2, se obtiene

$$\begin{aligned} dl^2_{S^2} &= a^2\left[\frac{dr^2}{1-r^2}+r^2d\theta^2\right] \\ \Gamma^r_{rr} &= \frac{r}{1-r^2} \quad \Gamma^r_{\theta\theta}=-r(1-r^2)\sin^2(\theta), \quad \Gamma^\theta_{\theta\theta}=\cot(\theta), \quad \Gamma^\theta_{r\theta}=\frac{1}{r} \\ R^\theta_{rr\theta} &= -\frac{1}{1-r^2}, \quad R^r_{\theta r\theta}=r^2\sin^2(\theta) \end{aligned}$$

y todas las demas componentes igual a cero. También podemos calcular estas cantidades de la métrica en coodenadas esféricas, se obtiene

$$\begin{aligned} dl^2_{S^2} &= a^2\left(d\theta^2+\sin^2(\theta)d\varphi^2\right) \\ \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} &= \cot(\theta), \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}=-\sin(\theta)\cos(\theta) \\ R^\theta_{\varphi\theta\varphi} &= \sin^2(\theta), \quad R^\varphi_{\theta\theta\varphi}=-1 \end{aligned}$$

EJERCICIO 11. *Siguiendo el ejemplo anterior, demuestre que la métrica de S^3 en coordenadas esféricas esta dada por*

$$dl^2_{S^3}=a^2\left[\frac{dr^2}{1-r^2}+r^2\left(d\theta^2+\sin^2(\theta)d\varphi^2\right)\right]$$

donde a es el radio de la esfera S^3 y $r/a\to r$. Esta es la parte espacial de la ***métrica de Friedman-Robertson-Waker****. Calcule la conexión y el tensor de curvatura de esta métrica.*

EXEMPLO 24. *Sea M^4 una variedad con métrica de signatura Lorenziana dada por $g=\eta_{ab}w^a\otimes w^b$, $\eta_{ab}=diag(1,1,1,1-1)$, donde la tetrada esta dada por*

$$\begin{aligned} w^1 &= \frac{t}{x\sqrt{x}}dx, \quad w^2=\frac{t}{x\sqrt{x}}dy, \quad x>0 \\ w^3 &= \sqrt{\frac{3x}{2}}\,dz+\sqrt{\frac{2}{3x}}\,dt, \quad w^4=\sqrt{\frac{2}{3x}}\,dt \end{aligned}$$

Lo primero que hay que notar, es que se debe cumplir la relación 5.1, es decir, $d\eta_{ab}=\Gamma_{ab}+\Gamma_{ba}=0$, entonces la conexión es antisimétrica en los indices ab. Recordemos que $\Gamma_{ab}=\eta_{ad}\Gamma^d_b$. Vamos a calcular la conexión utilizando las formulas 1 y 2 del resumen 2. Para esto encontremos primero la diferencial de la tetrada, esta es

$$\begin{aligned} dw^1 &= x^{-3/2}dt\wedge dx, \quad dw^2=-\frac{3}{2}x^{-5/2}t\;dx\wedge dy+x^{-3/2}dt\wedge dy, \\ dw^3 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x^{-1/2}dx\wedge dz-\sqrt{\frac{2}{3}}x^{-3/2}dx\wedge dt\right) \quad dw^4=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}x^{-3/2}dx\wedge dt \end{aligned}$$

que en terminos de la tetrada, se obtiene

$$\begin{aligned} dw^1 &= \sqrt{6x}\;w^4\wedge w^1, \quad dw^2=-\frac{3}{2}\sqrt{x}\;w^1\wedge w^2+\frac{1}{t}\sqrt{6x}\;w^4\wedge w^2 \\ dw^3 &= \frac{1}{2}\sqrt{x}\;w^1\wedge w^3-2\sqrt{x}\;w^1\wedge w^4, \quad dw^4=-\sqrt{x}\;w^1\wedge w^4 \end{aligned}$$

De aqui podemos entonces leer las componentes de la conexión

$$\begin{aligned}
\Gamma_4^1 &= -\sqrt{6x}w^1 - \sqrt{x}\ w^4 \\
\Gamma_1^2 &= \frac{3}{2}\sqrt{x}w^2, \quad \Gamma_4^2 = -\frac{1}{t}\sqrt{6x}\ w^2, \\
\Gamma_1^3 &= -\frac{1}{2}\sqrt{x}\ w^3 + \sqrt{x}\ w^4, \quad \Gamma_4^3 = -\sqrt{x}\ w^1,
\end{aligned}$$

donde hemos tomado en cuenta la antisimetria de la conexión, por ejemplo, agregando términos convenientes a las componentes Γ_4^1 *y* Γ_1^4*. Ahora calculemos el tensor de curvatura, obtenemos,*

$$\begin{aligned}
\Theta_4^1 &= -\frac{1}{2}x\ w^1 \wedge w^4 \\
\Theta_1^2 &= x\ w^2 \wedge \left(\left(-\frac{3}{4} + \frac{6}{t}\right)\ w^1 + \frac{\sqrt{6}}{t}\ w^4\right) \\
\Theta_4^2 &= x\ w^2 \wedge \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{t} - 3\right)\ w^1 - 3\left(\frac{2}{t^2} + \frac{1}{2}\right)\ w^4\right) \\
\Theta_1^3 &= -\frac{1}{4}x\ w^1 \wedge \left(w^3 - 2\ w^4\right) \\
\Theta_4^3 &= x\ \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\ w^1 \wedge w^3 + \sqrt{6}\ w^1 \wedge w^4 + \frac{1}{2}\ w^3 \wedge w^4\right)
\end{aligned}$$

de donde se pueden leer las componentes de la curvatura en esta base.

Para terminar este capítulo, vamos a introducir tres tensores mas, estos son la contracción del tensor de curvatura, la traza de este tensor y una combinación muy adecuada de estos dos. Vamos a iniciar con las contracciones del tensor de curvatura.

Definición 24. *Sea* M^n *variedad y sea* $\{e_a\}$ *una base del espacio tangente con dual* $\{e^b\}$*. Sea* ∇ *conexión en* M^n *y tensor de curvatura* $\mathbf{R} = R^a_{bcd} e_a \otimes e^b \otimes e^c \otimes e^d$*. Entonces el* ***tensor de Ricci*** *es es la contracción del tensor de curvatura, tal que*

$$\widehat{\mathbf{R}} = C_2^1 \mathbf{R} = R^a_{bad} e^b \otimes e^d = R_{bd} e^b \otimes e^d$$

Análogamente, la traza del tensor de Ricci se llama ***escalar de Ricci****, es decir*

$$R = C_1^1 \widehat{\mathbf{R}} = R^d_d$$

donde $R^c_d = \eta^{cb} R_{bd}$

La importancia de estas dos nuevas cantidades radica en el siguiente proposición

Proposición 19. *Sea* M^n *variedad y sea* $\{e_a\}$ *una base del espacio tangente con dual* $\{e^b\}$*. Sea* $g = \eta_{ab} w^a \otimes w^b$ *una métrica en* M^n *compatible con la conexión. Sea* ∇ *conexión en* M^n *y tensor de curvatura* $\mathbf{R} = R^a_{bcd} e_a \otimes e^b \otimes e^c \otimes e^d$*. Entonces se sigue que*

$$G^{ab}{}_{|b} = \left(R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab}\ R\right)_{|b} = 0$$

DEM. 19. *Vamos a demostrar la proposición en el sistema coordenado, la demostración en general es equivalente. Ecribamos las identidades Bianchi en componentes, contrayendo los indices adecuados para obtener el tensor de Ricci, esto es*

$$0 = R^n_{ink;l} + R^n_{ikl;n} + R^n_{iln;k} = R_{ik;l} + g^{nm}R_{mikl;n} - R_{il;k} = R^i_{k;l} - g^{nm}R^i_{mkl;n} - R^i_{l;k}$$

Y volvamos a contraer los indices

$$R^k_{k;l} - g^{nm}R^k_{mkl;n} - R^k_{l;k} = R_{;l} - g^{nm}R_{ml;n} - R^k_{l;k} = R_{;l} - 2g^{nm}R_{ml;n} = 0$$

Si multiplicamos por $1/2$ *y la inversa de las componentes de la métrica en esta última expresión, llegamos al resultado deseado.* ■

Este resultado es de suma importancia en física, ya que es la ralación fundamental para definir las ecuaciones de Einstein.

NOTACIÓN 9. *Al tensor* $G_{ab}e^a \otimes e^b$ *cuyas componentes estan definidas por*

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}\ R$$

se le llama ***tensor de Einstein****.*

El hecho de que la contracción del tensor de Einstein con la derivada covariate sea cero, hacen a este tensor el candidato idonea para ser la parte geométrica de las ecuaciones fundamentales de la gravitación. Vamos a ver un ejemplo.

EXEMPLO 25. *Vamos a calcular el tensor de Ricci de la pelota* S^2 *en coordenadas esféricas. Primero hay que usar las propiedades del tensor de curvatura del resumen 1 para encontrar todas las componentes no cero del tensor. Lo primero que hay que notar es que la única componente no cero es* $R_{\theta\varphi\theta\varphi} = a^2\sin^2(\theta)$*, y con ellos calcular*

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= R^\theta_{\theta\theta\theta} + R^\varphi_{\theta\varphi\theta} = 1, \quad R_{\theta\varphi} = R^\theta_{\theta\theta\varphi} + R^\varphi_{\theta\varphi\varphi} = 0, \\ R_{\varphi\theta} &= R^\theta_{\varphi\theta\theta} + R^\varphi_{\varphi\varphi\theta} = 0, \quad R_{\varphi\varphi} = R^\theta_{\varphi\theta\varphi} + R^\varphi_{\varphi\varphi\varphi} = \sin^2(\theta), \end{aligned}$$

Entonces podemos calcular el escalar de Ricci, haciendo $R = R^\theta_\theta + R^\varphi_\varphi = 2/a^2$ *y con él finalmente calcular el tensor de Einstein. El resultado es que* $\mathbf{G} = 0$*.*

EJERCICIO 12. *Calcule el tensor de Ricci, el escalar de Ricci y el tensor de Einstein para la métrica de la pelota* S^2 *en coordenadas polares.*

EJERCICIO 13. *Calcule el tensor de Ricci, el escalar de Ricci y el tensor de Einstein para la métrica de la pelota* S^3 *en coordenadas esféricas.*

EJERCICIO 14. *Calcule el tensor de Ricci, el escalar de Ricci y el tensor de Einstein para la métrica del ejemplo 24*